Решения сюжета 1.

Пусть $c(i)$ - цвет числа i. Заметим, что всегда $c(a) \neq c(2a)$. В тройке $1, 2, 3$ имеем два варианта: $c(1) = c(3)$ и $c(2) = c(3)$.

В первом случае индукцией по k получаем, что $c(2k) \neq c(1)$ (смотрим на тройку $(1, 2k-1, 2k)$) и $c(2k+1) = c(1)$ (смотрим, например, на тройки $(2, 2k-1, 2k+1)$ и $(4, 2k-3, 2k+1)$ и помним, что $c(2) \neq c(4)$). С другой стороны ясно, что если все нечетные одноцветны, то вся раскраска натурального ряда очаровательна тогда и только тогда, когда раскраска множества четных чисел очаровательна. Мысленно поделив четные числа на 2 приходим к исходной задаче.

Во втором случае получаем $c(4) = c(1)$ (тройка $(1, 3, 4)$, $c(3) = c(2) \neq c(4)$), далее все числа вида $5k+1, 5k+4$ - цвета 1, вида $5k+2, 5k+3$ - цвета 2, а с кратными 5 всё начинается заново, как с кратными 2 в предыдущем абзаце.

Это - описание возможных раскрасок (оно же обоснование п.4), теперь формальные решения:

1. Докажите, что среди чисел 1,3,9 есть одноцветные.

Пусть числа 1, 3 и 9 трёх цветов A, B и C соответственно.

Среди чисел 1, 2 и 3 есть два одноцветных, значит, 2 цвета A или B. Однако $1 + 1 = 2$, поэтому 1 и 2 разного цвета. Следовательно, 2 цвета B.
Среди чисел 1, 3 и 4 есть два одноцветных, значит, 4 тоже цвета A или B. Однако $2 + 2 = 4$, поэтому 2 и 4 разного цвета. Следовательно, 4 цвета A.
$4 + 5 = 9$, значит, 5 цвета A или C, однако $1 + 4 = 5$, значит, 5 не цвета A. Следовательно, 5 цвета C.
$1 + 5 = 6$, значит, 6 цвета A или C, а $2 + 4 = 6$, значит, 6 цвета A или B. Таким образом, 6 цвета A.
Итого, 3, 6 и 9 имеют цвета B, A и C соответственно. Противоречие.

2. Докажите, что среди четырех последовательных чисел обязательно найдутся два одноцветных.

Заметим, что если k и $k+1$ разных цветов, то 1 обязательно одного цвета с одним из них. Значит, числа k, $k+1$, $k+2$ и $k+3$ различных цветов и 1 цвета A, то одно из чисел k и $k+1$ тоже цвета A, а также одно из чисел $k+2$ и $k+3$ цвета A. То есть, среди чисел $k, k+1, k+2, k+3$ есть как минимум два цвета A. Противоречие.

3. Приведите пример очаровательной раскраски, в которой числа $6, 10, 15$ разноцветны.

Например, так:нечетные числа - цвет 1, числа вида $10k+2, 10k+8$ - цвет 2, $10k+4, 10k+6$ – цвет 3, числа вида $5 \cdot 2^k \cdot (2y+1)$ - в цвет $k+3$.

4. Сколько существует способов восстановить очаровательную раскраску на отрезке $1, 2, \ldots 1999$, если известно что цвет числа 2000 не встречался ранее?

Ответ: $35 = C^3_{3+4}$ Т.к. $2000 = 2^4 5^3$

Решения сюжета 2

1. Из чисел c_k удалось выделить трехчленную арифметическую прогрессию. Докажите, что в наборе есть числа разных знаков.

Будем решать от противного. Пусть есть такой набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(\forall i : a_i > 0)$, что $c_{k_1}, c_{k_2}, c_{k_3}$ образуют непостоянную арифметическую прогрессию для каких-то $k_1 < k_2 < k_3$. Будем считать, что $a_i > 1$, так как если выкинуть из набора $a_i = 1$, то все c_k уменьшатся на 1. Теперь заметим, что $c_{k_3} \geq c_{k_2+1} = \sum_i a_i^{k_2} \cdot a_i \geq \sum_i a_i^{k_2} \cdot 2 = 2 \cdot c_{k_3}$. Но тогда $c_{k_1} = 2 \cdot c_{k_2} - c_{k_1} \leq 0$, противоречие.

2. Возможно ли, что $c_3 = 1$, $c_5 = 2015$?

Заметим, что $\forall a : a^3 \equiv a^5 \pmod 3$. Следовательно, $c_3 \equiv c_5 \pmod 3$. Однако $1 \not\equiv 2015 \pmod 3$.

3. Приведите пример четырёхчленной арифметической прогрессии выделенной из чисел c_k.

Давайте рассмотрим числа $2, 3, 4$ в степенях $1, 3$, 5 и 7. Подберём такие k_2, k_3 и k_4, что если составить набор из k_2 чисел 2, k_3 чисел 3 и k_4 чисел 4, то c_1, c_3, c_5 и c_7 будут образовывать арифметическую прогрессию, то есть $c_7 - c_5 = c_5 - c_3 = c_3 - c_1$. При этом, если $k_i < 0$, то это означает $-k_i$ чисел, равных $-i$ (именно поэтому мы взяли нечётные степени). Чтобы подобрать такие k_i, потребуется решить такую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} k_2 \cdot (2^7 - 2 \cdot 2^5 + 2^3) + k_3 \cdot (3^7 - 2 \cdot 3^5 + 3^3) + k_3 \cdot (4^7 - 2 \cdot 4^5 + 4^3) = 0 \\ k_2 \cdot (2^5 - 2 \cdot 2^3 + 2^1) + k_3 \cdot (3^5 - 2 \cdot 3^3 + 3^1) + k_3 \cdot (4^5 - 2 \cdot 4^3 + 4^1) = 0 \end{cases}$$

Это однородная система из двух уравнений с тремя неизвестными. Очевидно, что можно подобрать подходящие рациональные k_i, а значит, можно и целые.

4. Из чисел c_k удалось выделить 100-членную прогрессию. Докажите, что её разность больше 10^{30}.

Пусть c_{k_i} и c_{k_j} — это i и j члены арифметической прогрессии, тогда их разность равна $(i-j)d$, где d — разность арифметической прогрессии. При этом $c_{k_i} - c_{k_j} = \sum\limits_i a_i^{k_j} \cdot (a_i^{k_i-k_j} - 1)$. Если $k_i - k_j$ делится на $p-1$ для какого-то простого p, тогда, по теореме Ферма, $\forall i : a_i^{k_i-k_j} - 1 \vdots p$, и, следовательно, $c_{k_i} - c_{k_j} = (i-j)d \vdots p$. Если при этом $(i-j) \not\vdots p$, то $d \vdots p$. Давайте для каждого $p < 100$ найдём подходящие i, j. Если рассмотреть первые p индексов k_i, среди них есть одинаковые по модулю $p-1$, и $i - j < p$. Значит, d делится на произведение всех простых до 100, а оно что-то около 10^{33}.

Замечание: Похожие соображения позволяют доказать и делимость на не очень большие простые числа большие 100, так что оценка совсем не строгая.

Сюжет 3

Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает отрезок BC и луч AB в точках D и E соответственно. Точки M и N середины отрезков AC и DE соответственно. a) Оказалось, что $\angle BAC = 2\angle BCA$. Докажите, что $DM \leq DB$. b) Докажите, что $\angle ABC + \angle MBN = 180°$, если $AB = BE$. c) Точка $J \neq D$ на отрезке BD выбрана так, что $DE = JE$. Известно, что $\angle ABM = 90°$. Найдите отношение площадей треугольников ADJ и BEJ. d) При каких значениях α может быть выполнено равенство $\angle MBN = \alpha = \angle ABC$?

Решение.

a) Поскольку $\angle BAC = 2\angle BCA$, счетом углов находим, что AD биссектриса $\angle BAC$. Опустим перпендикуляр DH из точки D на прямую AB. Тогда $DM = DH \leq DB$.

b) Если $AB = BE$, то D является точкой пересечения медиан треугольника AEC. Тогда $MD = DN = NE$. Так как треугольник AME прямоугольный, а MB его медиана, имеют места равенства $MB = BE$ и $\angle NMB = \angle EMB = \angle MEB = \angle BED$. Также $MN = 2DN = DE$. Тогда треугольники EBD и MBN равны по первому признаку, а тогда $\angle MBN = \angle EBD$. Отсюда ясно, что $\angle ABC + \angle MBN = 180°$.

c) Пусть точки K, L и S середины отрезков DJ, BM и AB соответственно. Так как $DE = JE$, то $EK \perp BD$. Также треугольники ABM и MBE подобны, а EL и MS их медианы, проведенные из соответственных вершин. Поэтому $\angle BMS = \angle BEL$, откуда $EL \perp SM$. Но $SM \parallel BC$ как средняя линия треугольника ABC. Следовательно $EL \perp BD$, то есть точки E, K, L лежат на одной прямой. Поскольку точка K лежит на медиане EL треугольника BEM, то площади треугольников EMK и EBK равны. Также площади треугольников EKJ и EKD равны. Следовательно, площади треугольников BEJ и KDM равны. Но площадь треугольника ADJ в четыре раза больше площади треугольника KDM, так как высота из вершины A вдвое больше высоты из вершины M и $DJ = 2DK$. Итого, искомое отношение 4.

Замечание: Можно доказать, что точки E, K, L лежат на одной прямой по-другому. Пусть прямые MK и BE пересекаются в точке P. Окружность, построенная на отрезке EC как на диаметре проходит через точки E, K, M, C. Поэтому $\angle PME = \angle KME = \angle KCE = \angle EAD$. Значит, $APDM$ вписанный, тогда $\angle DPA = 180° - \angle DMA = 90°$. Тогда $PD \perp BE$ и $BM \perp BE$. Тогда $BPDM$ – трапеция, из чего следует требуемое.

d) Обозначим за O и T центры описанных окружностей треугольников EBD и ABC. Легко видеть, что $\angle TBO = 90°$. Если $\angle ABC$ острый, то точки O и T лежат внутри угла $\angle MBN$, откуда этот угол тупой, и он не может быть равен острому углу $\angle ABC$. Аналогично дествуя, заключаем, что $\angle ABC$ не может быть тупым. Значит $\angle ABC = 90°$. В этом случае $T = N, O = M$. Поэтому $\angle MBN = \angle OBT = 90°$. Итого, равенство из условия может быть выполнено в единственном случае — $\alpha = 90°$.

Критерии определения победителей и призёров заключительного этапа олимпиады Юношеской математической школы, 2015-16 гг.

Каждая задача стоит 1 балл.

По 4 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 5 классу:
Победителем считается участник, решивший не менее 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 6 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 7 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 8 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 9 классу:
Победителем считается участник, решивший 8 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 6 задач.

По 10 классу:
Победителем считается участник, решивший 9 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 11 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.