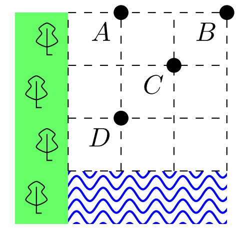
4 класс

1. В отмеченных точках (см. рисунок) находятся 4 норы. В них живут хоббиты: Фродо, Сэм, Мерри и Пиппин. Нора Фродо ближе к норе Мерри, чем к норе Пиппина. А нора Сэма находится ближе к реке, чем нора Мерри, но дальше от лесополосы, чем нора Пиппина. Кто где живёт? Ответ обоснуйте.

Решение. Пусть A, B, C, D — норы, отмеченные в порядке «слева направо и сверху вниз». Нора Сэма — C (она не самая далёкая от реки, т.е. не A и не B, но и не самая близкая к лесополосе, т.е. не D). Из условий следует, что Фродо живёт не в A (иначе Мерри и Пиппин будут на одинаковом расстоянии), Мерри — не в D, Пиппин — не в B (это следует из расположения норы Сэма). Если Фродо живёт в D, то Пиппин — в A, Мерри — в B, и первое условие не выполняется. Значит, Фродо живёт в B, Мерри — в A, а Пиппин в D.



□

Критерии. Полное решение — 7 баллов.
Верный ответ — 2 балла.
Верный ответ, но пропуск нескольких высказываний (например, "Сэм в норе посередине, т. к. Он ближе к реке но без уточнения возможности Сэма находиться в норе, ближайшей к реке) — 5 баллов.
Верный ответ и небольшое количество логически верных утверждений, но пропуск значительной части нужных переходов и случаев — 3 балла.
Обоснование того, где живёт Сэм — 2 балла.
Верное рассуждение, кто где не может находиться, после объяснения, где Сэм — 2 балла.
Неполный перебор случаев — не более 3 баллов.

2. У курфюрста Георга 100 монет, некоторые из них фальшивые (возможно, все или ни одной). Георг может показывать одну или несколько монет эксперту, и тот будет говорить, сколько из них фальшивых. Проблема в том, что единственный на всю округу эксперт — барон Мюнхгаузен, а он привирает: результат, названный бароном, всегда больше истинного на некоторое фиксированное (и неизвестное Георгу) натуральное число. Барона не смущает, что он может сказать, например, «три», если ему дали всего две монеты. Сможет ли Георг гарантированно выяснить, какие монеты фальшивые?

Решение. Да, есть много способов сделать это. Например, мы можем 100 раз приносить эксперту по одной монете. Если не все его ответы одинаковые, то фальшивые монеты те, на которые барон назвал большее число. Если же все ответы одинаковы (пусть они будут x), тогда либо все монеты настоящие, либо все фальшивые. В этом случае следующим ходом дадим барону сразу все монеты. Если он снова назовёт x, значит, все монеты были настоящими, а барон преувеличивал каждый раз на x. Если же все монеты фальшивые, то он назовёт число $99 + x$ (потому что он преувеличивал всегда на $x - 1$). □

Критерии. Полное решение — 7 баллов.
За верное решение, где вместо переменной используется ("для примера") конкретное число (размер преувеличения) без оборотов вида «не умаляя общности» и подобных ему по смыслу — 6 баллов.
За отсутствие объяснения, почему стратегия работает — 6 баллов.
За разбор решения с поочередным разбором всех монет, но без учета варианта, в котором все взятые монеты одинаковы — 5 баллов.

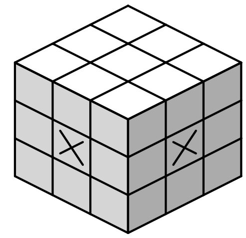
3. 31 машина одновременно стартовала из одной точки на круговой трассе: первая машина — со скоростью 61 км/ч, вторая — 62 км/ч, и т. д. (31-я — 91 км/ч). Трасса узкая, и если одна машина на круг обгоняет другую, то они врезаются друг в друга, обе вылетают с трассы и выбывают из гонки. В конце концов осталась одна машина. С какой скоростью она едет?

Решение. Сперва самая быстрая машина врезается в самую медленную, потом — вторая по скорости врезается в предпоследнюю, и т.д. В итоге останется средняя по скорости машина, т. е. 16-я. Она едет со скоростью 76 км/ч. □

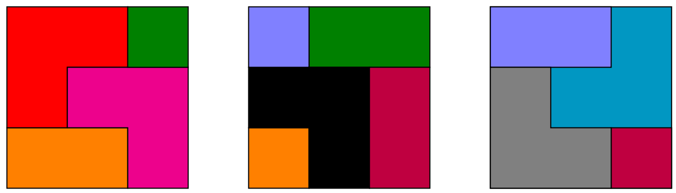
Критерии. Полное решение — 7 баллов.
Решение, правильно описывающее в целом последовательность столкновений, но с неверным ответом при счете — 6 баллов.

Правильный ответ + выписаны и зачёркнуты машины, но не сказано по какому принципу (в каком порядке происходило выбывание) — 4 балла.

4. Из куба $3 \times 3 \times 3$ вырезали тоннель из трёх кубиков, соединяющий центральные клетки двух соседних граней (на рисунке они отмечены крестиками). Разрежьте остальное на фигурки такой же формы, как и тоннель (тоже из трёх кубиков).



Решение. Покажем послойно как сложить требуемую конструкцию (разные фигурки отмечены разными цветами, тоннель — чёрным):



□

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

5. Каждый из пяти друзей перемножил несколько последовательных чисел, начиная с 1. Оказалось, что одно из произведений равно сумме четырёх других. Найдите все возможные значения этого произведения и покажите, что других значений нет.

Решение. Ответ: 6 или 24. Решение: Назовём Васей того из друзей, чьё произведение равно сумме остальных. Ясно, что Вася перемножал больше чисел, чем остальные. Если бы он перемножил хотя бы 5 чисел, то его произведение оказалось хотя бы в 5 раз больше, чем произведение любого из оставшихся друзей. Но его произведение — сумма произведений друзей, которых четверо. Значит, в 5 раз (а тем более в 6, 7 и т. д.) больше оно быть не может. Выходит, Вася перемножил не более 4 чисел. Сумма чисел у четырех Васиных друзей никак не меньше четырёх, а значит и Васино число не меньше четырёх. Выходит, одно или два числа Вася не мог перемножить, а для случаев трёх и четырёх множителей есть примеры:

$$1 + 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \qquad 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

□

Критерии. Полное решение — 7 баллов.
Доказано, что $n \leqslant 4$ — 4 балла.
Если в ответе приведены оба варианта, с тремя и с четырьмя множителями — 6 баллов
Правильный ответ + неаккуратное рассуждение про «произведение 120 получить нельзя» — 1 балл
Просто правильный ответ с примером — 1 балл.

6. За круглым столом сидят 8 гномов, у каждого из которых есть по три алмаза. Стулья гномов пронумерованы по порядку от 1 до 8. Каждую минуту гномы одновременно делают следующее: делят все свои алмазы на две кучки (возможно, одна из кучек или обе кучки пустые), затем одну кучку отдают левому соседу, а другую — правому. Могут ли все алмазы оказаться у одного гнома?

Решение. Заметим, что гномы с чётными номерами стульев всегда делятся с гномами с нечётными номерами, и наоборот. Поскольку все дележи происходят одновременно, то в любой момент времени у гномов с чётными номерами будет столько же алмазов в сумме, сколько у гномов с нечётными номерами. А значит, алмазы у одного гнома собраться не смогут. □

Критерии. Полное решение — 7 баллов.
За фразу «четные гномы всегда отдают нечётным и наоборот» — 2 балла
За фразу «сумма алмазов не меняется у нечётных и чётных» без пояснения того, почему из этого следует ответ на задачу — 6 баллов.