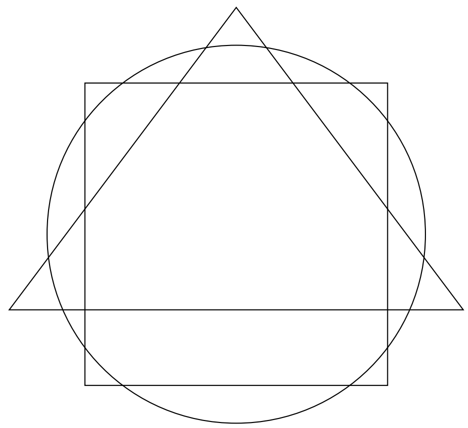
6 класс

1. Нарисуйте на листе бумаги окружность, квадрат и треугольник так, чтобы после разрезов по нарисованным линиям лист распался на 22 части.

Решение.



Квадрат разрезан на 8 частей, сверху, справа и слева от квадрата по 4 части, снизу одна и ещё одна большая часть вокруг — всего 22. Возможны другие варианты расположения фигур. ☐

Критерии. Приведён правильный пример (возможно отличающийся от указанного) — 2 балла. Во всех остальных случаях — 0 баллов.

2. У курфюрста Георга 100 монет, некоторые из них фальшивые (возможно, все или ни одной). Георг может показывать от 10 до 20 монет эксперту, и тот будет говорить, сколько из них фальшивых. Проблема в том, что единственный на всю округу эксперт — барон Мюнхгаузен, а он привирает: результат, названный бароном, всегда больше истинного на некоторое фиксированное (и неизвестное Георгу) натуральное число. Барона не смущает, что он может сказать, например, «тринадцать», если ему дали всего двенадцать монет. Сможет ли Георг гарантированно выяснить, какие монеты фальшивые?

Решение. Сможет. Отдадим на экспертизу случайные 10 монет, а потом те же самые 10 и одну другую. Если барон оба раза скажет два одинаковых числа, значит добавленная монета — настоящая, иначе она фальшивая. Таким образом за два вопроса мы можем проверить на фальшивость любую монету. ☐

Критерии. Полное решение — 4 балла. За арифметическую ошибку снимается 1 балл. За решение с игнорированием органичения от 10 до 20 монет максимум 3 балла.

3. Упрямый робот «Инвертор» стоит на бесконечной плоскости и смотрит на восток. Этот робот понимает всего две команды: `ШАГ` и `НАЛЕВО`. Когда робот видит команду `ШАГ`, он передвигается вперёд ровно на 1 метр. Когда робот видит команду `НАЛЕВО`, он, оставаясь на месте, поворачивается налево ровно на 90°. Робот называется упрямым потому, что когда в него вводят программу (последовательность команд), то он сначала выполняет всю программу, а затем выполняет эту же программу, инвертируя смысл команд: видя команду `ШАГ`, он выполняет команду `НАЛЕВО` и наоборот. Используя команду `ШАГ` **ровно два** раза и команду `НАЛЕВО` сколько угодно раз, составьте для этого робота такую программу, чтобы после её упрямого выполнения он вернулся в исходную точку и смотрел на восток.

Решение. Пример программы для упрямого робота: `ННННШШНН`. Есть и много других примеров. ☐

Критерии. Приведён правильный алгоритм — 4 балла. Во всех остальных случаях — 0 баллов.

4. Каждый из пяти друзей перемножил несколько последовательных чисел, начиная с 1. Оказалось, что одно из произведений равно сумме четырёх других. Найдите все возможные значения этого произведения и покажите, что других значений нет.

Решение. Произведение всех последовательных чисел с 1 и до x, называется факториалом числа x и обозначается $x!$. Таким образом, нам нужно решить уравнение $x! = a!+b!+c!+d!$. Пусть числа a, b, c, d упорядочены по возрастанию. Тогда $x > d$, т.е. $x! \geqslant x \cdot d!$. Но мы знаем, что $x! \leqslant 4d!$, потому что $a! \leqslant d!$, $b! \leqslant d!$ и $c! \leqslant d!$. Отсюда $x \leqslant 4$.

Если $x = 4$, то подходят значения $a = b = c = d = 3$ (и это единственное решение).

Если $x = 3$, то единственный вариант — $3! = 1! + 1! + 2! + 2!$. Этот вариант не подходит, потому что каждый перемножал несколько (т. е. более одного) чисел.

Ясно, что $x \leqslant 2$ быть не может.

Таким образом, единственный ответ — 24. □

Критерии. Полное решение — 5 баллов.

2 балла — доказательство оценки $x \leqslant 4$;

1 балл — разбор случая $x = 4$;

1 балл — разбор случая $x = 3$;

1 балл — разбор случая $x = 1, 2$;

Вышеперечисленные баллы суммируются.

1 балл — Правильный ответ без какого-либо решения.

5. За круглым столом сидят 8 гномов, у каждого из которых есть по три алмаза. Каждую минуту гномы одновременно делают следующее: делят все свои алмазы на две кучки (возможно, одна из кучек или обе кучки пустые), затем одну кучку отдают левому соседу, а другую — правому. В некоторый момент все алмазы собрались у трёх гномов. У одного из них семь алмазов. Сколько у двух других?

Решение. Пронумеруем гномов по порядку. Заметим, что гномы с чётными номерами всегда делятся с гномами с нечётными номерами, и наоборот. Поскольку все дележи происходят одновременно, то все алмазы гномов с чётным номерами перейдут к гномам с нечётными номерами и наоборот. То есть у гномов с чётными номерами суммарно всегда будет 12 алмазов, и у гномов с нечётными — тоже. Значит, у гнома с 7 алмазами есть напарник с таким же по чётности номером и у него будет 5 алмазов. Тогда у оставшегося третьего может быть только 12 алмазов. □

Критерии. Полное решение — 6 баллов.

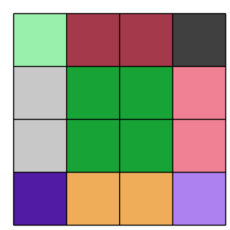
Из них:

Доказательство того, что у чётных гномов (и у нечётных) суммарно всегда будет 12 алмазов — 3 балла.

Доказательство того, что найдётся гном с 5 алмазами — 1 балл.

Доказательство того, что найдётся гном с 12 алмазами — 1 балл.

6. В квадрате 4×4 клетки раскрашены в несколько цветов так, что в любом прямоугольничке 1×3 есть две клетки одного цвета. Какое максимальное количество цветов может быть использовано?



Решение. Максимум 9 цветов. Пример см. на картинке. Докажем, что больше нельзя. Любой ряд (строка или столбец) дает максимум три цвета, значит, первая строка + первый столбец дадут максимум $3 + 3 - 1 = 5$ цветов.

Докажем, что оставшийся квадрат 3×3 даст максимум 4 цвета. Действительно, допустим, мы использовали в нём 5 цветов. Так как в одной строке не более двух различных цветов, то найдутся две строки, в которых использовано 4 разных цвета по 2 цвета в каждой строке. Тогда в оставшейся строке будет хотя бы одна клетка пятого цвета. В столбике, содержащем эту клетку, все клетки будут разного цвета. Противоречие.

Итого на всей доске не более $4 + 5 = 9$ различных цветов. □

Критерии. Полное решение (есть оценка и есть пример) — 7 баллов.

Из них:

Есть пример для 9 цветов — 2 балла.

Полное доказательство оценки — 5 баллов, из них: 2 балла за одну строку + один столбец и 3 балла за доказательство того, что квадрат 3×3 даст максимум 4 цвета.

7. В ряд стоят 50 мальчиков и 50 девочек в каком-то порядке. В этом ряду имеется ровно одна группа из 30 детей, стоящих подряд, в которой мальчиков и девочек поровну. Докажите, что найдётся группа из 70 детей подряд, в которой мальчиков и девочек также поровну.

Решение. Зациклим детей в круг. Посмотрим теперь на все возможные группы из 30 подряд стоящих детей (будем называть такие группы *отрядами*). Достаточно доказать, что хотя бы в двух из них поровну мальчиков и девочек. Действительно, тогда при размыкании цикла обратно один из этих двух отрядов по условию должен разорваться, значит, между частями, на которые такой отряд разорвался, в ряду стоит 70 детей, среди которых девочек и мальчиков поровну.

Теперь покажем, что в цикле есть хотя бы два отряда, среди которых поровну мальчиков и девочек. Из условия ясно, что есть отряд, где девочек и мальчиков не поровну. Причём найдётся как отряд, где больше мальчиков (то есть мальчиков больше 15), так и отряд, где больше девочек (то есть мальчиков меньше 15). Действительно, если, скажем, в каждом отряде мальчиков не больше, чем девочек, то при сложении количества мальчиков и девочек во всех отрядах, получится, что тогда утридцатиренное число мальчиков меньше, чем утридцатиренное число девочек, что противоречит условию (каждый из детей посчитан входит ровно в 30 отрядов, то есть посчитан ровно 30 раз).

Заметим теперь, что при переходе от отряда к соседнему с ним количество мальчиков либо не меняется, либо меняется на 1. Тогда если мы будем смещаться от отряда, где мальчиков больше 15, к отряду, где мальчиков меньше 15, что по часовой стрелке, что против часовой стрелки, нам каждый раз обязательно встретится отряд, где мальчиков ровно 15, то есть мальчиков и девочек поровну. □

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Из них:

Озвучена идея замкнуть детей в круг — 1 балл.

Доказано, что если в круге найдётся второй отряд с равным числом мальчиков и девочек, то один из отрядов разомкнётся и даст 70 детей с равным числом мальчиков и девочек — 2 балла.

Доказано, что найдётся второй отряд с равным числом мальчиков и девочек — 3 балла.