Заочный тур олимпиады ЮМШ 2015/16. Решения варианта 8 класса.

1. В одном городе много домов, в каждом доме поровну квартир, в каждой квартире поровну аквариумов, в каждом аквариуме поровну рыбок, у каждой рыбки поровну чешуек. Рыбок в каждом доме больше, чем чешуек в каждой квартире. А чего больше: квартир в городе или чешуек у одной рыбки? Ответ обоснуйте.

Решение. Обозначим количество квартир в доме за К, количество аквариумов в квартире за А, количество рыбок в аквариуме за Р, количество чешуек у рыбки за Ч. Тогда по условию К·А·Р > А·Р·Ч. Сокращая на положительное А·Р, получаем, что К > Ч, то есть квартир в доме больше, чем чешуек у рыбки. Значит, и в городе квартир больше.

2. Влад пронумеровал клетки шахматной доски (от 1 до 64) в каком-то порядке. Гоша сделал то же самое со своей шахматной доской, но нумерация получилась другой. Может ли оказаться, что клетки доски Влада соединены ходом коня тогда и только тогда, когда клетки доски Гоши с теми же номерами соединены ходом короля?

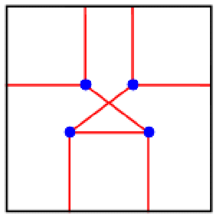
Решение. Не может. Например, угловая клетка доски Влада соединена с двумя другими клетками. Тогда на доске Гоши клетка с тем же номером тоже должна быть соединена ровно с двумя клетками, но любую клетку шахматной доски можно соединить ходом короля не менее, чем с тремя другими.

3. Екатерина сказала Андрею некоторое целое число. Докажите, что Андрей сможет выписать на доске 10 последовательных целых чисел, а затем стереть одно из них, так, что сумма девяти оставшихся будет равняться числу Екатерины.

Решение 1. Выпишем сумму каких-нибудь ДЕВЯТИ подряд идущих чисел: например, 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45. Затем прибавим 1 к наибольшему числу: 1+2+3+4+5+6+7+8+10=46. Потом прибавим 1 к следующему по величине числу: 1+2+3+4+5+6+7+9+10=47. Потом прибавим 1 к следующему по величине числу, и так будем делать, пока все числа не увеличатся на 1: 2+3+4+5+6+7+8+9+10=54. Затем мы можем опять прибавить 1 к наибольшему числу и т.д. Тогда сумма наших 9 чисел будет, увеличиваясь при каждом действии на 1, пробегать по возрастанию все натуральные числа. Если же запустить эту операцию в обратную сторону, вычитая 1 поочередно из всех чисел, начиная с наименьшего, то сумма будет пробегать по убыванию все целые числа. Осталось заметить, что все получающиеся суммы 9 чисел представляют собой суммы 10 последовательных чисел, из которых исключено какое-то одно.

Решение 2. Обозначим число Екатерины за M, наименьшее из 10 первоначально выписанных Андреем чисел за n. Тогда сумма 10 чисел Андрея равна n + (n+1) + (n+2) + ... + (n+9) = 10n+45. Он вычеркивает какое-то число n+k, k=0,...,9. Тогда M=10n+45 - (n+k)=9n+45-k. Иными словами, 9n = M-45+k. Мы всегда можем выбрать k из требуемого диапазона так, чтобы число M-45+k делилось на 9 (в качестве k берется разность 9 и остатка от деления M на 9). Теперь в качестве n можно взять (M-45+k)/9.

4. Внутри квадрата отмечены четыре точки и проведены девять отрезков (см. рисунок) Длины всех отрезков равны 1. Отрезки, проведенные от точек к сторонам квадрата, перпендикулярны им. Найдите длину стороны квадрата.



Решение. Обозначим сторону квадрата за X. Тогда расстояние левой нижней точки от левой стороны квадрата равно (X-1)/2, а расстояние правой верхней точки от правой стороны квадрата равно 1. Поэтому расстояние между ними по горизонтали равно X - (X-1)/2 – 1 = (X-1)/2. Расстояние же между ними по вертикали равно X-2. Эти два расстояния образуют катет прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является проведенная между точками диагональ длиной 1. Поэтому в силу теоремы Пифагора:

$((X-1)/2)^2 + (X-2)^2 = 1^2$

$(X-1)^2 + 4(X-2)^2 = 4$

$X^2 - 2X + 1 + 4X^2 - 16X + 16 = 4$

$5X^2 - 18X + 13 = 0.$

Решая это квадратное уравнение, получаем $X_1 = 1$, $X_2 = 2{,}6$. Очевидно, что случай X=1 противоречит чертежу, поэтому длина стороны квадрата равна 2,6.

5. Известно, что делители каждого «неквадратного» числа можно разбить на пары так, чтобы произведения делителей в каждой паре были равными. Например, 18=1·18=2·9=3·6. А существуют ли «неквадратные» числа, все делители которых можно разбить на тройки так, чтобы произведения делителей в каждой тройке были равными?

Решение. Не существуют. Предположим, такое число нашлось. Обозначим его за N, количество его делителей за k, их произведение за П. Тогда $П=N^{k/2}$, поскольку произведение делителей в каждой из k/2 пар равно N. Обозначим произведение делителей в каждой тройке за t. Тогда $П=t^{k/3}$. Таким образом, $N^{k/2}=t^{k/3}$, откуда, возводя в 6-ю степень, получаем $N^3=t^2$. Но тогда и N является полным квадратом. Действительно, если это не так, то в разложении N на простые множители некоторый простой множитель p входит в нечетной степени. Тогда он входит в нечетной степени и в N^3, а в t^2 любой простой множитель может входить только в четной степени – противоречие.

6. Сумма четырёх вещественных чисел равна 10, а сумма их квадратов – 30. Докажите, что некоторые два из них отличаются не более, чем на 1.

Решение. Обозначим числа за a, b, c, d. Тогда a+b+c+d=10, $a^2+b^2+c^2+d^2=30$. Отсюда $(a+b+c+d)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd = 100 - 30 = 70$. Тогда $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2 - 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd - 2cd = 90 - 70 = 20$. Предположим противное – все числа отличаются более, чем на 1. Пусть для определенности a>b>c>d. Тогда a-b>1, a-c>2, a-d>3, b-c>1, b-d>2, c-d>d. Отсюда $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 > 1^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 > 20$ – противоречие.

7. В охранном предприятии «ООО» работает 2015 сотрудников. Из них образовано несколько групп быстрого реагирования (по несколько человек в каждой), причём любые две группы имеют хотя бы одного общего сотрудника. Докажите, что всех сотрудников предприятия «ООО» можно расположить вокруг Очень Охраняемого Объекта по окружности длины 1 км таким образом, чтобы любая группа быстрого реагирования была растянута вдоль этой окружности не менее, чем на 1/3 км (то есть чтобы никакую группу быстрого реагирования нельзя было целиком покрыть дугой длины меньше 1/3 км).

Решение. Предположим противное. Обозначим максимально достижимую длину, на которую можно растянуть все группы быстрого реагирования, за m (по нашему предположению $m<1/3$). Среди возможных расстановок, для которых условие растяжения всех групп на m выполняется выберем такую, для которой число групп, растянутых ровно на m, минимально (хотя бы одна такая группа найдется по определению числа m).

Попробуем преобразовать нашу расстановку. Рассмотрим некоторую группу A, растянутую ровно на m. Согласно выбору расстановки, мы не можем растянуть эту группу сильнее, не сократив при этом длину какой-то другой группы до m или меньше (иначе получим расстановку с меньшим количеством групп длины ровно m, что противоречит минимальности). В частности, мы не можем передвинуть крайнего слева охранника группы A еще немного влево – а это значит, что найдется какая-то другая группа B, длина которой при таком передвижении сократится, то есть в ней этот же охранник занимает крайнюю правую позицию. Аналогично, крайний правый охранник группы A является крайним левым в некоторой другой группе C. Но по условию группы B и C пересекаются (с противоположной A стороны круга). Это означает, что покрывающие A, B и C дуги охватывают весь круг, откуда $3m\geq 1$ и $m\geq 1/3$.