

В каждой задаче ответ является числом. Если число нецелое, округлите его до десятых.

Алгебра

10. Найдите наибольшее решение уравнения $(t^2 - 2t - 1)^2 + 3t^2 - 6t - 13 = 0$.
20. Найдите наименьшее решение уравнение $\sqrt[5]{16 + \sqrt{x}} + \sqrt[5]{16 - \sqrt{x}} = 2$.
30. При каком минимальном значении k неравенство $\left| \frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} \right| \leq 3$ справедливо при любом вещественном x ?
40. Для положительных вещественных чисел a, b, c выполнено равенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$. Для какого минимального k будет гарантированно выполнено неравенство

$$\frac{1}{(2a + b + c)^2} + \frac{1}{(2b + c + a)^2} + \frac{1}{(2c + a + b)^2} \leq k?$$

Комбинаторика

10. Марсоход «Кьюриосити» двигается из левого верхнего угла в правый нижний по клеточному полю 5×5 . Он умеет двигаться на две клетки вправо и на одну клетку вниз, но в каждом направлении он может двигаться не более двух раз подряд. Сколько у марсохода есть способов добраться из левого верхнего в правый нижний угол?
20. Сколько существует прямоугольников с целыми сторонами и периметром меньше 533?
30. У Гермiony есть стопка из 13 книг для легкого чтения, которые она хочет переложить так, чтобы никакая книга не лежала на той же самой, что и до перекалывания. Сколькими способами она сможет это сделать?
40. На координатной плоскости отметили точки, у которых обе координаты целые и по модулю не превосходят пять. Сколько существует равнобедренных прямоугольных треугольников с вершинами в отмеченных точках?

Теория чисел

10. Найдите наибольшее натуральное число, сумма цифр которого в 100 раз меньше, чем само число.
20. В какой степени входит тройка в произведение всех делителей числа 567 000?
30. Найдите количество упорядоченных троек (d_1, d_2, d_3) , состоящих из делителей числа 360, таких что $d_1 d_2 d_3$ — тоже делитель числа 360.
40. Для натурального n пусть $s(n)$ обозначает наименьшее неотрицательное число, которое надо вычесть из n , чтобы получился точный квадрат. Например, $s(8) = 4$, а $s(9) = 0$. Укажите первые четыре цифры суммы $s(1) + s(2) + s(3) + \dots + s(40\,000\,000\,000)$.

Геометрия

10. Точку M внутри правильного треугольника соединили с вершинами и получили разбиение исходного треугольника на три меньших. Сколько существует таких M , что площади получившихся треугольников соотносятся как $1 : 2 : 3$?
20. Дан правильный восьмиугольник. Пусть R — радиус его описанной окружности, а r — радиус вписанной в него окружности. Найдите отношение r/R .
30. Дан треугольник ABC со сторонам $AB = 1$, $AC = 4$ и углом A , равным 120° . Вписанная окружность треугольника касается стороны AC в точке L . Найдите AL .
40. На гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки X и Y такие, что $BX : XY : YC = 1 : 2 : \sqrt{3}$. Найдите угол $\angle XAY$ (в ответе укажите число градусов).