6 класс

1. На шахматной доске отмечено несколько клеток. Ладья может проходить через эти клетки, но не может на них останавливаться. Может ли оказаться, что кратчайший путь от A1 до C4 содержит 3 хода ладьи, от C4 до H8 — 2 хода, а от A1 до H8 — 4 хода?

Решение. Может. Например, отмечены все клетки, кроме A1, A2, C2, C4, C8, H8. □

2. От головы до хвоста зебры Иппотигриса — 360 полосок одинаковой ширины. Блошка Машка и блошка Дашка поползли от головы зебры к её хвосту. Одновременно с ними блошка Сашка поползла от хвоста к голове. Блошка Дашка ползёт вдвое быстрее блошки Машки. До встречи с блошкой Сашкой Машка преодолела ровно 180 полосок. Сколько полосок преодолеет блошка Дашка перед тем, как встретится с блошкой Сашкой?

Решение. 240 полосок.

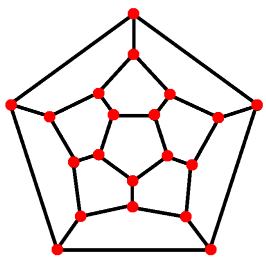
Машка проползла половину зебры. Пусть её скорость v, тогда скорость сближения Машки и Сашки $2v$, а скорость сближения Дашки и Сашки $3v$. Значит, Сашка до встречи с Дашкой проползёт в $3/2$ раза меньше полосок, чем до встречи с Машкой, т. е. 120 полосок. Остальные 240 полосок проползёт Дашка. □

3. В ряд выстроились 100 рыцарей и 100 лжецов (в каком-то порядке). Первого человека спросили: «Ты рыцарь?», а остальных по очереди: «Верно ли, что предыдущий человек ответил «Да»?» Какое наибольшее количество людей могли сказать «Да»? Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда врут.

Решение. 150, например, если сначала стоят 100 рыцарей, а потом 100 лжецов. Докажем теперь, что это максимум.

Рассмотрим любого лжеца, кроме, возможно, первого. Либо он сказал «нет», либо предыдущий человек сказал «нет». Таким образом, каждому из 99 лжецов мы сопоставляем хотя бы один ответ «нет» (его или предыдущего), а каждый ответ «нет» сопоставлен не более чем двум лжецам. Значит, ответов «нет» не менее 50. □

4. Страна Додекаэдрия имеет 20 городов и 30 авиалиний между ними. Карта авиалиний Додекаэдрии показана на рисунке. В одном из городов находится Фантомас, которого хочет изловить полиция. Каждый день Фантомас перелетает в другой город, используя ровно одну авиалинию. Каждый вечер полиции становится известно, в каком городе находится Фантомас. За ночь полиция совместно с авиакомпанией закрывают одну авиалинию между какими-то двумя городами, но взамен они должны открыть новое авиасообщение между какими-нибудь городами, между которыми авиалинии на данный момент нет (возможно, она была закрыта ранее). Фантомас попадается, если утром не может никуда перелететь. Сможет ли полиция поймать Фантомаса?



Решение.

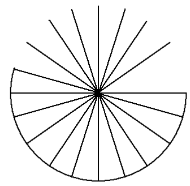
Способ 1, в котором не требуется даже видеть Фантомаса, пока он не пойман.

Полиция сможет поймать Фантомаса следующим образом: полицейские мысленно разбивают множество городов на две непересекающиеся группы А и Б по 10 городов.

Следующими действиями полицейские делает все авиалинии внутренними для группы А. Это возможно, т. к. в группе $(10 \cdot 9)/2 = 45$ возможных мест под авиалинии, а авиалиний всего 30.

Если Фантомас ещё не пойман, следующими действиями полиция перебрасывает линии так, чтобы они становились внутренними для группы Б. Т. к. на этом этапе линий между А и Б нет и не появляется, Фантомас не сможет перебраться в группу Б, и, тем самым, будет пойман, когда все 30 авиалиний станут внутренними для группы Б.

Способ 2. Допустим, Фантомас в вершине A, которая входит в грань $ABCDE$. Тогда полиция пять ночей подряд закрывает авиалинии, которые ведут из кольца $ABCDE$ в остальную страну. Причём это можно делать так, чтобы Фантомас оставался в одной из вершин $ABCDE$. Потом убираем рёбра AB, BC, CD, DE. Всё, Фантомас пойман на 11-й день. Очевидно, что в остальной стране провести 10 авиалиний нетрудно.



Способ 3. Заметим, что полиция может превратить граф дорог в любой другой, если в нём столько же рёбер, сколько в исходном (30). Например, участник олимпиады Александр Ульянов использовал граф, нарисованный справа. На таком графе ловить Фантомаса гораздо легче (например, примерно как в Способе 2).

Полезное замечание. Схема дорог Додекаэдрии представляет собой граф правильного додекаэдра. Поэтому все вершины города в ней равноправны, так же как и все пятиугольные циклы. То есть нет необходимости отдельно рассматривать случаи, когда начальный город находится «на внешнем контуре», «на внутреннем контуре» и т. д.

□

5. Костя заменил в примере на сложение четные цифры на гласные буквы, а нечетные — на согласные (одинаковые цифры на одинаковые буквы, разные цифры на разные буквы). Мог ли получиться ребус КРОНА + УНЦИЯ = ТУРКА?

Решение. Допустим, что такой пример мог получиться. Убедимся, что в этом примере нет переносов через разряд. Посмотрим на разряды, начиная со старшего. К + У = Т (если нет переноса) или К + У = Т − 1 (если он есть). По чётности видим, что реализуется первый вариант. Аналогично с остальными разрядами.

Итак, переносов разрядов нет. Но тогда сумма цифр слагаемых равна сумме цифр суммы, т. е.

$$\text{К} + \text{Р} + \text{О} + \text{Н} + \text{А} + \text{У} + \text{Н} + \text{Ц} + \text{И} + \text{Я} = \text{Т} + \text{У} + \text{Р} + \text{К} + \text{А},$$

или Т = О + Н + Н + Ц + И + Я, чего быть не может: правая часть не менее 10. □

6. Есть клетчатая таблица, в которой некоторые клетки закрашены. «Я могу закрасить ещё по 5 клеток в каждой строке, — сказал Яков, — и тогда в каждом столбце будет закрашено столько же клеток, сколько в каждой строке сейчас.» «А я могу стереть по три клетки в каждом столбце, — ответил Юрий, — и тогда в каждой строчке будет закрашено столько же клеток, сколько в каждом столбце сейчас.» Докажите, что кто-то из них ошибается.

Решение. Ясно, что если в каждой строке закрасить ещё по 5 клеток, то во всех строках будет поровну закрашенных клеток; значит, и изначально в строках поровну закрашенных клеток. То же рассуждение верно и для столбцов.

Пусть в таблице k строчек по x закрашенных клеток в каждой, и в то же время n столбцов, по y закрашенных клеток в каждом. Тогда $kx = ny$, а также $k(x + 5) = nx$, $n(y - 3) = ky$.

Отсюда $kx + 5k = nx$, $ny - 3n = ky$, или $ny + 5k = nx$, $kx - 3n = ky$, т. е. $n(x - y) = 5k$, $k(x - y) = 3n$. Значит, $5k^2 = 3n^2$, а такого не бывает (например, простой множитель 3 входит в левую часть в чётной степени, а в правую в нечётной). □

7. Есть полоска из 101 клетки, по ней может ходить фишка: на любое чётное число клеток вперёд, и на любое нечётное — назад. Вася и Петя хотят обойти своими фишками все клетки доски по разу: Вася — начиная с первой клетки, а Петя — начиная со пятидесятой. У кого больше способов это сделать?

Решение. Способов поровну. Представим себе, что это не полоска, а кольцо (соединим начало с концом), а двигаться можно только вперёд и только на чётное число клеток. Сделать ход на нечётное количество клеток назад равносильно тому, чтобы сделать ход на чётное количество клеток вперёд по кольцу. Получилась эквивалентная задача, в которой уже неважно, с какой клетки стартовать. □