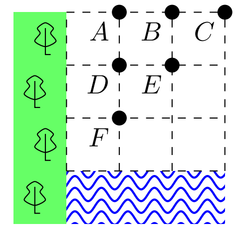
5 класс

1. В отмеченных точках (см. рисунок) находятся 6 нор. В четырёх норах живут хоббиты: Фродо, Сэм, Мерри и Пиппин. Ещё две норы пустуют, и обе расположены к норе Сэма ближе, чем нора Фродо. А нора Фродо находится ближе к реке, чем нора Мерри, но дальше от лесополосы, чем нора Пиппина. Кто где живёт? Ответ обоснуйте.



Решение. Пусть A, B, C, D, E, F — норы, отмеченные в порядке «слева направо и сверху вниз». Нора Фродо может быть — D, E, F из условия, что она ближе к реке, чем нора Мерри, и — B, C, E из условия, что дальше от леса, чем нора Пиппина. Значит Фродо живёт в норе E. Сэм тогда может жить в — A, B или D, C или F. Но B или D, C или F отпадает, поскольку будет нарушаться условия с пустыми норами. Значит Сэм живёт в A , Пиппин — в F и Мэри — в C. □

Критерии. Полное решение — 3 балла.
1 балл — верно определена нора Фродо.
2 балла — верный ответ.

2. 31 машина одновременно стартовала из одной точки на круговой трассе: первая машина — со скоростью 61 км/ч, вторая — 62 км/ч, и т. д. (31-я — 91 км/ч). Трасса узкая, и если одна машина на круг обгоняет другую, то они врезаются друг в друга, обе вылетают с трассы и выбывают из гонки. В конце концов осталась одна машина. С какой скоростью она едет?

Решение. Сперва самая быстрая машина врезается в самую медленную, потом — вторая по скорости врезается в предпоследнюю, и т. д. В итоге останется средняя по скорости машина, т. е. 16-я. Она едет со скоростью 76 км/ч. □

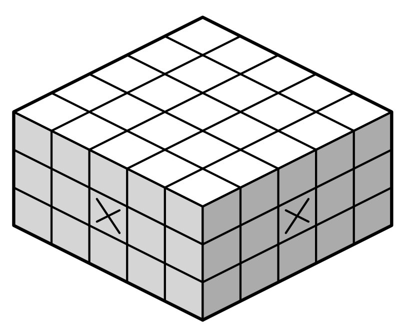
Критерии. Полное решение — 3 балла.
1 балл если написан только ответ 76.
За правильные размышления, но ответ 75 или 77 снимается 1 балл.

3. У курфюрста Георга 100 монет, некоторые из них фальшивые (возможно, все или ни одной). Георг может показывать от 10 до 20 монет эксперту, и тот будет говорить, сколько из них фальшивых. Проблема в том, что единственный на всю округу эксперт — барон Мюнхгаузен, а он привирает: результат, названный бароном, всегда больше истинного на некоторое фиксированное (и неизвестное Георгу) натуральное число. Барона не смущает, что он может сказать, например, «тринадцать», если ему дали всего двенадцать монет. Сможет ли Георг гарантированно выяснить, какие монеты фальшивые?

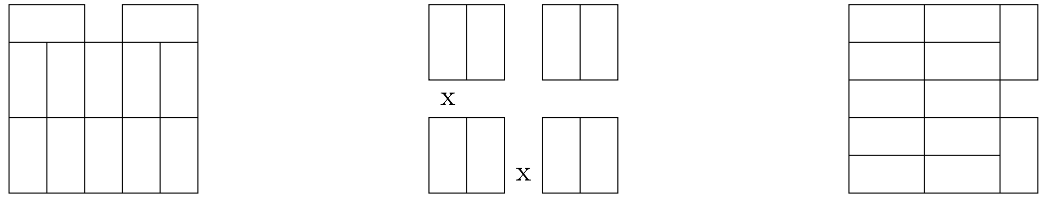
Решение. Сможет. Отдадим на экспертизу случайные 10 монет, а потом те же самые 10 и 1 другую. Если барон оба раза скажет два одинаковых числа, значит добавленная монета — настоящая, иначе она фальшивая. Таким образом за два вопроса мы можем проверить на фальшивость любую монету. □

Критерии. Полное решение — 4 балла.
За арифметическую ошибку снимается 1 балл. За решение, с игнорированием органичения 10 — 20 монет — максимум 3 балла

4. Исаак де Казобон хочет удалить из параллелепипеда $5 \times 5 \times 3$ несколько кубиков так, чтобы появилась пещера, выходящая на поверхность только в двух местах: центрах соседних боковых граней (на рисунке они отмечены крестиками). Как это сделать так, чтобы оставшуюся часть параллелепипеда можно было бы сложить из параллелепипедов $1 \times 1 \times 2$?



Решение. Вырежем из каждого слоя горизонтальные параллелепипеды, как показано на рисунке. После этого заткнём вертикальными параллелепипедами дырки в 1 и 3 слоях. В центре как раз останется нужная пещера.



слой 1 слой 2 слой 3

□

Критерии. Полное решение — 4 балла.

5. Каждый из пяти друзей перемножил несколько последовательных чисел, начиная с 1. Оказалось, что одно из произведений равно сумме четырёх других. Найдите все возможные значения этого произведения и покажите, что других значений нет.

Решение. Назовём Васей того из друзей, чьё произведение равно сумме остальных. Ясно, что Вася перемножал больше чисел, чем остальные. Если бы он перемножил хотя бы 5 чисел, его произведение оказалось хотя бы в 5 раз больше, чем произведение любого из оставшихся друзей. Но его произведение — сумма произведений друзей, которых четверо. Значит, в 5 раз (тем боле в 6, 7 и т. д.) больше оно быть не может. Выходит, Вася перемножил не более 4 чисел. У каждого из Васиных друзей произведение хотя бы 1, значит, у Васи хотя бы 4. Выходит, одно или два числа Вася не мог перемножить, а для трёх и четырёх есть примеры:

$$1+1+1\cdot 2+1\cdot 2=1\cdot 2\cdot 3, \qquad 1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4. \tag{1}$$

□

Критерии. Полное решение — 5 баллов.
2 балла — доказательство того, что Вася перемножил не более 4 чисел;
1 балл — разбор случая, когда Вася перемножил 4 числа;
1 балл — разбор случая, когда Вася перемножил 3 числа;
1 балл — разбор случая, когда Вася перемножил меньше 3 чисел;
Вышеперечисленные баллы суммируются.

6. За круглым столом сидят 8 гномов, у каждого из которых есть по три алмаза. Стулья гномов пронумерованы по порядку от 1 до 8. Каждую минуту гномы одновременно делают следующее: делят все свои алмазы на две кучки (возможно, одна из кучек или обе кучки пустые), затем одну кучку отдают левому соседу, а другую — правому. В некоторый момент все алмазы собрались у трёх гномов. У одного из гномов оказалось 7 алмазов. Сколько у каждого из других?

Решение. Заметим, что гномы с чётными номерами всегда делятся с гномами с нечётными номерами, и наоборот. Поскольку все дележи происходят одновременно, то все алмазы гномов с чётным номерами перейдут к гномам с нечётными номерами и наоборот. То есть у гномов с чётными номерами суммарно всегда будет 12 алмазов, и у гномов с нечётными — тоже. Значит, у гнома с 7 алмазами есть напарник с таким же по чётности номером и у него будет 5 алмазов. Тогда у оставшегося третьего может быть только 12 алмазов. □

Критерии. Полное решение — 6 баллов.
1 балл — просто верный ответ;
2 балла — решение примером.

7. Можно ли в равенстве БАРАНКА + БАРАБАН + КАРАБАС = ПАРАЗИТ заменить все буквы цифрами (одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы разными цифрами), чтобы оно было верным?

Решение. Заметим, что $3\cdot \text{АРА}+x=\text{АРА}+1000\cdot y$, где x и y — возможные значения переходов разрядов, каждое от 0 до 2. Если же упростить это выражение, то получается, что $2*(\text{АРА})+x$ делится на 1000. Посмотрим на возможные значения x:

- при $x=0$ выходит, что АРА = 500 или 0;
- при $x=1$ решений нет в силу чётности;

- при $x = 2$ выходит, что АРА $= 499$ или 999.

Но так как А и Р разные цифры, решений у этого ребуса не будет. □

Критерии. Полное решение — 7 баллов.
1 балл — рассмотрены только значения 0 и 5 для A и P (то есть без учёта перехода через разряд).