

# Условия и решения очного тура олимпиады ЮМШ

## 8 класс

1. Натуральное число  $n$  имеет не менее шести делителей. Пусть  $1 < a < b$  — три наименьших, а  $c < d < n$  — три наибольших делителя числа  $n$ . Может ли оказаться, что  $b - a > d - c$ ?

**Решение.**

Известно, что  $ad = bc = n$ . Тогда  $b - a = \frac{n}{c} - \frac{n}{d} = \frac{n(d-c)}{cd} < d - c$ , так как  $n < cd$ .

2. Через центр  $O$  окружности, описанной около правильного пятиугольника  $ABCDE$ , проведены прямые, параллельные сторонам  $AB$  и  $BC$ . Их точки пересечения с  $BC$  и  $CD$  обозначим  $F$  и  $G$  соответственно. Чему равно отношение площадей четырехугольника  $OFCG$  и пятиугольника  $ABCDE$ ?

**Решение.**

Проведём через точку  $O$  остальные прямые, параллельные сторонам пятиугольника. Видим, что  $ABCDE$  состоит из пяти четырёхугольников, равных  $OFCG$ .

3. В каждой клетке доски  $70 \times 70$  стоит рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них произнёс: «В моей строке столько же рыцарей, сколько в моём столбце». Может ли на доске оказаться ровно 2021 рыцарь?

**Решение.**

Заметим, что от перестановки строк и столбцов задача не поменяется. Будем считать, что в первых левых  $n$  клетках верхней строчки стоят рыцари, а в остальных — лжецы. Аналогично, будем считать, что в верхних  $n$  клетках первого столбца стоят рыцари (т.к. в левом верхнем углу стоит рыцарь), а остальные лжецы. Тогда в левом верхнем квадрате  $n \times n$  стоят рыцари, а остальные в этих строках и столбцах являются лжецами. Уберём первые  $n$  строк и столбцов и сведём задачу к меньшей доске.

В конце концов мы получим, что доска разбилась на квадраты из рыцарей, так что в каждой строке и в каждом столбце есть клетки ровно одного квадрата. Тогда рыцарей всего  $n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2 = 2021$ , где  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = 70$  (строк без рыцарей не может быть, ибо тогда будет и столбец без рыцарей, но в этом случае стоящий на пересечении лжец будет говорить правду). Но чётность квадрата числа совпадает с чётностью самого числа, и мы приходим к противоречию.

4. В стране каждый город соединён с тремя другими автобусным маршрутом. Изначально все маршруты были государственными. Часть маршрутов передали двум частным компаниям. Теперь, чтобы проехать по любому замкнутому маршруту, требуются услуги обеих частных компаний. Докажите, что найдётся город, из которого не выехать на государственных автобусах.

**Решение.**

Рассмотрим граф: вершины — города, рёбра — маршруты. Пусть городов  $n$ , тогда маршрутов  $3n/2$ . Уберём маршруты первой компании, получим, что в оставшемся графе нет циклов, а значит, в нём не более  $n - 1$  ребра. Значит, у первой компании не менее  $n/2 + 1$  ребро. Аналогично у второй компании не менее  $n/2 + 1$  ребро. Значит, государственных маршрутов не более  $n/2 - 2$ , их концов не более  $n - 4$ , т.е. найдутся города, из которых нельзя выехать на госавтобусах.

5. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_{2021}, b_1, b_2, \dots, b_{2021}$  — попарно различные натуральные числа. Рассмотрим графики функций вида

$$y = \frac{a_i}{x + b_i}$$

(всего 2021 функция). Может ли оказаться, что абсциссы всех точек пересечения этих графиков — целые числа?

**Решение.**

Может. Рассмотрим какие-нибудь функции указанного вида с попарно разными коэффициентами. Найдём абсциссу точки пересечения. Решим уравнение  $\frac{a_i}{x+b_i} = \frac{a_j}{x+b_j}$ , получим  $x = \frac{b_i a_j - a_i b_j}{a_i - a_j}$ . Пусть  $N$  — НОК всех чисел  $a_i - a_j$ . Умножим на  $N$  все коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$ . Тогда все числители абсцисс точек пересечения будут делиться на  $N^2$ , а знаменатели будут равны  $N(a_i - a_j)$ , что является делителем  $N^2$ .

**6.** В треугольнике  $ABC$  отмечены точки  $X$  и  $Y$ , так что лучи  $AX$ ,  $CY$  пересекаются на продолжении отрезков  $AX$  и  $CY$  и перпендикулярны прямым  $BY$  и  $BX$  соответственно. Сумма расстояний от  $X$  и от  $Y$  до прямой  $AC$  меньше высоты  $BH$ . Докажите, что  $AX + CY < AC$ .

**Решение.**

Условие на сумму расстояний можно переформулировать так: середина  $M$  отрезка  $XY$  висит на высоте меньше  $h/2$ , где  $h = BH$ . Это значит, что если мы отметим точку  $N$  такую, что  $XBYN$  — параллелограмм, то  $XN$  и  $YN$  будут пересекать  $AC$ . Если  $XN$  и  $YN$  пересекают  $AC$  в точках  $P$ ,  $Q$ , то (перпендикуляры короче наклонных)  $AX + CY < AP + QY < AC$ .

**7.** На окружности выбрано 100 различных точек. Петр и Екатерина играют в игру. Первым ходом Петр выбирает три треугольника с вершинами в выбранных точках, а дальше каждый по очереди выбирает по одному такому треугольнику. В любой момент у всех выбранных треугольников должна быть общая внутренняя точка, повторять треугольники нельзя. Кто выиграет при правильной игре?

**Решение.**

Заметим, что для любой точки, лежащей внутри стоугольника, образованного выбранными точками, но не на диагоналях, существует четное число треугольников с вершинами в вершинах стоугольника, содержащих данную точку. Действительно будем перемещать такую точку внутри стоугольника. Когда мы пересекаем некоторую диагональ, то покидаем некоторые  $k$  треугольников, имеющих данную диагональ стороной и входим в оставшиеся  $98 - k$  треугольников с данной стороной. Значит при таком пересечении диагонали четность не меняется. Поскольку в ситуации, когда точка находится очень близко к одной из сторон, она находится ровно в 96 таких треугольниках, то при любом положении точки внутри количество содержащих ее треугольников четно.

Значит, Екатерина всегда может сделать ход в игре — перед ее ходом всегда нарисовано нечетное число треугольничков, а значит, любая точка, лежащая в пересечении их внутренностей лежит ещё минимум в одном треугольнике, которым она может походить. А количество ходов, очевидно, конечно. Значит, выиграет Екатерина.