11 класс

Сюжет 1

У Георгия Константиновича есть сад, по которому иногда пробегает Эрих. Эрих бегает по прямой, но каждый раз по новой. Георгий Константинович хочет закупить и расставить противотанковые ежи (в виде нескольких отрезков внутри или по границе сада) так, чтобы Эрих гарантированно в них уперся. Длиной ежа называется сумма длин составляющих его отрезков.

1. Пусть сад имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу хватит ежей суммарной длиной $\sqrt{3}$.

2. Пусть сад имеет форму квадрата со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу хватит ежей суммарной длиной 2,64.

3. Пусть сад имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу придется купить ежей длиной хотя бы 1,29.

4. Пусть сад имеет форму квадрата со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу придется купить ежей длиной более 2.

Сюжет 2

В магической стране есть несколько школ. Некоторые из них соединены беспосадочными маршрутами совиной почты. Кратчайшим путем между школами называется путь, для которого сове понадобится наименьшее количество перелетов. Страна называется *гармоничной*, если для любых трех различных школ Ю, М и Ш существует единственная школа (называемая *медианой*), принадлежащая одновременно каким-то кратчайшем путям из Ю в М, из М в Ш и из Ю в Ш (она может совпадать с одной из школ Ю, М, Ш).

1. Докажите, что если в стране любые две школы соединяет ровно одна цепочка беспосадочных маршрутов, то эта страна гармонична.

2. Докажите, что если страна является гармоничной, то можно назвать некоторые школы *добрыми*, а остальные *злодейскими* так, чтобы любой беспосадочный маршрут соединял добрую школу со злодейской.

3. В стране Гиперляндии 2^n школ, названиями которых являются все возможные последовательности из символов 0 и 1 длины n, при этом между школами есть беспосадочный маршрут тогда и только тогда, когда их названия отличаются ровно в одном символе. Докажите, что Гиперляндия — гармоничная страна.

4. Пусть в гармоничной стране n школ, каждая из которых соединена беспосадочными маршрутами ровно с d другими. Докажите, что $d < 2\sqrt[3]{n}$.

Сюжет 3 На доске написана четвёрка целых чисел. Разрешается менять написанную на доске четверку (a, b, c, d) на четверку $(f(a), f(b), f(c), f(d))$, где $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ — кубический многочлен с целыми коэффициентами p, q, r, s, произвольное количество раз (при этом можно брать различные f на разных шагах).

1. Можно ли из четверки с числами 2, 4, 5, 7 получить четвёрку чисел 0, 3, 6, 9 в каком-нибудь порядке?

2. Можно ли из четверки $(-3, -1, 1, 3)$ получить $(-3, -1, -3, 3)$ (числа именно в таком порядке)?

3. Верно ли, что четверку $(1, 2, 3, 4)$ можно превратить в четверку

$$(1^{9999}, 2^{9999}, 3^{9999}, 4^{9999})$$

применением только лишь квадратных трехчленов (т. е. на каждом шаге $p = 0$)?

4. Докажите, что если четвёрку (k, l, m, n) можно получить из четвёрки (a, b, c, d) многократным применением указанных операций, то то же можно сделать и за одну операцию.