8 класс

1. В классе 10 человек, у каждого три друга среди одноклассников. Они разбились на 5 команд по 2 человека, в каждой команде — друзья. Учительница сказала переделиться по другому, так как Вася и Петя не должны быть в одной команде. Вася заметил: «Но тогда какая-то из команд обязательно не будет дружной». Приведите пример, как такое может быть.

2. У пяти патрициев есть по пять статуй, каждая стоит натуральное число сестерциев. Сначала патриции померились, у кого суммарная стоимость статуй больше, потом каждый расколотил свою самую дешёвую статую. Затем они померились опять, расколотили самые дешёвые из своих оставшихся статуй, и так ещё три раза, пока не уничтожили все статуи. Могло ли быть так, что единоличным победителем каждый раз оказывался кто-то новый?

3. Андрей расставил в клетках доски 10×10 фишки ста различных цветов. Каждую минуту одна из фишек меняет цвет, причём меняться может только такая фишка, которая перед этой операцией была уникальной (то есть отличалась цветом от всех остальных) в своей строке или в своём столбце. Через N минут оказалось, что ни одна фишка больше не может перекраситься. Чему, самое меньшее, могло равняться N?

4. Даны три вещественных числа, больших 1. Произведение любых двух из них больше, чем сумма этих двух. Докажите, что произведение всех трёх чисел больше, чем их сумма, увеличенная на 2.

5. Сумма трёх наибольших натуральных делителей натурального числа N в 10 раз больше суммы трёх наименьших его натуральынх делителей. Найдите все возможные значения N.

6. В треугольнике ABC угол A равен $50°$, BH — высота. Точка M на BC такова, что $BM = BH$. Серединный перпендикуляр к отрезку MC пересекает AC в точке K. Оказалось, что $AC = 2 \cdot HK$. Найдите углы треугольника ABC.

7. На окружности через равные промежутки расставили 33 точки. Соседние точки соединили отрезками так, что получился 33-угольник. Каждую сторону этого 33-угольника покрасили в один из трёх цветов, и оказалось, что отрезков каждого цвета поровну. Докажите, что можно разбить 33-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники, покрасив каждую диагональ в один из тех же трёх цветов, чтобы каждый треугольник имел по стороне каждого цвета.

8. Два игрока по очереди выписывают друг за другом единицы или двойки. Тот, после чьего хода сумма нескольких последних цифр станет равной **(а)** 533; **(б)** 1000, проиграл. Кто выиграет, если оба игрока будут стремиться к победе?