Часть II

Очный тур

4 класс

1. Вини-Пух решил подарить Ослику горшочек с мёдом. По дороге к Ослику он несколько раз попробовал мёд из горшочка. Когда он попробовал мёд первый раз, горшочек стал вдвое легче. И после второго раза горшочек вновь полегчал вдвое. И после третьего! И после четвёртого! Правда, после четвёртого раза мёда совсем не осталось. Сколько же Вини-Пух съел мёда, если горшочек без мёда весит 200 граммов?

Решение. Ответ: 3000 г. Действительно, $3000 = (((200 \cdot 2) \cdot 2) \cdot 2) \cdot 2) - 200$. □

2. У Пети есть несколько пятирублёвых монет и несколько двухрублёвых монет. У Вани столько же пятирублёвых монет, сколько у Пети двухрублёвых, и столько двухрублёвых, сколько у Пети пятирублёвых. У Пети на 60 рублей больше, чем у Вани. Каких монет у Пети больше — пятирублёвых или двухрублёвых? На сколько?

Решение. Ответ: у Пети пятирублёвых монет больше на 20 штук.

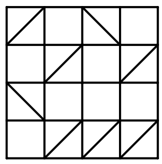
Предположим, что у Пети больше двухрублёвых монет, чем пятирублёвых. Пусть Петя уберёт у себя одну двухрублёвую монету, а Ваня — одну пятирублёвую. Тогда разность сумм Пети и Васи увеличится на 3. Если ребята повторят эту операцию до тех пор, пока у Пети пятирублёвых и двухрублёвых монет не станет поровну, то суммы у Пети и у Васи должны стать равными (так как состав монет у них будет одинаковый), но их разность будет не меньше 60. Это противоречие. Значит, у Пети больше пятирублёвых монет.

Пусть тогда Петя уберёт у себя одну пятирублёвую монету, а Ваня — одну двухрублёвую. Тогда разность сумм Пети и Васи уменьшится на 3. Если ребята повторят эту операцию до тех пор, пока у Пети пятирублёвых и двухрублёвых монет не станет поровну, то суммы у Пети и Васи станут равными (так как состав монет у них будет одинаковый). Значит, они сделали эту операцию $60 : 3 = 20$ раз. Следовательно, изначально у Пети было пятирублёвых монет на 20 штук больше, чем двухрублёвых.

Если коротко, то
$$60 = 5n + 2k - (5k + 2n) = 3(n - k).$$
Следовательно, $n - k = 60 : 3 = 20$. □

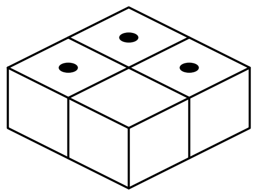
3. Нарисуйте в тетради квадрат 4×4 клетки. В клетках этого квадрата проведите 8 диагоналей так, чтобы в каждой клетке было не более одной диагонали, диагонали не имели общих концов и больше уже нельзя было бы добавить ни одну диагональ, сохраняя эти правила.

Решение. Например, так:



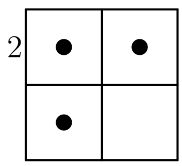
□

4. Пират Костя любит играть в кости и домино. У него есть есть 4 абсолютно одинаковых игральных кубика, у каждого из которых сумма цифр на противоположных гранях равна 7, и если посмотреть на грань 1 сверху, то боковые грани 2, 4, 5, 3 будут идти по часовой стрелке в указанном порядке. Костя складывает кубики по правилам домино: если два кубика соприкасаются гранью, то цифры на этих гранях одинаковые. Сможет ли Костя сложить кубики в квадрат (см. рисунок) так, чтобы сверху было ровно три единицы?

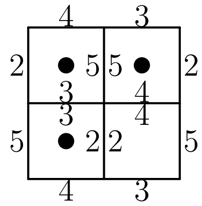


Решение. Ответ: Не сможет.

Рассмотрим вид сверху и предположим, что левая верхняя боковая грань — это 2:



Тогда последовательно получаем следующее расположение цифр на боковых гранях:

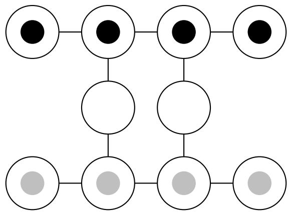


Следовательно, на оставшейся пустой грани может быть только цифра 1. Если на левой верхней боковой грани стоит 4, или 5, или 3, то рассуждения аналогичны. □

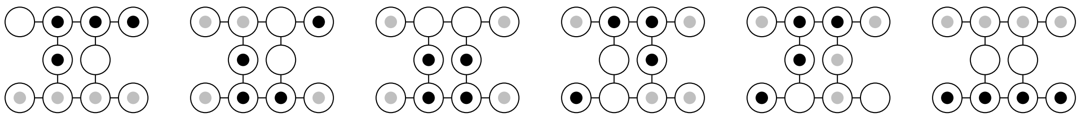
5. Вася выписал в тетрадь несколько различных чисел, а затем начал выписывать некоторые их попарные суммы. Когда он закончил оказалось, что каждое изначально выписанное число входит ровно в 13 сумм. Может ли сумма всех выписанных чисел быть равна 533?

Решение. Каждое изначально выписанное число входит в итоговую сумму 14 раз: один раз самостоятельно и 13 раз в составе попарной суммы. Следовательно, 533 должно делиться на 14, но оно не делится. Поэтому сумма 533 получиться не могла. □

6. Поле состоит из десяти кружков, соединённых линиями. В четырёх верхних кружках стоят чёрные фишки, а в четырёх нижних — серые фишки. Фишки можно передвигать вдоль линий на свободный кружок. Как можно поменять чёрные и серые фишки местами?



Решение. Вот некоторые промежуточные этапы:



□

7. Есть несколько (больше двух) стопок бумаги с разным числом листов. Если есть пара стопок, в которых разное число листов, то можно из любой другой стопки убрать лист бумаги. Можно ли сделать так, чтобы во всех стопках было одинаковое число листов?

Решение. Допустим, это возможно. Тогда последним ходом мы убрали лист с некоторой стопки, и число листов во всех стопках стало равным. Значит, до того как мы убрали последний лист, число листов во всех стопках, кроме той стопки, с которой убран лист, было равным. Но для того, чтобы убрать лист из стопки, должны существовать две другие стопки с разным числом листов. Поэтому мы не сможем убрать последний лист. □