

Условия и решения очного тура олимпиады ЮМШ

7 класс

1. Сумма квадратов 116 натуральных чисел равна 144. Докажите, что произведение этих чисел тоже равно 144.

Решение.

Сначала сделаем все числа равными 1. Заметим, что для того, чтобы сумма квадратов равнялась 144, нужно заменить некоторые единицы на бОльшие числа. Это приводит нас к необходимости набрать +28 с помощью +3, +8, +15 и +24. Небольшой перебор вариантов приводит нас к тому, что это делается только с помощью четырех +3 и двух +8, что дает нам в итоге две девятки и четыре четверки — как раз 144 в произведении.

2. Круг разбит на 1000 секторов, все сектора белые. Каждую минуту какие-то 500 подряд секторов перекрашивают — белые в красные, а красные — в белые. При некотором перекрашивании количество белых секторов не поменялось. Докажите, что при одном из соседних (предыдущем или последующем) — тоже.

Решение.

Рассмотрим любую пару диаметрально противоположных секторов. На каждом ходу перекрашивается ровно один сектор из этой пары, так что после каждого нечетного перекрашивания они разного цвета, а после каждого чётного — одинакового цвета. В частности, после каждого нечетного хода в каждой такой паре есть ровно один белый сектор, т.е. всего 500 белых.

Поэтому если перекрашивание с нечетным номером сохранило количество белых, то это количество равно 500, а значит, его не поменял и предыдущий ход, перед которым тоже было 500. Аналогично, если перекрашивание с четным номером сохранило количество белых, то это количество — 500 и следующее перекрашивание его тоже сохранит.

3. Напоминаем, что сумма углов треугольника равняется 180 градусам. В треугольнике ABC угол A прямой. Пусть BM — медиана треугольника, D — середина BM . Оказалось, что $\angle ABD = \angle ACD$. А чему равны эти углы?

Решение.

Проведем AD . Так как треугольник ABM — прямоугольный, его медиана AD равняется половине гипотенузы BM . Значит, $\angle ABD = \angle BAD = \alpha$, а $\angle ADM$ равняется 2α , как внешний угол треугольника ABD . Но тогда, т.к. $DM = AD$, $\angle DAM = \angle DMA = 90^\circ - \alpha$. Значит, треугольник ADC — прямоугольный, т.к. $\angle ACD + \angle DAC = 90^\circ$. Но тогда, т.к. DM — медиана прямоугольного треугольника ADC , она равна половине гипотенузы. Ранее мы установили, что она же равна одному из катетов этого треугольника (AD). Значит, ACD , лежащий напротив этого катета равняется 30 градусам.

4. У Джо есть по 99 монет трех видов: легкие массой 1 грамм, средние массой 2 грамма и тяжелые массой 3 грамма. Каждый тип монет хранится в ящике, на котором имеется наклейка с надписью, соответственно, ЛЕГКИЕ, СРЕДНИЕ и ТЯЖЕЛЫЕ. Однажды ночью Эми переклеила наклейки так, что теперь надпись ни на одном из ящиков не соответствует его содержимому. Покажите, как, имея эту информацию, выложить на чашки весов все монеты так, чтобы гарантированно получить равновесие.

Решение.

Надо на каждой чаше получать $99 \cdot 3$ граммов. Пусть на левую чашу ляжет a ЛЕГКИХ монет, b СРЕДНИХ и c ТЯЖЕЛЫХ. Тогда

$$\begin{aligned}2a + 3b + c &= 3a + b + 2c = 297, \\2(99 - a) + 3(99 - b) + (99 - c) &= 3(99 - a) + (99 - b) + 2(99 - c) = 297.\end{aligned}$$

Подойдет любое решение этой системы, например, $a = 82$, $b = 43$, $c = 4$.

5. Найдите все натуральные числа, чьи собственные делители можно разбить на пары так, чтобы в каждой паре числа отличались на 545. Собственным делителем натурального числа называется натуральный делитель, отличный от единицы и самого числа.

Решение.

Пусть n — это такое число. В каждой паре делители разной четности, то есть есть чётные, то есть есть делитель 2. Тогда есть делитель 547. С другой стороны, если d — наибольший собственный делитель, то есть $n/2$, то $d - 545$ не превосходит $n/3$. Получаем, что

$$\frac{n}{2} - 545 \leq \frac{n}{3} \iff \frac{n}{6} \leq 545 \iff n \leq 6 \cdot 545.$$

Таким образом n — чётное число, кратное $2 \cdot 547$ и не превышающее $6 \cdot 545$. Единственные кандидаты — это $2 \cdot 547$ и $4 \cdot 547$. Первый вариант подходит в виду простоты числа 547, второй, очевидно, не подходит.

6. Докажите, что на доске 533×533 , раскрашенной в шахматном порядке, найдутся одноцветные клетки А и В со следующим свойством: «количество способов разбить доску без клетки В на доминошки не равно количеству способов разбить на доминошки доску без клетки А». Способы, отличающиеся поворотом и переворотом — разные способы.

Решение.

Введем нотацию, аналогичную шахматной. Заметим, что можно удалить как $a1$, так и $b2$. Тогда в разрезании без $b2$ доминошку, закрывающую $a1$, можно повернуть, чтобы она закрывала теперь $b2$. Таким образом, очевидно, различным разрезаниям без $b2$ сопоставляются различные разрезания без $a1$, поэтому последних не меньше. С другой стороны, доску без $a1$, очевидно, можно разрезать так, чтобы там были доминошки $a2a3$ и $b1c1$. Это разрезание не получается нашим преобразованием из разрезания без $b2$. Поэтому разрезаний без $a1$ строго больше, чем разрезаний без $b2$.

7. На окружности выбрано 100 различных точек. Петр и Екатерина играют в игру. Первым ходом Петр выбирает три треугольника с вершинами в выбранных точках, а дальше каждый по очереди выбирает по одному такому треугольнику. В любой момент у всех выбранных треугольников должна быть общая внутренняя точка, повторять треугольники нельзя. Кто выиграет при правильной игре?

Решение.

Заметим, что для любой точки, лежащей внутри стоугольника, образованного выбранными точками, но не на диагоналях, существует четное число треугольников с вершинами в вершинах стоугольника, содержащих данную точку. Действительно будем перемещать такую точку внутри стоугольника. Когда мы пересекаем некоторую диагональ, то покидаем некоторые k треугольников, имеющих данную диагональ стороной и входим в оставшиеся $98 - k$ треугольников с данной стороной. Значит при таком пересечении диагонали четность не меняется. Поскольку в ситуации, когда точка находится очень близко к одной из сторон, она находится ровно в 96 таких треугольниках, то при любом положении точки внутри количество содержащих ее треугольников четно.

Значит, Екатерина всегда может сделать ход в игре — перед ее ходом всегда нарисовано нечетное число треугольничков, а значит, любая точка, лежащая в пересечении их внутренностей лежит ещё минимум в одном треугольнике, которым она может походить. А количество ходов, очевидно, конечно. Значит, выиграет Екатерина.