# Условия и решения очного тура олимпиады ЮМШ для жюри

# 11 класс

**Сюжет 1.**

В армии Шакти состоит 100 троглодитов; некоторые троглодиты дружат друг с другом, а некоторые нет. Множество троглодитов $A$ называется *общительным*, если любой другой троглодит дружит с кем-то из $A$ и *странным общительным*, если при этом никакие два троглодита из $A$ не дружат. Оказалось, что каждый троглодит с кем-то дружит.

**1.1.** В армии нашлись троглодиты Вася и Петя, образующие общительное множество. Тогда Шакти может найти странное общительное множество из не более, чем 50 троглодитов.

**Решение.**

Если Вася и Петя не дружат, то можно взять их. Иначе один из них (скажем, Вася) знает хотя бы 50 троглодитов. Начнем формировать странное общительное множество $A$, начиная с Васи. Если какой-то из оставшихся троглодитов не знает никого из $A$, мы добавляем его в $A$. В конце $A$ станет странным общительным множеством. Поскольку 50 троглодитов знакомы уже с Васей, в $A$ окажется не более 50 троглодитов.

**1.2.** Пусть не нашлось таких четырех троглодитов $A$, $B$, $C$ и $D$, что $A$ дружит с $B$, $C$ и $D$, а $B$, $C$ и $D$ между собой нет. Дас нашел общительное множество размера $k$. Докажите, что Шакти сможет найти странное общительное множество размера не более $k$.

**Решение.**

Рассмотрим общительное множество $A$ наименьшего размера. Заметим, что можно выбрать $A$ таким, что для каждого троглодита $a$ из $A$ найдется троглодит $v_a$, единственный друг которого в множестве $A$ — троглодит $a$. Действительно, в противном случае, если $a$ дружит с кем-то из $A$, то его можно просто удалить, а если не дружит ни с кем из $A$, то её можно поменять с любым его другом.

Пусть в $A$ найдутся друзья, скажем, $a$ и $b$. Тогда все троглодиты, для которых единственный друг в множестве $A$ — троглодит $a$, дружат между собой. В самом деле, пусть $v_a$ и $u_a$ не дружат, тогда $a$, $b$, $v_a$ и $u_a$ противоречат условию. Таким образом можно заменить $a$ на $v_a$, множество $A$ останется общительным, а число пар дружащих троглодитов в $A$ уменьшится.

Повторив описанные рассуждения несколько раз получим странное общительное множество размера не больше, чем было исходно.

**1.3.** Покажите, что странного общительного множества из не более чем 81 троглодита может и не оказаться.

**Решение.**

Пусть есть 10 троглодитов, дружащие между собой обозначим их за $K$; и каждый из $K$ дружит еще с девятью разными осташимися троглодитами. Больше дружб нет. Любое странное общительное множество $A$ содержит не более одного троглодита из $K$ (скажем, Васю), и вынуждено содержать всех троглодитов, не знакомых с Васей, так как между ними нет знакомых. Тогда если $A$ содержит Васю, то в нем не менее 90 троглодитов, а если содержит, то не менее 82.

**1.4.** Докажите, что Шакти всегда сможет найти странное общительное множество не более, чем из 82 троглодитов.

**Решение.**

Рассмотрим общительное множество $A$ наименьшего размера. Заметим, что можно выбрать $A$ таким, что для каждого троглодита $a$ из $A$ найдется троглодит $v_a$, единственный друг которого в

множестве $A$ — троглодит $a$. Действительно, в противном случае, если $a$ дружит с кем-то из $A$, то его можно просто удалить, а если не дружит ни с кем из $A$, то её можно поменять с любым его другом.

По принципу Дирихле некоторый троглодит $u \in A$ знаком с хотя бы $(100-|A|)/|A|$ троглодитами не из $A$.

Пусть $B$ — множество максимального размера, содержащее $u$ и такое, что в нем никто не дружит. Заметим, что $B$ является странным общительным, оценим его размер. Заметим, что $B$ не содержит друзей $u$, а также не более одного троглодита из каждой пары $a$, $v_a$, где $a \in A \setminus \{u\}$.

Поскольку друзья $u$, не входящие в $A$, по построению не входят в пары $(a, v_a)$ и их не менее $(100 - |A|)/|A|$, получаем

$$|B| \leqslant 100 - \frac{100 - |A|}{|A|} - (|A| - 1) = 102 - \frac{100}{|A|} - |A| \leqslant 82,$$

что и требовалось.

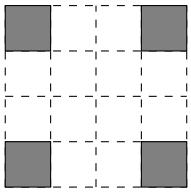
**Сюжет 2.**

Есть квадрат со стороной 2. Вася закрасил в нем конечное число многоугольников так, что не нашлось закрашенных точек на расстоянии 1 (граница считается незакрашенной). Пусть $A$ — закрашенное множество, $S(A)$ — его площадь.

**2.1.** Приведите пример такого $A$, что $S(A) \geqslant 1$.

**Решение.**

В качестве примера подойдут четыре маленьких квадрата со стороной $\frac{1}{2}$ по углам большого:



**2.2.** Докажите, что $S(A) \leqslant 2$.

**Решение.**

Разрежем квадрат на два равных прямоугольника, заметим, что параллельный перенос левой половины на единичный вектор совпадает с правой половиной. Следовательно, параллельный перенос закрашенной части в левой половине не пересекается с закрашенной частью в правой половине.

**2.3.** Оцените сверху $S(A)$ как 1.65.

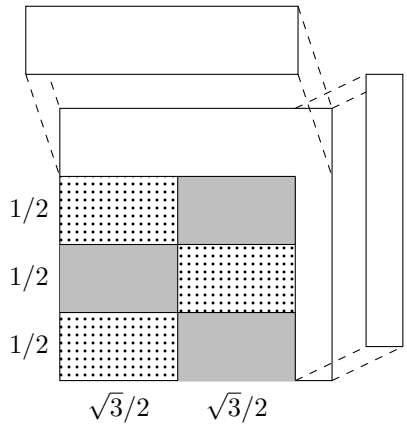
**Решение.**

Разрежем квадрат, как отмечено на картинке. Рассмотрим шесть равных прямоугольников: левый верхний, левый нижний и правый средний попарно переводятся друг в друга с помощью параллельного переноса на вектор длины один. Следовательно, площадь закрашенной части не превышает трети от площади серых прямоугольников. Аналогичные рассуждения применимы для прямоугольников с точками.

Рассмотрим теперь каемку: ее можно покрыть двумя прямоугольниками как на картинке, и в каждом из них оценить площадь закрашенной части как половину площади прямоугольника.

Итого получаем оценку в

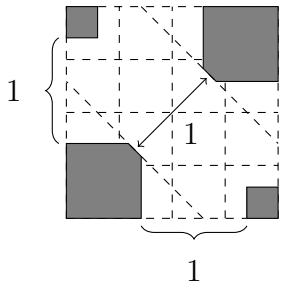
$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 - \sqrt{3}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{3}) = 1.63\ldots.$$




**2.4.** Приведите пример такого $A$, что $S(A) \geqslant 1.14$.

**Решение.**

Поставим в два противоположных угла квадраты с диагональю 1 (то есть со стороной $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а в оставшиеся — то, что влезет: квадраты со стороной $2-1-\frac{1}{\sqrt{2}} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Расстояние между большими квадратами меньше 1, поэтому обрежем их уголки двумя параллельными линиями на расстоянии 1, то есть от каждого из них будет отрезан равнобедренный прямоугольный треугольник с высотой $1-\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-1) = \frac{3}{2}-\sqrt{2}$.




Посчитаем площадь:

$$2\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-2\cdot\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^2 = 2+1-2\sqrt{2}+1-\frac{9}{2}+6\sqrt{2}-4 = 4\sqrt{2}-4{,}5.$$

Используя известную оценку $\sqrt{2} > 1{,}41$ (нетрудно убедиться, что $1{,}41^2 < 2$), получаем, что площадь не меньше 1,14.

**Сюжет 3.**

Во всех пунктах помимо указанных предположений считается, что $n \geqslant 10$.

**3.1.** Решите неравенство в натуральных числах:

$$n \leqslant n! - 4^n \leqslant 4n.$$

**Решение.**

Докажем по индукции, что $n! > 4^n + 4n$. База $n = 10$ проверяется; переход:

$$(n+1)! > (n+1)(4^n+4n) = 4^{n+1} + 16n + (n-3)(4^n+4n) > 4^{n+1} + 4(n+1).$$

Выходит, что решений нет.

**3.2.** Найдите все натуральные $n$ и составные $k$ такие, что

$$n \leqslant n! - k^n \leqslant kn.$$

**Решение.**

Заметим, что $n^{n/2} + n^{3/2} < 2n^{n/2} < n! \leqslant (n/2)^n$ для всех $n > 9$, т. о. имеет смысл искать решения с $k$ в диапазоне от $\sqrt{n}$ до $n/2$.

Заметим далее, что если $k \leqslant n/3$, то в числе сомножителей $n!$ найдутся $k$, $2k$ и $3k$, а значит, $n!$ будет делиться на $k^3$. Несложно заметить, что тогда $n! - k^n$ будет делиться на $k^3$. Но для $n > 9$, $k^3 > k \cdot k^2 > kn$. Значит, для $n > 9$ имеет смысл искать решения для $n/3 < k < n/2$.

Теперь решим текущую задачу. Действительно, пусть $k$ не простое и не удвоенное простое, тогда можно записать $k = xy$, где $2 < x \leqslant y$ — натуральные числа. Тогда $n!$ будет иметь различными множителями $x$, $k$, $2y$, $2k$ Тогда $x \cdot k \cdot 2y \cdot 2k$ делится на $k^3$ значит, $n!$ делится на $k^3$.

Если же $k = 2p$ — удвоенное простое,то $n!$ кратен $p^4$, поскольку $k \leqslant n/2$ и кратен $2^6$. То есть опять-таки число $n!$, а значит и число $n! - k^n$ кратно $k^3$, что, как мы видели выше, противоречит неравенствам в условии задачи. То есть, решений нет.

**3.3.** Найдите все простые $n$ и натуральные $k$ такие, что

$$n \leqslant n! - k^n \leqslant kn.$$

**Решение.**

Заметим, что так как (по доказанному выше) $n/3 < k$, то $kn < 3k^2$, а значит и $n! - k^n < 3k^2$. Поскольку $k \leqslant n/2$, в числе сомножителей $n!$ найдутся $k$, $2k$,а значит, $n!$, а вместе с ним и $n! - k^n$ будет делиться на $k^2$. Отсюда следует, что либо $n! - k^n$ равняется либо $k^2$, либо $2k^2$ (Это общие ключевые наблюдения, не зависящие от простоты $n$).

Перейдем к решению пункта. Заметим, что для составных $k$ решений нет по прошлому пункту. Если $k$ простое, то $n! - k^n$ нечетно, а значит, равно $k^2$ (а не $2k^2$). Рассмотрим выражение $n! - k^n$ по модулю $n$. По малой теорема Ферма, оно сравнимо с $-k$. Таким образом, $k^2 + k = k(k+1)$ делится на $n$. Это невозможно, так как $n$ — простое и $k, k+1 < n$. Значит, решений нет.

(Также вариант с $2k^2 + k$, делящимся на $n$ и, соответственно, $n = 2k + 1$ легко исключить в силу неравенства $k^{2k+1} > (2k+1)!$, выполненого для $k$, актуальных в этой части решения задачи.)

**3.4.** Решите неравенство в натуральных числах:

$$n \leqslant n! - k^n \leqslant kn.$$

**Решение.**

Поскольку случай составного (в частности, четного) $k$ уже разобран в п.2, то, как и в п.3, осталось разобрать случай $n! = k^n + k^2$. Заметим, что левая часть равенства делится на $k - 1$, а правая сравнима по этому модулю с двойкой (и $k > 3$). Противоречие, значит решений нет.

(Также можно было заметить, что $n$ — нечетно (иначе $k^n + k^2$ сравнимо с двойкой по модулю 4, а $n!$ делится на 4. В этом случае $k^n + k^2 = k^2(k+1)m$, где $m$ — нечетно. Но $n!$ должно делиться на $2^{\frac{n=1}{2}}$, а это число больше, чем $n/2$, которое, в свою очередь, не меньше, чем $k+1$ — наибольшее четное число, на которое делится $k^2(k+1)m$.)