Задачи заочного тура 8 класса

1. См. задачу 4 для 6 класса.

2. *В углах квадратного двора стоят четыре дома, в которых живут 77 хулиганов, дружащих между собой. Начиная с 1 января 2017 года каждый день навсегда ссорились какие-то два хулигана из разных домов, а к 1 января 2018 года оказалось, что друзей из соседних домов не осталось. Докажите, что какая-то из ссор была между хулиганами из противоположных домов.*

Решение. Предположим противное. Далее см. решение задачи 7 для 6 класса.

3. *В наборе были гирьки массой 5, 24 и 43 грамма, поровну каждого вида. Все имеющиеся гирьки взвесили, и их масса оказалась равной* $606060\ldots60$ *граммам. Докажите, что более 10 гирек потеряно.*

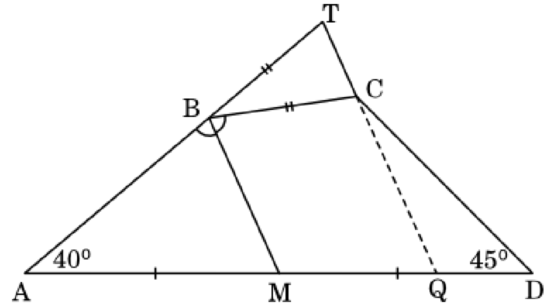
Решение. Если ни одна гирька не потеряна, то суммарный вес должен делиться на 24, а он имеет остаток 12 от деления на 24 (т. к. делится на 3 и на 4, но не на 8). Значит, суммарный вес потерянных гирь тоже имеет остаток 12 от деления на 24. Поймём, как получить остаток 12 наименьшим количеством (потерянных) гирь. Можно считать, что не потеряна ни одна 24-граммовая гиря и не потеряна пара гирь $5+43$, т. к. ни то, ни другое не меняет остатка от деления на 24. Значит, считаем, что потеряны либо только 5-граммовые гири, либо только 43-граммовые. Любых из них нужно хотя бы 12.

4. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол A равен 40°, угол D равен 45°, биссектриса угла B делит AD пополам. Докажите, что $AB > BC$.*

Решение. Рассмотрим на продолжении стороны AB за точку B такую точку T, что $BT = BC$. Пусть M — середина AD. Тогда $\angle BTC = \angle TCB = \frac{1}{2}\angle ABC$, то есть BM параллельна TC. Обозначим за Q точку пересечения прямых TC и AD; покажем что она лежит на отрезке AD. Это так, поскольку

$$\angle BCD + \angle TCB = (360^\circ - \angle BAC - \angle ABC - \angle ADC) + \angle TCB = \\ = 275^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC > 180^\circ.$$

Значит, $AM > MQ$ и $AB > BC$.



5. См. задачу 5 для 7 класса.

6. *В противоположных углах шахматной доски стоят кони. Двое игроков по очереди вырезают из доски свободные клетки. Проигрывает тот, после чьего хода один конь не сможет доскакать по доске до другого. Кто из игроков сможет выиграть, как бы ни ходил другой?*

Решение. Заметим, что в момент перед последним ходом у нас останется только клетки, образующие путь между конями, иначе можно сделать еще больше одного хода. Поскольку при ходе коня клетка под конем меняет цвет, все пути между конями состоят из нечетного количества клеток. Значит, перед последним ходом будет выкинуто тоже нечетное количество клеток, и этот ход достанется второму игроку. То есть выиграет первый игрок.

7. *Найдите все простые p и натуральные n, удовлетворяющие равенству $p^2 + n^2 = 3pn + 1$.*

Решение. Очевидно, $n^2 - 1 = p(3n - p)$, то есть n равно ± 1 по модулю p. Подставим $n = ap \pm 1$ в равенство, после преобразований получим

$$(a^2 + 1 - 3a)p^2 = \pm(3 - 2a)p.$$

Значит, $(3 - 2a) \vdots p$.

Если $a = 0$, выходит решение $p = 3$, $n = 1$.

Иначе $a \geqslant 3$. С другой стороны, $n \leqslant 3p$, иначе правая часть исходного равенства больше левой. Тогда n может быть равно только $3p - 1$, откуда легко следует $p = 3$, $n = 8$.