Условия и решения очного тура олимпиады ЮМШ для жюри

10 класс

Сюжет 1.

Дан равносторонний треугольник ABC. Точки X и Y на стороных AB и BC, соответственно. Равносторонние треугольники AXD и BYE построены во внешнюю стоорону относительно исходного треугольника ABC. Точка F такова, что треугольник DEF равносторонний, а точки F и C лежат по одну сторону относительно DE.

1.1. Известно, что $AX = BY$, а G — точка пересечения стороны AB и прямой, проходящей через F параллельно BC. Докажите, что $GF = AB$

Решение.

Очевидно, что A, B, C и D, E, F переходят по циклу при повороте на $120°$ относительно центра треугольника ABC. Следовательно $AGFC$ — параллелограмм.

1.2. Известно, что AB параллельно FC. Докажите, что $AX = BY$.

Решение.

Поставим новые точки E' и F' на лучах BE и CF так, что $AD = BE' = CF'$. Тогда очевидно, что треугольник $DE'F'$ — равносторонний. Но при повороте на $60°$ относительно D точки E и E' переходят в F и F', соответственно. Однако у прямой, полученной из BE поворотом относительно D, и CF есть единственная точка пересечения. Таким образом $F = F'$ и $E = E'$.

1.3. Пусть изначальный треугольник ABC фиксирован и его сторона равна a, а остальные точки не фиксированы. F' — такая точка отличная от F, что треугольник DEF' равносторонний. Найти геометрическое место точек F' и его длину.

Решение.

Это отрезок длиной $2a$. Пусть ABC — серединный треугольник для $A_0B_0C_0$, тогда D бегает по отрезку AC_0, а E — по BA_0. Четырехугольник $DEF'C_0$ — вписанный, в нем дуги DE и EF' по 60 градусов. Значит, угол $F'C_0B$ равен 60 градусам, то есть F' бегает по лучу из C_0 параллельному AB. Ну, так как угол $F'EC_0$ точно меньше 60 градусов, то не по лучу, а по отрезку длиной $2a$. Еще надо заметить, что все точки достигаются, и что F' не может быть в другой полуплоскости относительно AC_0.

1.4. G — точка пересечения стороны AB и прямой, проходящей через F параллельно BC. Докажите, что $BG = AX$.

Решение.

Для случая $AX = BY$ фактически доказано в первом пункте. Осталось заметить, что при изменении точки Y точка G не меняется. Действительно, при движении точки Y по BC точка G двигается по прямой, получающейся поворотом на $60°$ относительно E из прямой BE. То есть двигается по прямой, параллельной AC.

Сюжет 2.

Во всех пунктах помимо указанных предположений считается, что $n \geqslant 10$.

2.1. Решите неравенство в натуральных числах: $n \leqslant n! - 4^n \leqslant 4n$.

Решение.

Докажем по индукции, что $n! > 4^n + 4n$. База $n = 10$ проверяется; переход:

$$(n+1)! > (n+1)(4^n + 4n) = 4^{n+1} + 16n + (n-3)(4^n + 4n) > 4^{n+1} + 4(n+1).$$

Выходит, что решений нет.

2.2. Найдите все натуральные n и составные k такие, что $n \leqslant n! - k^n \leqslant kn$.

Решение.

Заметим, что $n^{n/2} + n^{3/2} < 2n^{n/2} < n! \leqslant (n/2)^n$ для всех $n > 9$, т.о. имеет смысл искать решения с k в диапазоне от $\sqrt{n}$ до $n/2$.

Заметим далее, что если $k \leqslant n/3$, то в числе сомножителей $n!$ найдутся k, $2k$ и $3k$, а значит, $n!$ будет делиться на k^3. Несложно заметить, что тогда $n! - k^n$ будет делиться на k^3. Но для $n > 9$, $k^3 > k \cdot k^2 > kn$. Значит, для $n > 9$ имеет смысл искать решения для $n/3 < k < n/2$.

Теперь решим текущую задачу. Действительно, пусть k не простое и не удвоенное простое, тогда можно записать $k = xy$, где $2 < x \leqslant y$ — натуральные числа. Тогда $n!$ будет иметь различными множителями x, k, $2y$, $2k$ Тогда $x \cdot k \cdot 2y \cdot 2k$ делится на k^3 значит, $n!$ делится на k^3.

Если же $k = 2p$ — удвоенное простое,то $n!$ кратен p^4, поскольку $k \leqslant n/2$ и кратен 2^6. То есть опять-таки число $n!$, а значит и число $n! - k^n$ кратно k^3, что, как мы видели выше, противоречит неравенствам в условии задачи. То есть, решений нет.

2.3. Найдите все простые n и натуральные k такие, что $n \leqslant n! - k^n \leqslant kn$.

Решение.

Заметим, что так как (по доказанному выше) $n/3 < k$, то $kn < 3k^2$, а значит и $n! - k^n < 3k^2$. Поскольку $k \leqslant n/2$, в числе сомножителей $n!$ найдутся k, $2k$,а значит, $n!$, а вместе с ним и $n! - k^n$ будет делиться на k^2. Отсюда следует, что либо $n! - k^n$ равняется либо k^2, либо $2k^2$ (Это общие ключевые наблюдения, не зависящие от простоты n).

Перейдем к решению пункта. Заметим, что для составных k решений нет по прошлому пункту. Если k простое, то $n! - k^n$ нечетно, а значит, равно k^2 (а не $2k^2$). Рассмотрим выражение $n! - k^n$ по модулю n. По малой теорема Ферма, оно сравнимо с $-k$. Таким образом, $k^2 + k = k(k+1)$ делится на n. Это невозможно, так как n — простое и $k, k+1 < n$. Значит, решений нет.

(Также вариант с $2k^2 + k$, делящимся на n и, соответственно, $n = 2k + 1$ легко исключить в силу неравенства $k^{2k+1} > (2k+1)!$, выполненого для k, актуальных в этой части решения задачи.)

2.4. Решите неравенство в натуральных числах: $n \leqslant n! - k^n \leqslant kn$.

Решение.

Поскольку случай составного (в частности, четного) k уже разобран в п.2, то, как и в п.3, осталось разобрать случай $n! = k^n + k^2$. Заметим, что левая часть равенства делится на $k - 1$, а правая сравнима по этому модулю с двойкой (и $k > 3$). Противоречие, значит решений нет.

(Также можно было заметить, что n — нечетно (иначе $k^n + k^2$ сравнимо с двойкой по модулю 4, а $n!$ делится на 4. В этом случае $k^n + k^2 = k^2(k+1)m$, где m — нечетно. Но $n!$ должно делиться на $2^{\frac{n=1}{2}}$, а это число больше, чем $n/2$, которое, в свою очередь, не меньше, чем $k+1$ — наибольшее четное число, на которое делится $k^2(k+1)m$.)

Сюжет 3.

В свободное от учёбы время Паша любит программировать логические функции, то есть функции нескольких аргументов, возвращающие истину или ложь, при этом каждый из аргументов также принимает значения истина или ложь. Так, если ему дана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, то он хочет записать её с помощью последовательной программы, состоящей из нескольких строк, таких что i-я строка имеет вид

$$x_{n+i} = b_i(x_j, x_k),$$

где b_i — это любая логическая функция от двух переменных, а $1 \leqslant j, k \leqslant n+i-1$. Другими словами, каждая строка программы просто применяет одну из бинарных логических функций к входным переменным $(x_1, \dots, x_n)$ или результатам предыдущих операций $(x_{n+1}, \dots, x_{n+i-1})$ и записывает результат в новую переменную x_{n+i}. Результатом вычисления этой программы считается результат вычисления ее последней строки, который должен совпадать со значением $f(x_1, \dots, x_n)$.

Паша хочет научиться писать программу для функции $f_n(x_1, \dots, x_n)$, которая принимает значения истина тогда и только тогда, когда существует такой номер $1 \leqslant i < n$, что x_i и x_{i+1} принимают значение истина. Другими словами есть две переменные с соседними номерами, принимающие значения истина.

3.1. Как вычислить f_5 за 5 строк, используя только конъюнкции и дизъюнкции (то есть логические И и ИЛИ)?

Решение.

$$
\begin{aligned}
x_6 &= x_1 \vee x_3,\\
x_7 &= x_2 \wedge x_6,\\
x_8 &= x_3 \vee x_5,\\
x_9 &= x_4 \wedge x_8,\\
x_{10} &= x_7 \vee x_9.
\end{aligned}
$$

3.2. Докажите, что для всех $n \geqslant 4$ переменные x_1 и x_2 встречаются хотя бы в двух строках всякой программы, вычисляющей f_n.

Решение.

Заметим, что f_n зависит от всех своих переменных, поэтому x_1 и x_2 должны встречаться по крайней мере в одной строке. Предположим, что такая строка ровно одна: $x_{n+i} = b_i(x_1, x_2)$ для некоторого i. Рассмотрим три функции $g_1(x_3, \dots, x_n) = f(0, 0, x_3, \dots, x_n)$, $g_2(x_3, \dots, x_n) = f(0, 1, x_3, \dots, x_n)$, $g_3(x_3, \dots, x_n) = f(1, 1, x_3, \dots, x_n)$, которые мы можем вычислить с помощью программы для f_n путем подстановки значений первых двух переменных в b_i. Заметим, что функции различны, но в то же время на каких-то двух из них значение функции b_i совпадает и значит одна и та же программа вычисляет две различные функции одновременно. Противоречие.

3.3. Пусть $C(f_n)$ — это минимальное число строк в программе, вычисляющей f_n. Докажите, что $C(f_n) \geqslant C(f_{n-2}) + 2$ для $n \geqslant 4$.

Решение.

Лемма: Пусть для некоторой переменной x_{n+k} функция $b_k(x_i, x_j)$ зависит только от одной переменной (НУО $b_k(x_i, x_j) = h(x_i)$, при этом b_k вместе с h могут быть и константами). Тогда можно сократить программу на одну строку.

Док-во: В самом деле, удалим k-ю строку, а все вхождения x_{n+k} в остальные строки заменим на $h(x_i)$. Так, если $x_{n+l} = b_l(x_k, x_m)$, то после замены будет $x_{n+l} = b_l(h(x_i), x_m) = b'_l(x_i, x_m)$. •

Пусть x_1 и x_2 участвуют в вычислении переменных $x_{n+i} = b_i(x_1, y)$ и $x_{n+j} = b_j(x_2, z)$, $i \neq j$ (при этом y может быть равно x_2, а z может быть равно x_1). Заметим, что при подстановке $x_1 = x_2 = 0$ кратчайшая программа для f_n вычисляет функцию $f_{n-2}(x_3, \dots, x_n) = f_n(0, 0, x_3, \dots, x_n)$, а строки i и j зависят от одного аргумента. Тогда по лемме мы можем их удалить. Полученная программа все еще вычисляет f_{n-2}, но содержит на 2 строки меньше, чем кратчайшая программа для f_n. Отсюда получаем искомое неравенство.

3.4. Пусть $M(f_n)$ — это минимальное число строк в программе, вычисляющей f_n, в каждой строке вычисляя либо дизъюнкцию, либо конъюнкцию. Докажите, что $M(f_n) \geqslant M(f_{n-2}) + 3$ для $n \geqslant 4$.

Решение.

Пусть x_1 и x_2 участвуют в вычислении переменных $x_{n+i} = b_i(x_1, y)$ и $x_{n+j} = b_j(x_2, z)$, $i \neq j$ (при этом y может быть равно x_2, а z может быть равно x_1). Подставим $x_2 = 0$ и заметим, что полученная функция не зависит от x_1. Теперь, если b_i это конъюнкция, то подставим $x_1 = 0$, а если b_i это дизъюнкция, то подставим $x_1 = 1$. Заметим, что в обоих случаях b_i не зависит от y и равна некоторой константе c, а полученная программа вычисляет $f_{n-2}(x_3, \ldots, x_n) = f_n(x_1, 0, x_3, \ldots, x_n)$. Рассмотрим два случая:

1) $z = x_{n+i}$. В этом случае значение $x_{n+j} = b_j(0, c)$ также равно некоторой константе d и, по лемме, мы можем удалить строки x_{n+i}, x_{n+j}, а также все строки (по крайней мере одну), в которых встречается x_{n+j}.

2) $z \neq x_{n+i}$. В этом случае есть по крайней мере одна строка, в которой встречается x_{n+i} и, по лемме, мы можем удалить ее, x_{n+i} и x_{n+j}.

После этого удаляются все строки, зависящие от одного аргумента, и так до тех пор, пока не останется программа, в которой все строки зависят от обоих аргументов.

В обоих случаях удаляется по крайней мере три строки, при этом полученная программа вычисляет f_{n-2}.

Наконец, покажем, что в каждой строке вычисляется конъюнкция или дизъюнкция. В самом деле, при подстановке константы в конъюнкцию или дизъюнкцию получается либо константа, либо вторая переменная. Это означает, что композиции вида $b_l(h(x_i), x_m)$ из доказательства леммы равны либо константе, либо переменной, либо конъюнкции/дизъюнкции. Из того, что в финальной программе все функции зависят от обоих аргументов, мы заключаем, что все они являются конъюнкциями или дизъюнкциями.