11 класс

Сюжет 1.

На n карточках написали по k чисел, сумма на каждой карточке равна m. Оказалось, что любой набор из k неотрицательных чисел с суммой 1 можно получить, уменьшив некоторые числа на одной из карточек (наборы неупорядоченные). Пусть $a(n,k)$ — наименьшее m, при котором это возможно.

1.1. Найдите $a(2,2)$.

1.2. Докажите, что найдется n такое, что $a(n,10^{100}) \leqslant 1+10^{-100}$.

1.3. Докажите, что $a(2,4) < \sqrt{3}$.

1.4. Ограничена ли последовательность $a(2,k) - a(1,k)$?

Сюжет 2.

Две окружности, вписанные в угол с вершиной R, пересекаются в точках A и B. Через A проведена прямая, пересекающая меньшую окружность в точке C, а большую — в точке D. Оказалось, что $AB = AC = AD$.

2.1. Пусть C и D совпали с точками касания окружностей и угла. Докажите, что угол R прямой.

2.2. Пусть C и D совпали с точками касания окружностей и угла. Чему может быть равен угол ADR?

2.3. Докажите, что если $\angle R$ прямой, то C и D совпадают с точками касания окружностей и угла.

2.4. Какие значения может принимать угол RAO_1, где O_1 — центр меньшей окружности?

Сюжет 3.

В этом сюжете разрешается использовать (без обоснования) так называемую *малую теорему Ферма*, гласящую, что для всякого целого числа a и простого натурального числа p справедливо соотношение «$a - a^p$ делится на p без остатка».

Итак, $p > 2$ — простое число. Маша должна понять, есть ли среди чисел

$$a^1 + b^1,\ a^2 + b^2,\ \ldots,\ a^{p-1} + b^{p-1}$$

значения, дающие одинаковые остатки от деления на p.

3.1. Пусть $a = 4$, $b = 9$. Докажите, что искомая пара найдётся.

3.2. Пусть $a = 4$, $b = 3$. Докажите, что найдётся искомая пара, содержащая одно из крайних чисел.

3.3. Докажите, что искомая пара найдётся при $a = 4$, $b = 7$.

3.4. Докажите, что искомая пара найдётся, если $a = 2$, $b = 3$, а $\frac{p-1}{2}$ — простое.