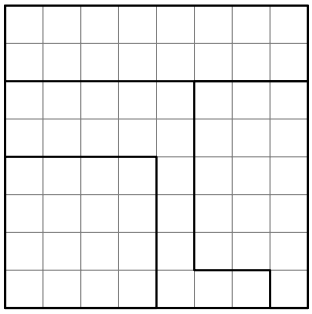
Условия и решения очного тура олимпиады ЮМШ
4 класс

1. Покажите, как разрезать квадрат 8×8 по линиям сетки на четыре части, у которых одинаковые площади, но попарно различные периметры.

Решение. Одно из возможных решений приведено на рисунке.



2. Перед Мишей стоят четыре девочки. У одной девочки дома одна кошка, у другой — две, у третьей — три, у четвёртой — четыре, но у какой именно девочки сколько кошек, он не знает. Миша может указать на одну или нескольких девочек и спросить, сколько кошек у них в сумме. Как за два вопроса ему найти каких-нибудь двух девочек, у которых в сумме ровно 5 кошек?

Решение. Спросим у первых двух девочек, сколько у них кошек. Спросим у первой и третьей девочек, сколько у них кошек. Если хотя бы один из ответов будет «Пять», то задача решена. Если нет, то у первой и четвёртой девочек окажется пять кошек, т.к. для любой девочки найдётся другая, в сумме с которой у этих девочек будет пять кошек.

3. Имеется две карточки с цифрой 5, две — с цифрой 6, две — с цифрой 7, две — с цифрой 8 и две с цифрой 9. Из этих карточек составили два пятизначных числа и сложили полученные числа. Первая цифра результата, что закономерно, равна 1. А может ли оказаться, что каждая из остальных цифр не меньше 5?

Решение. *Ответ:* Не может.

Способ 1. Заметим, что в каждом из пяти разрядов есть перенос. Сосчитаем сумму цифр результата. Сумма цифр на карточке равна $10 + 12 + 14 + 16 + 18 = 70$. Каждый перенос уменьшает сумму цифр результата на 9 по сравнению с суммой цифр обоих слагаемых. Значит, у результата сумма цифр равна $70 - 5 \cdot 9 = 25$. Первая цифра равна 1, а значит, сумма оставшихся пяти цифр равна 24. Но такого не может быть если каждая из оставшихся цифр не меньше 5.

Способ 2. Посмотрим на пятёрку в слагаемом. Чтобы в результате на этом разряде оказалось число, не меньшее 5, в другом слагаемом на этой же позиции должна стоять 9 (и должен оказаться перенос с предыдущего разряда). Значит, пятёрки и девятки объединены в пары, стоящие в одном разряде разных слагаемых. Аналогично в пары объединены 6 и 8 (девятки уже заняты, а значит, напротив шестёрок должны стоять восьмёрки). Тогда и две семёрки тоже находятся в паре (здесь во всех случаях парой называем цифры, стоящие в одном разряде и в разных слагаемых). Но каждая такая пара требует перенос с предыдущего разряда, а пара, стоящая в последнем разряде, должна обойтись без переноса. Противоречие.

4. Маша приобрела 2021 гирю попарно различной массы. Теперь Маша кладёт на двухчашечные весы по одной гире (гири, положенные на весы ранее, не снимаются). Каждый раз, когда весы оказываются в равновесии, Маша радуется. Какое наибольшее количество раз она может найти повод для радости?

Решение. *Ответ:* 673 раза.

Пример. Пусть Маша приобрела 673 тройки вида $x, y, x+y$ (будем выбирать веса новых троек так, чтобы они не дублировали старые). Последние две гири — любые. Маша кладёт на левую чашку весов x, потом на левую же чашу — y и, наконец, на правую $x+y$ и радуется.

Оценка. Пусть весы в равновесии. Кладя на весы следующие две гири, Маша будет грустить (первая гиря отклонит весы от равновесия, а вторая, будучи отличной от первой, не сможет вернуть их в равновесие). Итого первые два взвешивания Маша не сможет порадоваться, а далее в каждой тройке найдёт не более одного повода для радости.

5. Индийский инженер задумал натуральное число, выписал все его собственные натуральные делители, а потом каждое из выписанных чисел увеличил на 1. Так вышло, что новые числа — это все собственные делители некоторого другого натурального числа. Какое число мог задумать инженер? Приведите все варианты и докажите, что других нет. Напомним, что делитель называется собственным, если он не равен 1 и не совпадает с делимым числом.

Решение. *Ответ:* 4 или 8.

Пусть исходное число — это n, а «некоторое другое число» — m. Число m нечётно, потому что у чётного есть делитель 2, он не мог получиться. Значит, все его делители нечётны. Значит, все делители n чётны. То есть n — степень двойки. Варианты $n = 4$ и $n = 8$ подходят, им соответствуют $m = 9$ и $m = 15$. Большие степени двойки не подходят: делители 2, 4, 8 после действий инженера превращаются в 3, 5, 9, значит, у m есть собственный делитель 15, но у n делителя 14 не может быть.

6. Имеется неокрашенная доска 101×201. У первого игрока — ведро с жёлтой краской, у второго — с синей. За ход каждый игрок может закрасить своим цветом ряд (горизонталь или вертикаль). При смешивании жёлтой и синей красок получается зелёный цвет, при дальнейшем смешивании зелёного с жёлтым или синим цветом не происходит ничего. Нельзя красить ряд, если именно этот ряд уже был ранее покрашен противником, также нельзя красить ряд, если ни одна клетка на доске не поменяет цвета. Проигрывает игрок, у которого нет хода. Кто может обеспечить себе выигрыш?

Решение. *Ответ:* Выигрывает второй. Разобьём ряды на пары: первую строчку сопоставим первому столбцу, остальные строчки разобьём на пары, столбцы — тоже. Если первый красит какой-то ряд, то второй красит парный ему ряд.

Докажем, что при такой стратегии второй всегда сможет походить. Пусть первый покрасил ряд A, а парный к нему ряд — B. Первый, очевидно, не красил B. Допустим, что при покраске B в синий цвет ни одна клетка не меняет цвет (т.е. она синяя либо зелёная — но зелёной такие клетки быть не могут, иначе ряд B был уже покрашен ранее). Рассмотрим два случая.

а) Ряды A и B параллельны (для удобства — пусть B является следующим за A). Если все клетки ряда B синие, значит, все перпендикулярные ряды покрашены синим, что противоречит предыдущей стратегии (синих перпендикулярных рядов максимум на один больше, чем жёлтых).

б) Ряды A и B перпендикулярны. Тогда клетка на их пересечении поменяет цвет, т.е. второй обязательно сможет походить.

7. Семеро рыбаков стоят по кругу. У рыбаков есть профессиональная привычка преувеличивать числа. Каждый рыбак имеет *меру вранья* (каждый свою, целочисленную) — во сколько раз названное рыбаком число больше истинного значения. Например, если рыбак с мерой вранья 3 поймает две рыбины, то он скажет, что поймал шесть рыб. На вопрос: «Сколько рыб поймал твой левый сосед?», последовали ответы (не обязательно в том порядке, в котором сидят рыбаки) 12, 12, 20, 24, 32, 42 и 56. На вопрос: «Сколько рыб поймал твой правый сосед?» шестеро рыбаков ответили 12, 14, 18, 32, 48, 70. Что ответил седьмой?

Решение. Заметим, что произведение всех чисел, названных рыбаками в каждом из опросов, есть произведение количества пойманных рыб, умноженное на произведение всех мер вранья этих рыбаков. Значит, седьмой ответил $\frac{12\cdot12\cdot20\cdot24\cdot32\cdot42\cdot56}{12\cdot14\cdot18\cdot32\cdot48\cdot70} = 16$.

Заметим, что такая ситуация действительно могла возникнуть, если рыбаки поймали соответственно 2, 7, 3, 8, 4, 2, 2 рыбины, а мера вранья у них соответственно 10, 6, 6, 8, 7, 8, 6.