

Олимпиада ЮМШ

2019–2020 гг

Часть I

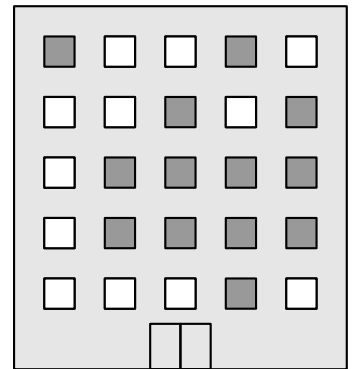
Заочный тур

4 класс

В каждой из трёх задач сформулировано по четыре вопроса. Ответ на вопрос подразумевает полное развернутое решение. Если в вопросе требуется привести пример, то нужно просто привести пример. Если в вопросе требуется что-либо вычислить, то нужно привести всю последовательность вычислений. Если вопрос сформулирован в виде «может ли», то нужно привести пример, если считаете, что может, а если считаете, что не может, то необходимо доказать это. Если вопрос сформулирован в виде «какое наибольшее/наименьшее...», то требуется предъявить пример, для которого достигается наибольшее/наименьшее значение, и показать, что больше/меньше получить нельзя. Если в вопросе требуется перечислить варианты или сказать «сколько может быть», то необходимо перечислить все возможные варианты и доказать, что других вариантов нет.

За полный ответ на вопрос начисляется количество баллов, указанное рядом с вопросом. За неполный ответ начисляется меньшее число баллов в зависимости от полноты ответа. Результат по олимпиаде равен сумме набранных баллов.

1. На рисунке изображена одна сторона пятиэтажного дома, у которого в некоторых окнах горит свет (они нарисованы белыми). В этом доме всё как обычно: все квартиры одноэтажные, расположение квартир на каждом этаже одинаковое, каждая квартира хотя бы одним окном выходит на эту сторону, окна от одной квартиры могут идти только подряд.



(а) Какое наибольшее число квартир может быть в этом доме? (1 балл)

(б) Может ли в этом доме быть 13 квартир? (3 балла)

(в) Сколько квартир может быть в доме, если на первом этаже свет горит ровно в двух квартирах? (6 баллов)

(г) Пусть известно, что свет горит ровно в 9 квартирах. Перечислите все возможные расположения квартир на этажах и докажите, что других вариантов нет. (10 баллов)

2. В этой задаче рассматриваются фигурки, нарисованные на клетчатой бумаге. Каждая такая фигурка состоит из целых клеток, склеенных по сторонам и вместе образующих один кусок. Если из фигурки вырезать какие-то клетки, то она может развалиться на несколько кусков (когда два куска касаются только уголком, они разваливаются).

(а) Приведите пример фигурки, состоящей более чем из двух клеток, которая не развалится, какую бы клетку из нее ни вырезали. (1 балл)

(б) Приведите пример такой фигурки, из которой можно вырезать ровно 4 клетки так, чтобы фигурка без этих четырёх клеток не развалилась на куски, и можно четырьмя способами вырезать всего по одной клетке так, чтобы остальная часть развалилась. (3 балла)

(в) Пять одинаковых фигурок лежали стопкой, одна под другой. Потом одну фигурку сместили на клетку влево, другую — на клетку вправо, третью — на клетку вниз, а четвертую — на клетку вверх. Затем из каждой фигурки вырезали одну клетку, причем все вырезанные клетки оказались строго одна под другой. Могло ли оказаться так, что одна фигурка развалилась, а четыре других — нет? (6 баллов)

(г) Докажите, что любую фигурку из 533 клеток можно развалить, вырезав из нее не более двух клеток. (10 баллов)

3. В кружке магии и волшебства все ученики первого и второго годов обучения ходят в красных мантиях, ученики третьего года — в синих, а четвёртого — в чёрных.

В прошлом году на общем собрании учеников было 15 красных, 7 синих и несколько чёрных мантий, а в этом году — синих и чёрных — поровну, а красных — вдвое больше, чем синих.

(а) Сколько черных мантий будет на общем собрании в следующем году? (1 балл)

(б) Сколько в этом году учеников первого года обучения? (3 балла)

(в) Через какое наименьшее число лет синих и чёрных мантий снова может быть поровну? (6 баллов)

(г) Пусть дополнительно известно, что каждый год количество учеников первого года обучения на 1 меньше количества учеников четвертого года обучения. Через сколько лет количество красных мантий впервые станет втрое больше количества синих? (10 баллов)