



Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 11 апреля 2021 года
10 класс. Основная аудитория



Сюжет 1.

Дан равносторонний треугольник ABC . Точки X и Y на сторонах AB и BC , соответственно. Равносторонние треугольники AXD и BYE построены во внешнюю сторону относительно исходного треугольника ABC . Точка F такова, что треугольник DEF равносторонний, а точки F и C лежат по одну сторону относительно DE .

1.1. Известно, что $AX = BY$, а G — точка пересечения стороны AB и прямой, проходящей через F параллельно BC . Докажите, что $GF = AB$

1.2. Известно, что AB параллельно FC . Докажите, что $AX = BY$.

Сюжет 2.

Во всех пунктах помимо указанных предположений считается, что $n \geq 10$.

2.1. Решите неравенство в натуральных числах: $n \leq n! - 4^n \leq 4n$.

2.2. Найдите все натуральные n и составные k такие, что $n \leq n! - k^n \leq kn$.

Сюжет 3.

В свободное от учёбы время Паша любит программировать логические функции, то есть функции нескольких аргументов, возвращающие истину или ложь, при этом каждый из аргументов также принимает значения истина или ложь. Так, если ему дана функция $f(x_1, \dots, x_n)$, то он хочет записать её с помощью последовательной программы, состоящей из нескольких строк, таких что i -я строка имеет вид

$$x_{n+i} = b_i(x_j, x_k),$$

где b_i — это любая логическая функция от двух переменных, а $1 \leq j, k \leq n + i - 1$. Другими словами, каждая строка программы просто применяет одну из бинарных логических функций к входным переменным (x_1, \dots, x_n) или результатам предыдущих операций $(x_{n+1}, \dots, x_{n+i-1})$ и записывает результат в новую переменную x_{n+i} . Результатом вычисления этой программы считается результат вычисления ее последней строки, который должен совпадать со значением $f(x_1, \dots, x_n)$.

Паша хочет научиться писать программу для функции $f_n(x_1, \dots, x_n)$, которая принимает значения истина тогда и только тогда, когда существует такой номер $1 \leq i < n$, что x_i и x_{i+1} принимают значение истина. Другими словами есть две переменные с соседними номерами, принимающие значения истина.

3.1. Как вычислить f_5 за 5 строк, используя только конъюнкции и дизъюнкции (то есть логические И и ИЛИ)?

3.2. Докажите, что для всех $n \geq 4$ переменные x_1 и x_2 встречаются хотя бы в двух строках всякой программы, вычисляющей f_n .



Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 11 апреля 2021 года
10 класс. Выводная аудитория



Сюжет 1.

Дан равносторонний треугольник ABC . Точки X и Y на сторонах AB и BC , соответственно. Равносторонние треугольники AXD и BYE построены во внешнюю сторону относительно исходного треугольника ABC . Точка F такова, что треугольник DEF равносторонний, а точки F и C лежат по одну сторону относительно DE .

1.3. Пусть изначальный треугольник ABC фиксирован и его сторона равна a , а остальные точки не фиксированы. F' — такая точка отличная от F , что треугольник DEF' равносторонний. Найти геометрическое место точек F' и его длину.

1.4. G — точка пересечения стороны AB и прямой, проходящей через F параллельно BC . Докажите, что $BG = AX$.

Сюжет 2.

Во всех пунктах помимо указанных предположений считается, что $n \geq 10$.

2.3. Найдите все простые n и натуральные k такие, что $n \leq n! - k^n \leq kn$.

2.4. Решите неравенство в натуральных числах: $n \leq n! - k^n \leq kn$.

Сюжет 3.

В свободное от учёбы время Паша любит программировать логические функции, то есть функции нескольких аргументов, возвращающие истину или ложь, при этом каждый из аргументов также принимает значения истина или ложь. Так, если ему дана функция $f(x_1, \dots, x_n)$, то он хочет записать её с помощью последовательной программы, состоящей из нескольких строк, таких что i -я строка имеет вид

$$x_{n+i} = b_i(x_j, x_k),$$

где b_i — это любая логическая функция от двух переменных, а $1 \leq j, k \leq n + i - 1$. Другими словами, каждая строка просто применяет одну из бинарных логических функций к входным переменным (x_1, \dots, x_n) или результатам предыдущих операций $(x_{n+1}, \dots, x_{n-i+1})$ и записывает результат в новую переменную x_{n+i} . Результатом вычисления этой программы считается результат вычисления ее последней строки, который должен совпадать со значением $f(x_1, \dots, x_n)$.

Паша хочет научиться писать программу для функции $f_n(x_1, \dots, x_n)$, которая принимает значения истина тогда и только тогда, когда существует такой номер $1 \leq i < n$, что x_i и x_{i+1} принимают значение истина. Другими словами есть две переменные с соседними номерами, принимающие значения истина.

3.3. Пусть $C(f_n)$ — это минимальное число строк в программе, вычисляющей f_n . Докажите, что $C(f_n) \geq C(f_{n-2}) + 2$ для $n \geq 4$.

3.4. Пусть $M(f_n)$ — это минимальное число строк в программе, вычисляющей f_n , в каждой строке вычисляя либо дизъюнкцию, либо конъюнкцию. Докажите, что $M(f_n) \geq M(f_{n-2}) + 3$ для $n \geq 4$.