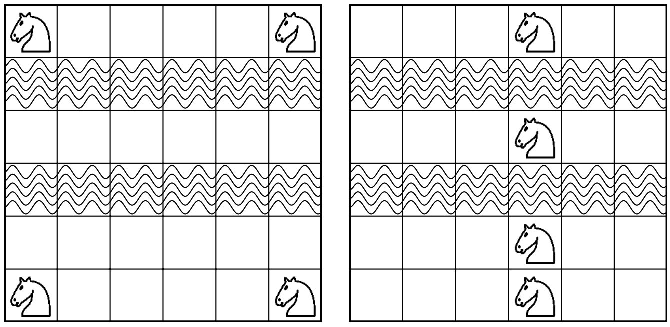
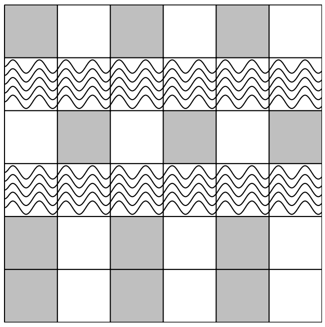
Условия и решения очного тура олимпиады ЮМШ
5 класс

1. Шахматные кони стоят на доске, как показано на левой из картинок. Могут ли кони перейти в позиции, указанные на правой из картинок, если запрещено наступать в клетки с водой (которые заштрихованы волнистыми линиями)?



Решение. Покрасим в серый цвет все клетки, куда может дойти конь из левой нижней клетки, таким образом, конь с серой клетки на белую сойти не может:



На левой картинке два коня стоят на серых клетках, а на правой картинке только один. Значит, правую картинку из левой не получить.

2. По берегу круглого острова расположено 5 хижин: А, Б, В, Г, Д (в таком порядке). Кратчайшие расстояния по берегу между некоторыми из них таковы: между А и В — 16 км, между Б и Г — 18 км, между В и Д — 22 км, между Г и А — 23 км, между Д и Б — 18 км. Приведите пример, когда расстояния между соседними хижинами выражаются целым числом километров.

Решение. Есть всего два примера:

	АБ	БВ	ВГ	ГД	ДА
I	5 км	11 км	7 км	15 км	13 км
II	12 км	4 км	14 км	17 км	6 км

3. Маша приобрела 2021 гирю попарно различной массы. Теперь Маша кладёт на двухчашечные весы по одной гире (гири, положенные на весы ранее, не снимаются). Каждый раз, когда весы оказываются в равновесии, Маша радуется. Какое наибольшее количество раз она может найти повод для радости?

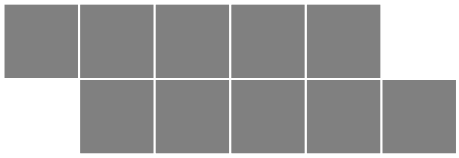
Решение. *Ответ:* 673 раза.

Пример. Пусть Маша приобрела 673 тройки вида $x, y, x + y$ (будем выбирать веса новых троек так, чтобы они не дублировали старые). Последние две гири — любые. Маша кладёт на левую чашку весов x, потом на левую же чашу — y и, наконец, на правую $x + y$ и радуется.

Оценка. Пусть весы в равновесии. Кладя на весы следующие две гири, Маша будет грустить (первая гиря отклонит весы от равновесия, а вторая, будучи отличной от первой, не сможет вернуть их в равновесие). Итого первые два взвешивания Маша не сможет порадоваться, а далее в каждой тройке найдёт не более одного повода для радости, так как между двумя радостными взвешиваниями случатся хотя бы два безрадостных.

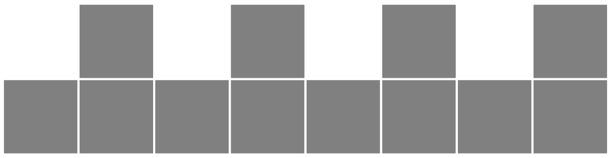
4. Барон Мюнхгаузен утверждает, что в детстве смог нарисовать клеточную непрямоугольную фигуру, которую можно было разрезать по клеточкам и на 2, и на 3, ..., и на 7 одинаковых частей. Могут ли его слова быть правдой?

Решение. **Способ 1:** назовём зигзагом длины n фигурку из $2n$ клеток, которая склеена из двух прямоугольников $1 \times n$ по куску границы длины $n-1$. На рисунке для примера показан зигзаг длины 5:



Ясно, как составить k зигзагов длины m, чтобы получить зигзаг длины mk. А тогда видно, что зигзаг длины 7! порежется на любое требуемое количество частей.

Способ 2: Назовём паровозиком длины n фигурку, составленную из n одинаково ориентированных трёхклеточных уголков, которая умещается в прямоугольник $2 \times n$. На рисунке для примера показан паровозик длины 4:



Очевидно, как составить из k паровозиков длины m один паровозик длины mk, так что паровозик длины 7! легко порезать на любое требуемое количество равных частей.

Конечно, есть и куча других способов.

5. Семеро рыбаков стоят по кругу. У рыбаков есть профессиональная привычка преувеличивать числа. Каждый рыбак имеет *меру вранья* (каждый свою, целочисленную) — во сколько раз названное рыбаком число больше истинного значения. Например, если рыбак с мерой вранья 3 поймает две рыбины, то он скажет, что поймал шесть рыб. На вопрос: «Сколько рыб поймал твой левый сосед?», последовали ответы (не обязательно в том порядке, в котором сидят рыбаки) 12, 12, 20, 24, 32, 42 и 56. На вопрос: «Сколько рыб поймал твой правый сосед?» шестеро рыбаков ответили 12, 14, 18, 32, 48, 70. Что ответил седьмой?

Решение. Заметим, что произведение всех чисел, названных рыбаками в каждом из опросов, есть произведение количества пойманных рыб, умноженное на произведение всех мер вранья этих рыбаков. Значит, седьмой ответил $\frac{12\cdot12\cdot20\cdot24\cdot32\cdot42\cdot56}{12\cdot14\cdot18\cdot32\cdot48\cdot70} = 16$.

Заметим, что такая ситуация действительно могла возникнуть, если рыбаки поймали соответственно 2, 7, 3, 8, 4, 2, 2 рыбины, а мера вранья у них соответственно 10, 6, 6, 8, 7, 8, 6.

6. На сборе было 1000 волейбольных команд, некоторые провели друг с другом по одному матчу. У каждой команды оказалось поровну побед и поражений (а ничьих в волейболе не бывает). Известно, что если команда A выиграла у команды B, то она выиграла и у всех, с кем B не играла. Докажите, что какая-то команда сыграла не менее 800 матчей.

Решение. Во-первых заметим, что из условия легко следует следующее: если А не играла с Б, а Б не играла с Ц, то А не играла с Ц, иначе победитель бы должен был играть с Б.

Теперь возьмем произвольную команду и всех, с кем она не играла, покрасим их в один цвет. Возьмем какую-то из непокрашенных и всех, с кем она не играла, покрасим в другой цвет. Подобными действиями раскрасим все команды. Отметим, что из предыдущего абзаца следует, что разноцветные команды друг с другом играли, и значит ни одна команда не покрашена дважды.

Рассмотрим все команды некоторого цвета, скажем, синего. Выберем одну из них, назовём её А, и заметим следующее:

- все, кому А проиграла, выиграли у каждой синей команды;

- тогда любая синяя команда выиграла у всех, кто проиграл А (это все остальные): потому что проиграла стольким же победителям А, а с другими синими командами не играла.

Теперь предположим противное: все сыграли менее 800 игр. Тогда победителей А и проигравших А не более чем по 399, тогда синих команд хотя бы 202. На самом деле, в силу произвольности выбора цвета, команд *каждого* цвета по $\geqslant 202$ штуки.

Далее, любая команда Б, победившая А, должна играть с каждой командой, проигравшей А: В противном случае из условия следовало бы что А в действительности выиграла у Б. То есть все победители А отличаются по цвету от проигравших А. Но победители не красятся в два или более цвета их слишком мало (не более $399 < 2 \cdot 202$). Аналогично с проигравшими. Значит, все победители А одного цвета, все проигравшие А одного цвета и всего цветов ровно три.

Наконец, если команда цвета X выиграла у команды цвета Y, то любая команда цвета X выиграла у любой команды цвета Y, это означает, что каждого цвета поровну (потому что у каждой команды поровну поражений и побед), что противоречит с неделимостью 1000 на три.

7. Торговец щёлоком Матти выписал на доску несколько трёхзначных чисел-палиндромов. Оказалось, никакие два из них не дают в сумме палиндром. Мог ли он выписать больше половины всех трёхзначных палиндромов? Напоминаем, что палиндромом называется число, которое не меняется, если его цифры переставить в обратном порядке.

Решение. Нет. Всего трёхзначных палиндромов $9 \cdot 10$ (9 вариантов для 1 цифры, 10 для второй и третья задаётся однозначно первой). Будем доказывать, что на доске отсутствует хотя бы 45 палиндромов.

Если a, b, c, d такие цифры, что $a + c = b + d = 11$, то

$$\overline{aba} + \overline{cdc} = 1221,$$

то есть все палиндромы, состоящие из цифр от 2 до 9 разбились на пары, и из каждой пары можно выписать не более одного. Всего вышеописанных палиндромов 64 штуки (8 вариантов для первой цифры и 8 для второй), значит из них отсутствует хотя бы 32.

Теперь обратимся к такой группе из 13 палиндромов:

$$101, 111, 121, 131, 141, 151,$$
$$202, 303, 404, 505,$$
$$212, 313, 414.$$

Из них выписано не более одного, так как при сложении любых двух нет переходов через разряд, следовательно, получится палиндром. Значит, из этой группы отсутствует хотя бы 12.

Наконец, есть ещё пары $(161, 616)$, $(171, 717)$ и $(181, 818)$, и из каждой снова отсутствует хотя бы один палиндром. То есть всего хотя бы 3.

В итоге на доске Вася недосчитается $32 + 12 + 3 = 47$ палиндромов, что больше 45.

Кроме того, эта оценка кажется довольно грубой, так что возможно много неприятных решений, которые надо слушать предельно аккуратно, требовать от рассказывающего формулировать строгие утверждения, чётко объяснять, какие случаи он разбирает и т. п. И вообще не стоит стесняться звать на помощь, если непонятно, липа это или нет.