9-11 класс, 1 отбор

АЛГЕБРА

10. Известно, что $\sqrt{4+x} + \sqrt{10-x} = 4$. Чему равен $\sqrt{(4+x)(10-x)}$?

20. В метро работает два эскалатора, двигающиеся вниз и вверх соответственно с одинаковой скоростью. Люди на этих эскалаторах распределяются равномерно и стоят (т.е. неподвижны относительно эскалатора), но потоки людей, едущих вверх и вниз, неодинаковы. За время движения по эскалатору вниз Петя насчитал 250 человек на встречном эскалаторе. Ровно за тот же отрезок времени Вася, проехавший весь эскалатор вверх, насчитал 300 человек, спускающихся вниз. А сколько человек (в обе стороны) за тот же период времени проедет мимо контролёра, сидящего в будке у основания эскалатора?

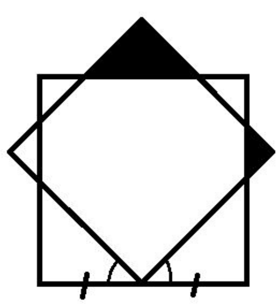
30. Найдите целое число n, удовлетворяющее неравенству:

$$\frac{1}{10^{n+1}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2015}{2016} < \frac{1}{10^n}$$

40. Стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его массы. В процессе огранки бриллиант раскололся на три части, одна из которых вдвое тяжелее другой. Стоимость трёх обломков была оценена в 100000 долларов. Найдите максимальную стоимость, которую мог иметь исходный бриллиант.

ГЕОМЕТРИЯ

10. На чертеже изображены два равных квадрата. Во сколько раз площадь большего закрашенного треугольника превышает площадь меньшего?



20. Биссектриса внешнего угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Оказалось, что $\angle ACD = \angle ACB = 37°$. Найдите угол A треугольника ABC.

30. OT — биссектриса угла MON. Окружность с центром P касается лучей OM и OT в точках A и A' соответственно, а окружность с центром Q касается лучей ON и OT в точках

B и B' соответственно. Радиус первой из этих окружностей вдвое больше, чем радиус второй. Пусть H — точка пересечения прямых AB' и OP. Найдите $A'B$, если $HB' = 5$.
40. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C прямые, H — точка пересечения диагоналей, $AH = 2$, $HC = 1$, $BD = 2\sqrt{3}$. Найдите квадрат периметра $ABCD$.

КОМБИНАТОРИКА

10. На каждой клетке шахматной доски 8x8 стоит фишка. Сколькими способами можно переставить эти фишки между собой так, чтобы расстояние между любыми двумя фишками не уменьшилось и хотя бы одна фишка изменила своё местоположение? Под расстоянием между фишками подразумевается расстояние между центрами их клеток. Исходная расстановка тоже учитывается.
20. Владик, Катюша, Миша и Соня встали вокруг толстого столба, взявшись за руки, чтобы поиграть. Игру начинает Катюша, она подмигивает одному из соседей. Каждый, кому подмигнули, должен тоже подмигнуть одному из своих соседей. Сколько способов у них подмигнуть 15 раз так, чтобы последнее подмигивание тоже совершила Катюша?
30. У повара Олега в коробке лежат 150 болгарских перцев красного, оранжевого и жёлтого цветов. Если он, не глядя, возьмёт из коробки 35 перцев, среди них обязательно найдутся 15 перцев одного цвета. Какое наименьшее число перцев ему нужно, не гладя, взять из коробки, чтобы среди них обязательно нашлось 40 перцев одного цвета?
40. На столе лежит триста золотых монет. Кот Базилио и лиса Алиса играют в игру. Каждым ходом Базилио берёт несколько монет со стола и складывает их в отдельный кошелёк, а Алиса выбирает, кому достанется этот кошелёк. Если монеты закончились, игра заканчивается. Если у кого-то из них оказалось 11 кошельков, то другой забирает себе все оставшиеся монеты. Какое наибольшее количество монет может обеспечить себе Базилио?

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

10. Найдите наибольшее четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, которое делится на все свои цифры.
20. Сколько существует целых чисел n на отрезке [100; 400], для которых n^n – точный квадрат?
30. Два числа, не делящихся друг на друга, сложили вместе с их наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным. В результате получилось число 682. Найдите исходные числа. В ответе напишите их в порядке возрастания через пробел.
40. Найдите все такие пары чисел a, p (a – натуральное, p – простое, $a < p$), для которых $n^6 + a$ делится на p как минимум при четырёх последовательных значениях n. В ответе укажите сумму всех возможных a и p.