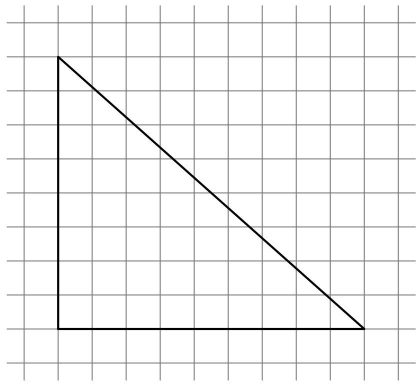
Условия и решения очного тура олимпиады ЮМШ
6 класс

1. По берегу круглого острова расположено 5 хижин: А, Б, В, Г, Д (в таком порядке). Кратчайшие расстояния по берегу между некоторыми из них таковы: между А и В — 16 км, между Б и Г — 18 км, между В и Д — 22 км, между Г и А — 23 км, между Д и Б — 18 км. Приведите пример, когда расстояния между соседними хижинами выражаются целым числом километров.

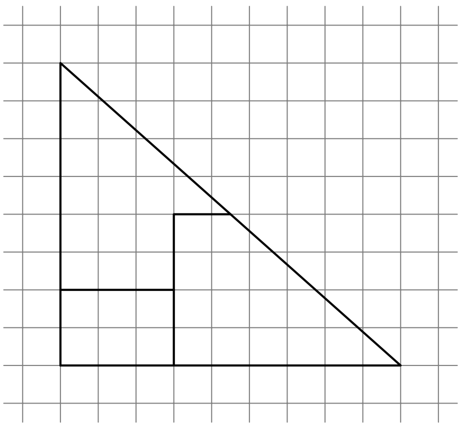
Решение. Есть всего два примера:

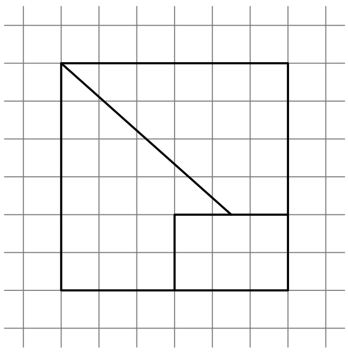
	АБ	БВ	ВГ	ГД	ДА
I	5 км	11 км	7 км	15 км	13 км
II	12 км	4 км	14 км	17 км	6 км

2. Разрежьте данный на картинке справа треугольник по линиям сетки на 3 части и сложите из них квадрат.



Решение.





3. Индийский инженер задумал натуральное число, выписал все его собственные натуральные делители, а потом каждое из выписанных чисел увеличил на 1. Так вышло, что новые числа — это все собственные делители некоторого другого натурального числа. Какое число мог задумать инженер? Приведите все варианты и докажите, что других нет. Напомним, что делитель называется собственным, если он не равен 1 и не совпадает с делимым числом.

Решение. Пусть исходное число — это n, а «некоторое другое число» — m. Число m нечётно, потому что у чётного есть делитель 2, он не мог получиться. Значит, все его делители нечётны. Значит, все делители n чётны. То есть n — степень двойки.

$n = 4$ и $n = 8$ подходят, им соответствуют $m = 9$ и $m = 15$. А дальше ничего не подходит: делители 2, 4, 8 превращаются в 3, 5, 9, значит, у m есть собственный делитель 15, но у n делителя 14 не может быть.

4. Число 100 представили в виде суммы нескольких двузначных чисел и в каждом слагаемом поменяли цифры местами. Какое наибольшее число могло получиться в новой сумме?

Решение. Если в двузначном числе $\overline{ba}$ поменять местами цифры, то оно увеличится на $9(a-b)$. Поэтому новая сумма равна $S = 100 + 9U - 9D$, где D — сумма цифр десятков, а U — сумма цифр единиц в исходных слагаемых. Так как $10\,D + U = 100$, то $S = 1000 - 99\,D$. Значит, надо минимизировать D — сумму цифр десятков. Она может быть равна 6, например $100 = 19 \cdot 4 + 24$, но не меньше. Предположим, что $D < 6$, тогда самих чисел не больше 5. Значит, U не больше

$5 \cdot 9 = 45$, а сумма чисел до перестановки цифр не превосходит $10 \cdot 5 + 45 = 95 < 100$. Противоречие. Следовательно, минимально возможное D равно 6, а максимальная сумма равна $1000 - 99 \cdot 6 = 406$.

5. У Васи есть набор квадратиков и треугольников. Из этого набора, используя все фигурки, Вася может выложить многогранник, в котором эти фигурки будут гранями. Петя подменил два треугольника на два квадрата. Приведите пример, когда из нового набора Вася всё равно сможет сложить многогранник, используя все фигурки как грани.

Решение. Вася может взять один квадрат и 4 равносторонних треугольника со сторонами, равными стороне квадрата. Из этого набора можно сложить четырехугольную пирамиду. Если заменить два треугольника на два квадрата с той же стороной, то из нового набора можно сложить призму.

6. Дана строка из 2021 букв А и Б. Рассмотрим самую длинную подстроку-палиндром. Какова её минимально возможная длина? Палиндромом называется строка, которая читается одинаково справа-налево и слева-направо.

Решение. Минимально возможная длина максимального палиндрома равна 4.

Докажем, что меньше 4 она быть не может. Рассмотрим 5 букв в центре строки. Если это чередующиеся буквы, то это палиндром длины 5. Пусть среди этих пяти букв есть две одинаковые буквы, стоящие подряд. Возьмем максимальный по включению блок из одинаковых букв. Он длины хотя бы 2, еще по краям по противоположной букве, получилось 4 (если по краям других букв нет, то значит мы уперлись в край строки и одинаковых букв подряд очень много, так как мы начали с центра строки).

Приведём пример строки, в которой максимальный палиндром имеет длину 4. Это строка, в которой периодически повторяется набор АБААББ: АБААББАБААББАБААББ. . . . Перебором возможных положений центров палиндромов можно убедиться, что в этой строке нет палиндромов длиннее 4. В силу периодичности строки придется проверить небольшое количество вариантов.

Комментарии. Указанный пример единственный с точностью до сдвига и отражения.

7. За круглым столом сидят 99 гномов. Хоббит Бильбо знает всех гномов, но не видит, как они сидят. У него завязаны глаза. Бильбо может назвать имена двух любых гномов, и все гномы хором ответят, сколько гномов сидит между этими гномами (по кратчайшей дуге). Сможет ли Бильбо узнать хотя бы одну пару сидящих рядом гномов, задав не более 50 вопросов?

Решение. Бильбо задаёт первые 49 вопросов про некоторого гнома A и произвольные 49 остальных гномов. Если хотя бы на один из вопросов он получает ответ «0», его цель достигнута. Иначе он получает ответы от 1 до 48 (причем каждый ответ может быть получен не более двух раз). Пусть каждый раз после получения ответа Бильбо зачёркивает клетку в таблице 2×48 — верхнюю клетку соответствующего столбца, если такой ответ получен впервые, и нижнюю, если он получен второй раз. Тогда после 49 вопросов в каком-то квадрате 2×2 окажутся зачёркнутыми хотя бы три клетки, так как таблица состоит из 24 таких квадратов, а вопросов задано больше, чем $2 \cdot 24 = 48$. Это значит, что Бильбо знает трёх гномов, которые сидят в вершинах некоторой «трапеции». Эти вершины находятся от A на расстоянии N или $N + 1$. Спросив 50-ым вопросом расстояние между парой гномов с разными расстояниями от A, Бильбо узнает, являются ли они соседними. Если нет, то одна из них является соседней с третьей из вершин этой трапеции.