Условия и решения очного тура олимпиады ЮМШ для жюри

9 класс

Сюжет 1.

В армии Шакти состоит 100 троглодитов; некоторые троглодиты дружат друг с другом, а некоторые нет. Множество троглодитов A называется *общительным*, если любой другой троглодит дружит с кем-то из A и *странным общительным*, если при этом никакие два троглодита из A не дружат. Оказалось, что каждый троглодит с кем-то дружит.

1.1. В армии нашлись троглодиты Вася и Петя, образующие общительное множество. Тогда Шакти может найти странное общительное множество из не более, чем 50 троглодитов.

Решение.

Если Вася и Петя не дружат, то можно взять их. Иначе один из них (скажем, Вася) знает хотя бы 50 троглодитов. Начнем формировать странное общительное множество A, начиная с Васи. Если какой-то из оставшихся троглодитов не знает никого из A, мы добавляем его в A. В конце A станет странным общительным множеством. Поскольку 50 троглодитов знакомы уже с Васей, в A окажется не более 50 троглодитов.

1.2. Пусть не нашлось таких четырех троглодитов A, B, C и D, что A дружит с B, C и D, а B, C и D между собой нет. Дас нашел общительное множество размера k. Докажите, что Шакти сможет найти странное общительное множество размера не более k.

Решение.

Рассмотрим общительное множество A наименьшего размера. Заметим, что можно выбрать A таким, что для каждого троглодита a из A найдется троглодит v_a, единственный друг которого в множестве A — троглодит a. Действительно, в противном случае, если a дружит с кем-то из A, то его можно просто удалить, а если не дружит ни с кем из A, то её можно поменять с любым его другом.

Пусть в A найдутся друзья, скажем, a и b. Тогда все троглодиты, для которых единственный друг в множестве A — троглодит a, дружат между собой. В самом деле, пусть v_a и u_a не дружат, тогда a, b, v_a и u_a противоречат условию. Таким образом можно заменить a на v_a, множество A останется общительным, а число пар дружащих троглодитов в A уменьшится.

Повторив описанные рассуждения несколько раз получим странное общительное множество размера не больше, чем было исходно.

1.3. Покажите, что странного общительного множества из не более чем 81 троглодита может и не оказаться.

Решение.

Пусть есть 10 троглодитов, дружащие между собой обозначим их за K; и каждый из K дружит еще с девятью разными осташимися троглодитами. Больше дружб нет. Любое странное общительное множество A содержит не более одного троглодита из K (скажем, Васю), и вынуждено содержать всех троглодитов, не знакомых с Васей, так как между ними нет знакомых. Тогда если A содержит Васю, то в нем не менее 90 троглодитов, а если содержит, то не менее 82.

1.4. Докажите, что Шакти всегда сможет найти странное общительное множество не более, чем из 82 троглодитов.

Решение.

Рассмотрим общительное множество A наименьшего размера. Заметим, что можно выбрать A таким, что для каждого троглодита a из A найдется троглодит v_a, единственный друг которого в множестве A — троглодит a. Действительно, в противном случае, если a дружит с кем-то из A, то его можно просто удалить, а если не дружит ни с кем из A, то её можно поменять с любым его другом.

По принципу Дирихле некоторый троглодит $u \in A$ знаком с хотя бы $(100-|A|)/|A|$ троглодитами не из A.

Пусть B — множество максимального размера, содержащее u и такое, что в нем никто не дружит. Заметим, что B является странным общительным, оценим его размер. Заметим, что B не содержит друзей u, а также не более одного троглодита из каждой пары a, v_a, где $a \in A \setminus \{u\}$.

Поскольку друзья u, не входящие в A, по построению не входят в пары (a, v_a) и их не менее $(100 - |A|)/|A|$, получаем

$$|B| \leqslant 100 - \frac{100 - |A|}{|A|} - (|A| - 1) = 102 - \frac{100}{|A|} - |A| \leqslant 82,$$

что и требовалось.

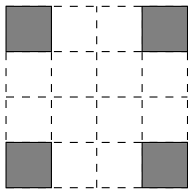
Сюжет 2.

Есть квадрат со стороной 2. Вася закрасил в нем конечное число многоугольников так, что не нашлось закрашенных точек на расстоянии 1 (граница считается незакрашенной). Пусть A — закрашенное множество, $S(A)$ — его площадь.

2.1. Приведите пример такого A, что $S(A) \geqslant 1$.

Решение.

В качестве примера подойдут четыре маленьких квадрата со стороной $\frac{1}{2}$ по углам большого:



2.2. Докажите, что $S(A) \leqslant 2$.

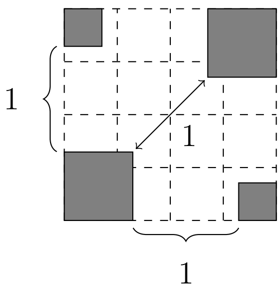
Решение.

Разрежем квадрат на два равных прямоугольника, заметим, что параллельный перенос левой половины на единичный вектор совпадает с правой половиной. Следовательно, параллельный перенос закрашенной части в левой половине не пересекается с закрашенной частью в правой половине.

2.3. Приведите пример A с $S(A) \geqslant 2{,}5 - \sqrt{2}$.

Решение. Поставим в противоположные углы одинаковые квадраты, чтобы расстояние между ними было равно 1. Т. е. диагональ каждого равна $(2\sqrt{2} - 1)/2 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ (что меньше 1), а сторона равна $1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}$. В оставшиеся углы поместим квадраты максимально возможного размера, их сторона будет равна $2 - 1 - (1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Тогда общая площадь равна

$$2\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 2\left(1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4} = 2{,}5 - \sqrt{2}.$$



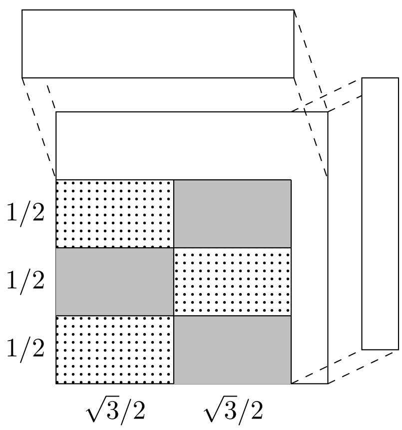
2.4. Оцените сверху $S(A)$ как 1.65.

Решение. Разрежем квадрат, как отмечено на картинке. Рассмотрим шесть равных прямоугольников: левый верхний, левый нижний и правый средний попарно переводятся друг в друга с помощью параллельного переноса на вектор длины один. Следовательно, площадь закрашенной части не превышает трети от площади серых прямоугольников. Аналогичные рассуждения применимы для прямоугольников с точками.

Рассмотрим теперь каемку: ее можно покрыть двумя прямоугольниками как на картинке, и в каждом из них оценить площадь закрашенной части как половину площади прямоугольника.

Итого получаем оценку в

$$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2-\sqrt{3})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{2}(5-\sqrt{3})=1.63\ldots.$$



Сюжет 3.

Во всех пунктах помимо указанных предположений считается, что $n \geqslant 10$.

3.1. Решите неравенство в натуральных числах:

$$n \leqslant n! - 4^n \leqslant 4n.$$

Решение.

Докажем по индукции, что $n! > 4^n + 4n$. База $n = 10$ проверяется; переход:

$$(n+1)! > (n+1)(4^n+4n) = 4^{n+1} + 16n + (n-3)(4^n+4n) > 4^{n+1} + 4(n+1).$$

Выходит, что решений нет.

3.2. Найдите все натуральные n и составные k такие, что

$$n \leqslant n! - k^n \leqslant kn.$$

Решение.

Заметим, что $n^{n/2} + n^{3/2} < 2n^{n/2} < n! \leqslant (n/2)^n$ для всех $n > 9$, т. о. имеет смысл искать решения с k в диапазоне от $\sqrt{n}$ до $n/2$.

Заметим далее, что если $k \leqslant n/3$, то в числе сомножителей $n!$ найдутся k, $2k$ и $3k$, а значит, $n!$ будет делиться на k^3. Несложно заметить, что тогда $n! - k^n$ будет делиться на k^3. Но для $n > 9$, $k^3 > k \cdot k^2 > kn$. Значит, для $n > 9$ имеет смысл искать решения для $n/3 < k < n/2$.

Теперь решим текущую задачу. Действительно, пусть k не простое и не удвоенное простое, тогда можно записать $k = xy$, где $2 < x \leqslant y$ — натуральные числа. Тогда $n!$ будет иметь различными множителями x, k, $2y$, $2k$ Тогда $x \cdot k \cdot 2y \cdot 2k$ делится на k^3 значит, $n!$ делится на k^3.

Если же $k = 2p$ — удвоенное простое,то $n!$ кратен p^4, поскольку $k \leqslant n/2$ и кратен 2^6. То есть опять-таки число $n!$, а значит и число $n! - k^n$ кратно k^3, что, как мы видели выше, противоречит неравенствам в условии задачи. То есть, решений нет.

3.3. Найдите все простые n и натуральные k такие, что

$$n \leqslant n! - k^n \leqslant kn.$$

Решение.

Заметим, что так как (по доказанному выше) $n/3 < k$, то $kn < 3k^2$, а значит и $n! - k^n < 3k^2$. Поскольку $k \leqslant n/2$, в числе сомножителей $n!$ найдутся k, $2k$,а значит, $n!$, а вместе с ним и $n! - k^n$ будет делиться на k^2. Отсюда следует, что либо $n! - k^n$ равняется либо k^2, либо $2k^2$ (Это общие ключевые наблюдения, не зависящие от простоты n).

Перейдем к решению пункта. Заметим, что для составных k решений нет по прошлому пункту. Если k простое, то $n! - k^n$ нечетно, а значит, равно k^2 (а не $2k^2$). Рассмотрим выражение $n! - k^n$ по модулю n. По малой теорема Ферма, оно сравнимо с $-k$. Таким образом, $k^2 + k = k(k+1)$ делится на n. Это невозможно, так как n — простое и $k, k+1 < n$. Значит, решений нет.

(Также вариант с $2k^2 + k$, делящимся на n и, соответственно, $n = 2k + 1$ легко исключить в силу неравенства $k^{2k+1} > (2k+1)!$, выполненого для k, актуальных в этой части решения задачи.)

3.4. Решите неравенство в натуральных числах:

$$n \leqslant n! - k^n \leqslant kn.$$

Решение.

Поскольку случай составного (в частности, четного) k уже разобран в п.2, то, как и в п.3, осталось разобрать случай $n! = k^n + k^2$. Заметим, что левая часть равенства делится на $k - 1$, а правая сравнима по этому модулю с двойкой (и $k > 3$). Противоречие, значит решений нет.

(Также можно было заметить, что n — нечетно (иначе $k^n + k^2$ сравнимо с двойкой по модулю 4, а $n!$ делится на 4. В этом случае $k^n + k^2 = k^2(k+1)m$, где m — нечетно. Но $n!$ должно делиться на $2^{\frac{n=1}{2}}$, а это число больше, чем $n/2$, которое, в свою очередь, не меньше, чем $k + 1$ — наибольшее четное число, на которое делится $k^2(k+1)m$.)