8 класс

1. Министерство Правды заявило, что за январь занятость населения Океании упала на 15% от предыдущего уровня, а безработица выросла на 10% от предыдущего уровня. Какова теперь безработица в Океании, согласно заявлению Министерства? (Занятость — доля трудоспособного населения, имеющего работу, а безработица — не имеющего.)

Решение. Пусть безработица в начале января составляла x процентов, значит, занятость составляла $100-x$ процентов. Новые значения, согласно условию задачи, это $1.1x$ и $0.85(100-x)$ процентов соответственно. В сумме эти числа должны тоже давать 100. Получаем тогда уравнение:

$$1.1x + 0.85(100-x) = 100, \tag{3}$$

решая которое, находим $x = 60$. Значит, ответ на задачу — это 66 процентов. □

Критерии.
Полное решение — 7 баллов.
В решении допущена арифметическая ошибка — 4 балла.
В качестве ответа указана безработица до января — 4 балла.
Допущены обе из указанных выше ошибок — не более 1 балла.

2. Ася поделила любимое число Васи на свое любимое число, Буся поделила любимое число Васи *на свое* любимое число. Затем обе девочки записали на доску делитель, неполное частное и остаток. Пять чисел на доске — это 2020, 2020, 2021, 2021, 2021. Можно ли однозначно определить шестое?

Решение. Нельзя. Рассмотрим два варианта, какими могли быть любимые числа ребят:

	Вася	Ася	Буся
Вариант 1	$2021 \cdot 2021 + 2020$	2021	2021
Вариант 2	$2021 \cdot 2021 + 2020 = 2022 \cdot 2020 + 2021$	2021	2022

Видно, что в первом случае шестым числом оказалось бы 2021, а во втором 2022. □

Критерии.
Полное решение — 7 баллов.
Найден пример соответствующий варианту 2 из решения — 4 балла.

3. У курфюрста Георга 100 монет, некоторые из них фальшивые (возможно, все или ни одной). Георг может показывать от 10 до 20 монет эксперту, и тот будет говорить, сколько из них фальшивых. Проблема в том, что единственный на всю округу эксперт — барон Мюнхгаузен, а он привирает: результат, названный бароном, всегда больше истинного на некоторое фиксированное (и неизвестное Георгу) натуральное число. Барона не смущает, что он может сказать, например, «тринадцать», если ему дали всего двенадцать монет. Сможет ли Георг гарантированно выяснить, какие монеты фальшивые, обратившись к эксперту меньше 120 раз?

Решение. Сможет. Отдадим на экспертизу случайные X монет, а потом те же самые X и 1 другую. Если барон оба раза скажет два одинаковых числа, значит добавленная монета — настоящая, иначе она фальшивая. Таким образом, можно разбить монеты на группы из 10, и каждую группу проверять на фальшивость за 11 обращений: сначала отдавать 10 других монет, а затем добавлять по одной монете из проверяемой группы. Всего обращений будет $11 \cdot 10 = 110 < 120$. □

Критерии.
Полное решение — 7 баллов.
Решения в которых на проверку отдается по одной монете — 0 баллов.
Найдено число на которое привирает барон — 0 баллов.

4. В ряд стоят 50 мальчиков и 50 девочек в каком-то порядке. В этом ряду имеется ровно одна группа из 30 детей, стоящих подряд, в которой мальчиков и девочек поровну. Докажите, что найдётся группа из 70 детей подряд, в которой мальчиков и девочек также поровну.

Решение. Зациклим детей в круг. Посмотрим теперь на все возможные группы из 30 подряд стоящих детей (будем называть такие группы *отрядами*). Достаточно доказать, что хотя бы в двух из них поровну мальчиков и девочек. Действительно, тогда при размыкании цикла обратно один из этих двух отрядов по условию должен разорваться, значит, между частями, на которые такой отряд разорвался, в ряду стоит 70 детей, среди которых девочек и мальчиков поровну.

Теперь покажем, что в цикле есть хотя бы два отряда, среди которых поровну мальчиков и девочек. Из условия ясно, что есть отряд, где девочек и мальчиков не поровну. Причём найдётся как отряд, где больше мальчиков (то есть мальчиков больше 15), так и отряд, где больше девочек (то есть мальчиков меньше 15). Действительно, если, скажем, в каждом отряде мальчиков не больше, чем девочек, то при сложении количества мальчиков и девочек во всех отрядах, получится, что тогда утридцатиренное число мальчиков меньше, чем утридцатиренное число девочек, что противоречит условию (каждый из детей посчитан входит ровно в 30 отрядов, то есть посчитан ровно 30 раз).

Заметим теперь, что при переходе от отряда к соседнему с ним количество мальчиков либо не меняется, либо меняется на 1. Тогда если мы будем смещаться от отряда, где мальчиков больше 15, к отряду, где мальчиков меньше 15, что по часовой стрелке, что против часовой стрелки, нам каждый раз обязательно встретится отряд, где мальчиков ровно 15, то есть мальчиков и девочек поровну. □

Критерии.

Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC угол B прямой. На стороне BC отмечена середина M, а на гипотенузе нашлась такая точка K, что $AB = AK$ и $\angle BKM = 45^\circ$. Кроме этого, на сторонах AB и AC нашлись такие точки N и L соответственно, что $BC = CL$ и $\angle BLN = 45^\circ$. В каком отношении точка N делит сторону AB?

Решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда, так как $\triangle ABK$ по условию равнобедренный с основанием BK, $\angle ABK = \angle AKB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Из-за прямоугольности $\triangle ABC$ угол ACB равен $90^\circ - \alpha$, и, раз $\triangle CBL$ из условия равнобедренный с основанием BL, $\angle CBL = \angle CLB = 90^\circ - 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Тогда получаем, что $\angle LBK = \angle ABK + \angle CBL - 90^\circ = 45^\circ$.

Из этого следует, что $LN \parallel BK$ и $BL \parallel KM$. Значит, во-первых, KM — средняя линия в равобедренном треугольнике CBL и тогда $CK = KL = CM = MB = \frac{1}{2}BC$. Во-вторых, $KBNL$ — трапеция, и она равнобедренная (так как $\angle NBK = \angle BKL$). Треугольник KAB по условию равнобедренный, а $KBNL$ равнобедренная трапеция, значит, $KL = BN$ и $AL = AN$.

Итого, имеем равенства:

$$BN = KL = KC = MC = BM$$

$$AN = AL.$$

По теореме Пифагора для $\triangle ABC$:

$$BC^2 + AB^2 = AC^2$$

$$(BM + MC)^2 + (BN + AN)^2 = (CK + KL + LA)^2.$$

Пользуясь известными равенствами, получаем

$$(BN + BN)^2 + (BN + AN)^2 = (BN + BN + AN)^2$$

$$4BN^2 + BN^2 + 2BN \cdot AN + AN^2 = 4BN^2 + 4BN \cdot AN + AN^2.$$

После сокращения соответствующих слагаемых

$$BN^2 = 2BN \cdot AN.$$

Длина отрезка BN не равна 0, например, потому что по условию $\angle BLN = 45^\circ$, значит, на неё можно сократить полученое равенство:

$$BN = 2AN.$$

В итоге получаем ответ:

$$AN : BN = 1 : 2.$$

□

Критерии.

Внимание: картинка, на которой отмечено множество разных углов, не является доказательством чего-либо, поскольку по ней восстановить порядок вычисления углов не представляется возможным.

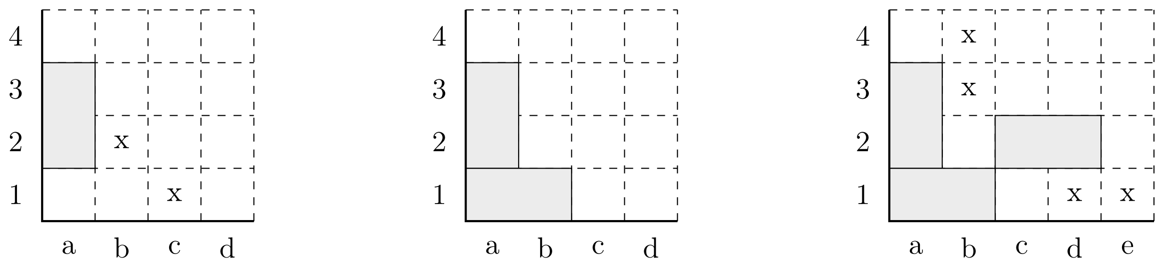
Полное решение — 7 баллов.

Доказано, что $LN \parallel BK$ и $BL \parallel KM$ — 4 балла.

6. Двое по очереди ставят на доску 2021×2021 неперекрывающиеся домино, закрывающие по две клетки. Задача второго — покрыть домино всю доску, кроме одной клетки, задача первого — помешать ему. Кто может обеспечить себе выигрыш?

Решение. Победит первый.

Сначала покажем, как отвоевать одну клетку. Для этого можно играть, например, так. Первым ходом первый игрок кладёт доминошку на клетки a2 и a3. Второй не хочет получить на поле ни доминошку b1-b2, ни доминошку b1-c1, они обе отрезают клетку a1. Клетки b2 и c1 он одновременно не может покрыть, значит, надо закрывать b1, но без немедленного поражения это можно сделать только ходом a1-b1.



Тогда первый отвечает, например, ходом c2-d2, и помешать отрезанию клетки b2 или c1 ходами b3-b4 лии d1-e1 соответственно второй уже не сможет.

Если же второй игрок в какой-то момент делает ход куда-то ещё, вне прямоугольника с углами a1 и e4, первый отрезает клетку, которую уже нельзя покрыть доминошками.

После того, как первый игрок отрезал клетку, второй игрок сделал не более одного хода вне прямоугольника с углами a1 и e4. Далее ход делает второй игрок, итого не более двух ходов вне прямоугольника с углами a1 и e4. Рассмотрим аналогичные прямоугольники для трёх оставшихся углов. Поскольку второй сделал не более двух ходов вне прямоугольника с углами a1 и e4, то есть хотя бы один прямоугольник в котором не было сделано ходов, тогда первый может аналогичным образом провести атаку на ещё один угол.

□

Критерии.

Полное решение — 7 баллов.

Указан первый ход, поставить домино на поля 2b-3b, но стратегия в целом не описана или является неверной — 2 балла.

Описана верная стратегия для игры в одном из углов, но отсутствуют объяснения, почему найдется еще один пустой угол — 5 баллов.

7. Миша придумал два составных числа: a и b. На доску в левый столбец он выписал все собственные натуральные делители числа a, в правый столбец — все собственные натуральные делители числа b. Одинаковых чисел на доске не оказалось. Миша хочет, чтобы число $a + b$ не делилось ни на одну сумму двух чисел из разных столбцов. Докажите, что ему для этого достаточно стереть не более половины чисел из каждого столбца. (Делитель числа называется собственным, если он отличается от 1 и самого числа.)

Решение. Для каждого делителя c числа a есть делитель a/c. Если $c \neq a/c$, то вычекркнем из соответствуещего столбца наименьшее из них. Поскольку из каждой пары вида $c, a/c$ вычеркнуто не более одного числа, то всего вычеркнуто не более половины чисел в столбце. Аналогичную операцию произведем со столбцом числа b.

Предположим теперь, что в левом столбце осталось число c, в правом — число d, и $a + b$ делится на $c + d$. Отметим, что c и d взамино просты, ибо любой их общий делитель, больший 1, изначально оказался бы в обоих столбцах. Положим $x = a/c$, а $y = b/d$. Отметим, что x и y — собственные делители a и b. Таким образом, $a + b = xc + yd$.

Раз $xc + yd$ делится на $c + d$, то $xc + yd - x(c + d)$ тоже делится на $c + d$. Итого $d(y - x) \vdots (c + d)$. Поскольку числа d и $c + d$ взаимно просты, то $(y - x) \vdots (c + d)$, но $|y - x| < y + x \leqslant c + d$, притом $y \neq x$, так как известно, что среди делителей a и b нет равных. Выходит, $a + b$ не может делиться на $c + d$.

□

Критерии.

Полное решение — 7 баллов.