Математический квадрат, 9–11 классы.

Алгебра и математический анализ.

1. Сколько вещественных решений имеет уравнение

$$|x-1| = |x-2| + |x-3|?$$

2. Какое минимальное значение (в зависимости от значения параметра m) может принимать сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - (2m+1)x - 2.5m^2 - m = 2?$$

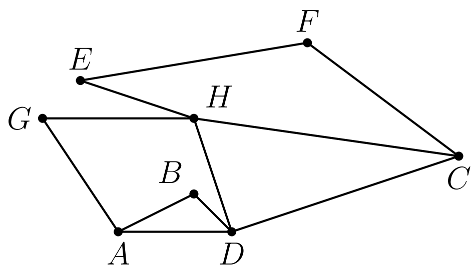
3. Пусть $P(x)$ — многочлен четвертой степени с единичным старшим коэффициентом, для которого $P(-1) = -1$, $P(2) = -4$, $P(-3) = -9$, $P(4) = -16$. Найдите $P(1)$.

4. Найдите $f(-2)$, если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что для любого $x \neq 0$

$$3f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2f(x)}{x} = x^2.$$

Дискретный Вася.

1. Вася хочет обвести картинку, не отрывая ручки от листа и не обводя никакой отрезок дважды. Укажите какой-нибудь порядок обхода. (Все возможные порядки перечислять не нужно. Например, если ваш обход начинается в букве H, а дальше идет по отрезку GH, то запись должна начинаться так: HGA...)



2. Помогите Васе найти четырехзначное число, которое выражается в виде суммы двух квадратов натуральных чисел не менее чем двумя способами.

3. Вася хочет как можно дольше выписывать натуральные делители числа 30030 (включая единицу и число) так, чтобы отношение любых двух соседних делителей было простым числом. Сколько делителей он сможет так выписать?

4. Вася нарисовал двудольный граф, долями которого являются двух- и трехэлементные подмножества некоего 20-элементного подмножества, а ребра соединяют пересекающиеся подмножества из разных долей. Сколько всего ребер нарисовал Вася?

Геометрические мотивы.

1. Квадрат и правильный шестиугольник имеют равные стороны. Площадь квадрата равна $\sqrt{12}$. Найдите площадь шестиугольника.

2. Найдите длину XD, если $XA = 15$, $XB = 7$, $XC = 20$ и $ABCD$ – квадрат.

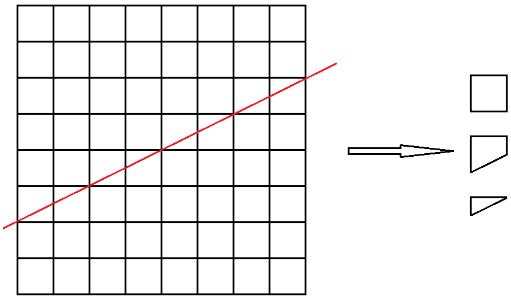
3. Углы A и B бумажного прямоугольника $ABCD$ ($AB = 18$, $AD = 15$) загнули внутрь так, что точки A и B совместились. Найдите площадь получившейся трапеции.

4. Длины сторон треугольника равны $AB = 65$, $BC = 33$, $AC = 56$. Найдите радиус окружности, которая касается двух сторон AC и BC и описанной окружности треугольника ABC.

Олимпиадная смесь.

1. Для какого минимального натурального n верно утверждение "Если рассадить n кроликов по 13 клеткам, то обязательно найдутся три клетки, в которых суммарно будет не меньше 13 кроликов"?

2. Шоколадку из квадратных долек (8×8) разрезали ножом по прямой на два куска, а потом разломали каждый кусок на отдельные дольки. Какое максимальное количество неравных кусочков могло при этом получиться? (Например, в случае, показанном на рисунке, получаются три неравных кусочка.)



3. На дискотеке были юноши и девушки — вместе 100 человек. На каждом медленном танце некоторые из них танцевали друг с другом (в каждой паре партнёры разного пола, в течение одного танца пары не меняются; каждая пара танцует вместе не больше одного танца за всю дискотеку). Оказалось, что все юноши танцевали с разным количеством девушек (в том числе, возможно, с нулевым), а вот все девушки танцевали с одинаковым количеством юношей. Какое минимальное количество медленных танцев могло быть на дискотеке?

4. Назовём слабым ферзём шахматную фигуру, которая бьёт как ферзь, но только на две клетки в каждом направлении (таким образом, она может бить максимум 16 клеток). Какое наибольшее целое количество миллионов слабых ферзей, не бьющих друг друга, можно поставить на доске 30000×30000? (Например, если Вы считаете, что 49 миллионов поставить можно, а 50 миллионов уже нельзя, то ответьте 49.)

Второй отборочный тур олимпиады ЮМШ

Алгебра и математический анализ.

1.1 Известно, что длины сторон прямоугольника равны $\sin(x)$ и $\cos(x)$ для некоторого x $\in \mathbb{R}$. Чему, самое большее, может равняться его площадь?

1.2. Дана дробь, в числителе которой выписаны подряд все натуральные числа от 1 до 1009 в порядке возрастания, а в знаменателе – подряд все натуральные числа от 2020 до 1011 в порядке убывания. Найдите все числа x, обладающие следующим свойством: если прибавить x к числителю и знаменателю данной дроби, то получится дробь, полученная из исходной приписыванием в конец к числителю и к знаменателю числа 1010. (Ответ запишите десятичной дробью или целым числом).

1.3. Найдите произведение всех вещественных корней уравнения $x^4 + (2-x)^4 = 34$.

1.4. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{19}$ – положительные вещественные числа . Известно, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{19}} = 20$ и $x_1 + x_2 + \cdots + x_{19} = 20$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $x_1 + \frac{1}{x_1}$?

Дискретный Вася.

2.1. Вася захотел найти два квадрата натуральных чисел, что если приписать один из них к другому, то получится четырехзначное число, которое тоже является квадратом. Помогите ему (в ответе запишите получившиеся четырехзначное число).

2.2. Из шахматной доски вырезали все клетки с согласной буквой и простой цифрой. Шахматный конь стоит на клетке b1 и хочет добраться по невырезанной части доски до клетки a2 не более чем за 8 ходов. Помогите ему. (Ответ должен быть записан в виде последовательности клеток, на которые становится конь. Клетки пишутся одной строчкой без пробелов. Например, a3c4e3...)

2.3. В государстве 1000 городов и совсем нет дорог. Король Василий I хочет соединить каждую пару городов дорогой. Для этого он каждый год разбивает города на две группы и проводит между всеми парами городов из разных групп недостающие дороги. За сколько лет он управится (в ответе укажите наименьшее возможное значение)?

2.4. Вася нарисовал граф, вершинами которого являются двухэлементные множества 20-элементного подмножества, а ребра соединяют пересекающиеся множества. Сколько в этом графе циклов на четырех вершинах?

Геометрические мотивы.

3.1. Окружность вписана в правильный треугольник площади 30 и одновременно описана вокруг правильного шестиугольника. Найдите площадь этого шестиугольника.

3.2. На окружности, вписанной в квадрат, взята точка K. Расстояния от K до ближайших к ней сторон квадрата равны 1 и 2. Найдите длину стороны квадрата.

3.3. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 16$, $AC = 5$. Пусть I – точка пересечения его биссектрис. Найдите длину BC, если $AI = 4$.

3.4. Треугольный кусок бумаги площади 120 перегнут по прямой, параллельной одной из своих сторон, и сделан плоской фигурой. Чему равна минимально возможная площадь такой фигуры?

Олимпиадная смесь.

4.1. Найдите наибольшее возможное число с неповторяющимися цифрами, в котором каждая цифра, начиная с третьей, является делителем произведения двух предыдущих цифр (например, как в числе 5632).

4.2. Для вещественных чисел a и b введена операция "звездочка": $a \star b = sin(a) \cdot cos(b)$. Пусть x и y – такие два вещественных числа, что $x \star y - y \star x = 0.5$. Чему равно наибольшее возможное значение выражения $x \star y + y \star x$?

4.3. По кругу стоят 60 человек. Каждый из них — либо рыцарь (говорит только правду), либо лжец (говорит только неправду). Каждый произносит: «Оба моих соседа лжецы». Потом они перестраиваются в другой хоровод, и каждый говорит: «Оба моих соседа — те же, что и в прошлый раз». Каково максимально возможное количество рыцарей в кругу?

4.4. Мама ушла, вручив папе и сыну пакет с n конфетами ($n > 10$), и попросила оставить ей хотя бы 10 конфет. Папа и сын решили сыграть в такую игру. Они по очереди берут из пакета конфеты, первый ход делает папа. За один ход можно взять и съесть не больше половины конфет, находящихся в пакете, при этом папа каждым своим ходом берет чётное (и ненулевое) количество конфет, а сын — нечётное. Проигрывает тот, после чьего хода в пакете оказывается меньше 10 конфет. Укажите наибольшее n, при котором отец сумеет выиграть, как бы ни играл сын.