7 класс

1. Министерство Правды заявило, что за январь занятость населения Океании упала на 15% от предыдущего уровня, а безработица выросла на 10% от предыдущего уровня. Какова теперь безработица в Океании, согласно заявлению Министерства? (Занятость — доля трудоспособного населения, имеющего работу, а безработица — не имеющего.)

Решение. Пусть безработица была x процентов, а занятость тогда $100 - x$ процентов. По заявлению из условия эти доли превратились в $1.1 \cdot x$ и $0.85 \cdot (100 - x)$ соответственно, ну и всё ещё дают в сумме 100 процентов. Тогда получаем уравнение:

$$1.1 \cdot x + 0.85 \cdot (100 - x) = 100,$$

решая которое, находим $x = 60$. Значит, теперь безработица 66%. □

Критерии. Задача оценивается в 3 балла.
Правильно составленное уравнение – 1 балл.
Не доведено до ответа, но посчитано то, после чего надо произвести одно действие – 2 балла.
Только ответ – 0 баллов.

2. Сумма факториалов трёх подряд идущих натуральных чисел делится на 61. Докажите, что последнее из чисел никак не меньше, чем 61. (Факториал числа n — это произведение всех чисел от 1 до n включительно.)

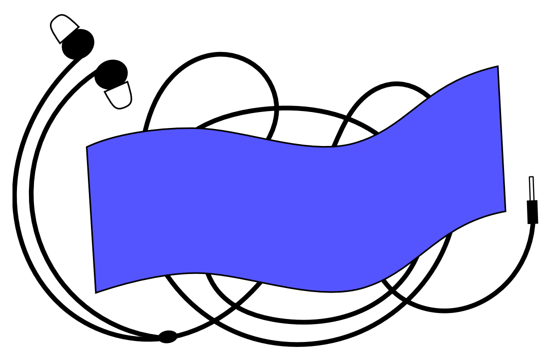
Решение. Пусть последнее из чисел — это k. Тогда сумма факториалов переписывается следующим образом:

$$(k-2)! + (k-1)! + k! = (k-2)! \cdot (1 + (k-1) + (k-1) \cdot k) = (k-2)! \cdot k^2 = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-2) \cdot k^2. \quad (2)$$

Раз 61 простое, то какое-то из чисел $1, 2, \ldots, k-2, k$ делится на 61. Тогда это число никак не меньше 61, ну и k тем более. □

Критерии. Задача оценивается в 4 балла.
Если решение опирается на простоту 61, но это не сказано — не более двух баллов.
Раскрыты скобочки – 0 баллов.

3. Таня запутала провод от наушников и сфотографировала узел, поверх которого положила атласную ленту (см. рисунок). Сколько существует вариантов соединения концов провода под лентой?



Решение. Из-под ленты торчит 5 отрезков провода (кроме концов с динамиками и штекером). Эти отрезки могут располагаться в любом порядке: это может быть реализовано 5! способами. Кроме того, каждый отрезок может быть ориентирован двумя способами (каждый из его концов может быть ближе к штекеру, а может — к динамикам), то есть ответ надо ещё 5 раз умножить на 2. Получаем $5! \cdot 2^5 = 3840$.

Критерии. Задача оценивается в 4 балла.
При недостаточно подробном пояснении — до -2 баллов

4. У курфюрста Георга 100 монет, некоторые из них фальшивые (возможно, все или ни одной). Георг может показывать от 10 до 20 монет эксперту, и тот будет говорить, сколько из них фальшивых. Проблема в том, что единственный на всю округу эксперт — барон Мюнхгаузен, а он привирает: результат, названный бароном, всегда больше истинного на некоторое фиксированное (и неизвестное Георгу) натуральное число. Барона не смущает, что он может сказать, например, «тринадцать», если ему дали всего двенадцать монет. Сможет ли Георг гарантированно выяснить, какие монеты фальшивые, обратившись к эксперту меньше 120 раз?

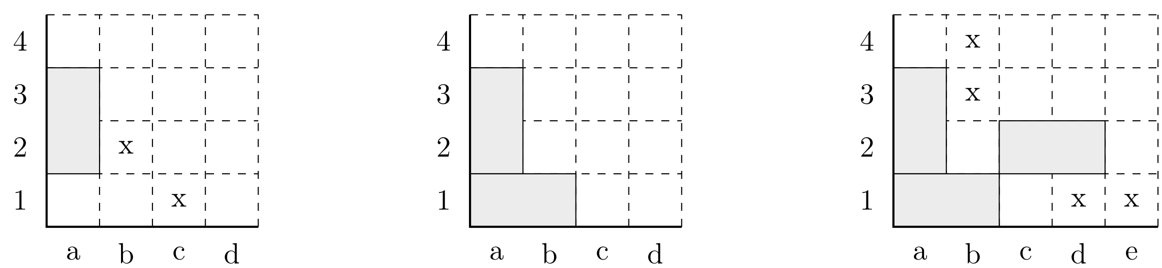
Решение. Сможет. Отдадим на экспертизу случайные X монет, а потом те же самые X и 1 другую. Если барон оба раза скажет два одинаковых числа, значит добавленная монета — настоящая, иначе она фальшивая.

Таким образом, можно разбить монеты на группы из 10, и каждую группу проверять на фальшивость за 11 обращений: сначала отдавать 10 других монет, а затем добавлять по одной монете из проверяемой группы. Всего обращений будет $11 \cdot 10 = 110 < 120$. $\square$

Критерии. Задача оценивается в 5 баллов.
Только ответ – 0 баллов.
Пояснено, как найти «погрешность» – 1 балл
Идея про добавление монетки к прошлому вопросу – 2 балла.
Указан верный алгоритм, но не показано, что действий меньше 120 – 4 балла.

5. Двое по очереди ставят на доску 2020×2020 неперекрывающиеся домино, закрывающие по две клетки. Задача второго — покрыть домино всю доску, задача первого — помешать ему. Кто может обеспечить себе выигрыш?

Решение. Победит первый. Для этого он может играть, например, так. Первым ходом он кладёт доминошку на клетки a2 и a3. Второй не хочет получить на поле ни доминошку b1-b2, ни доминошку b1-c1, они обе отрезают клетку a1. Клетки b2 и c1 он одновременно не может покрыть, значит, надо закрывать b1, но без немедленного поражения это можно сделать только ходом a1-b1.



Тогда первый отвечает, например, ходом c2-d2, и помешать отрезанию клетки b2 или c1 ходами b3-b4 лии d1-e1 соответственно второй уже не сможет. $\square$

Критерии. Задача оценивается в 6 баллов.
Первый ход b2-b3 – 2 балла.
Решение верное, но не хватает разбора случаев — снимать до двух баллов.
За любой первый ход 2 балла (все решения ценны, если дети плохо придумали второй шаг, они не могли понять, что другое решение лучше)

6. В Лимонном царстве 2020 деревень. Некоторые пары деревень соединены напрямик мощёными дорогами. Сеть дорог устроена так, что для любых двух деревень есть ровно один способ переместиться из одной в другую, не проезжая дважды по одной дороге. Агент Апельсин хочет облететь как можно больше деревень на вертолёте. В целях конспирации он не будет посещать одну деревню дважды, и не будет посещать подряд деревни, соединенные дорогой напрямик. Сколько деревень ему гарантированно удастся облететь? Начать он может из любой деревни.

Решение. Все деревни облететь не удастся, если некоторая деревня соединена дорогами со всеми остальными (а других дорог и нет).

Зато можно облететь все деревни, кроме одной. Составим план полёта: первую деревню выберем случайно, а каждую следующую — случайным образом из тех, в которые можно вылететь из предыдущей по правилам. В какой-то момент нельзя будет добавить очередную деревню. Значит, среди оставшихся деревень (если они есть) только соединённые дорогой с последней из добавленных. Теперь если их больше одной, выкинем из плана последнюю деревню и добавим оставшиеся. Они не соединены дорогами друг с другом, так как иначе между соединёнными деревнями было бы два пути: напрямик и через выкинутую деревню. Кроме того, более одной деревни не может быть соединено дорогой с деревней, предшествующей выкинутой (в противном случае между выкинутой и предшествующей ей было бы два пути). Значит, если их хотя бы две, их можно поставить в план облёта согласно правилам. Теперь осталось облететь деревни по плану. $\square$

Критерии. Задача оценивается в 7 баллов.
Доказано, что все облететь нельзя — 2 балла.
Показано, как облететь все, кроме одной — 4 баллов.

Не хватает пояснений обхода, но решение верное — до -3 баллов.

7. Миша придумал два составных числа: a и b. На доску в левый столбец он выписал все собственные натуральные делители числа a, в правый столбец — все собственные натуральные делители числа b. Одинаковых чисел на доске не оказалось. Миша хочет, чтобы число $a+b$ не делилось ни на одну сумму двух чисел из разных столбцов. Докажите, что ему для этого достаточно стереть не более половины чисел из каждого столбца. (Делитель числа называется собственным, если он отличается от 1 и самого числа.)

Решение. Для каждого делителя c числа a есть делитель a/c. Если $c \neq a/c$, то вычекркнем из соответствуещего столбца наименьшее из них. Поскольку из каждой пары вида $c, a/c$ вычеркнуто не более одного числа, то всего вычеркнуто не более половины чисел в столбце. Аналогичную операцию произведем со столбцом числа b.

Предположим теперь, что в левом столбце осталось число c, в правом — число d, и $a+b$ делится на $c+d$. Отметим, что c и d взамино просты, ибо любой их общий делитель, больший 1, изначально оказался бы в обоих столбцах. Положим $x = a/c$, а $y = b/d$. Отметим, что x и y — собственные делители a и b. Таким образом, $a+b = xc+yd$.

Раз $xc+yd$ делится на $c+d$, то $xc+yd-x(c+d)$ тоже делится на $c+d$. Итого $d(y-x) \vdots (c+d)$. Поскольку числа d и $c+d$ взаимно просты, то $(y-x) \vdots (c+d)$, но $|y-x| < y+x \leqslant c+d$, притом $y \neq x$, так как известно, что среди делителей a и b нет равных. Выходит, $a+b$ не может делиться на $c+d$.

□

Критерии. Задача оценивается в 9 баллов.
Идея отсеять все маленькие делители — 3 балла.