Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 6 декабря 2015 года
7 класс.
Решения

1. В двух примерах заменили буквы цифрами (одинаковые цифры- одинаковыми буквами, разные- разными). Известно, что ДВАЖДЫ+ДВА
делится на 13. Докажите, что ТРИЖДЫ+ТРИ тоже делится на 13.

Решение:

Заметим, что ДВАДВА делится на 1001, а 1001 делится на 13, следовательно ЖДЫ делится на 13, то есть ТРИТРИ+ ЖДЫ делится на 13, то есть ТРИЖДЫ+ТРИ тоже делится на 13 ч. и т.д.

2. Есть число 1201201201201. За ход можно переставить две соседние цифры, но запрещается менять цифры на тех позициях, на которых их уже меняли. Кроме того, 0 нельзя ставить на первое место. Двое игроков ходят по очереди, проигрывает тот, кто не может походить. Кто выиграет при правильной игре?

Решение:

Первым ходом меняем местами вторую и третью цифру. После этого как ни играй, произойдет еще ровно 10 ходов, следовательно первый выиграет.

3. Периметры треугольников ABC и DEF равны 239 и 533 соответственно. Могут ли треугольники ABD, BCE, CAF быть равносторонними?

Решение:

Допустим, что могут. Тогда заметим, что по неравенству треугольника BE+BD>ED, CE+CF> EF, AD+AF> DF. Тогда BE+BD+CE+CF+AD+AF> ED+EF+DF, тогда 2AB+2BC+2AC> ED+EF+DF, то есть 239*2> 533, что неверно- противоречие.

4. За круглым столом сидели 10 человек. Каждый из них являлся либо рыцарем (который всегда говорит правду), либо лжецом (который всегда лжет). Однажды каждый из них обвинил во лжи четверо других людей, не сидящих рядом с ним. Докажите, что нашелся такой человек, что обвинил во лжи сидящего напротив него.

Решение:

Заметим, что заведомо есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Следовательно найдется пара сидящих рядом людей такая, что один из них- рыцарь, а один- лжец. Рыцарь мог обвинить во лжи только лжецов, и при этом не обвинял своего соседа- следовательно лжецов хотя бы 5. Аналогично рыцарей не меньше 5. Всего у нас 10 человек- значит лжецов и рыцарей ровно по 5, и рыцарь, сидящий рядом со лжецом обвинил во лжи всех остальных лжецов. Следовательно, рыцарь не может сидеть между двух лжецов, и если рядом с ним сидит лжец, то напротив него сидит рыцарь. Посмотрим на рыцаря №1, сидящего рядом с лжецом. С другой стороны от него сидит рыцарь №2. Напротив должен сидеть рыцарь №3, и рядом с ним так же должны сидеть лжец и рыцарь (№4). Рыцарь №5 не может сидеть между лжецами, то есть он сидит либо рядом с рыцарем №2, либо рядом с №4, но в любом случае получается, что он сидит рядом с лжецом, и напротив лжеца, а тогда ему придется обвинить во лжи сидящего напротив.

5. Можно ли разбить треугольник на выпуклые четырехугольники таким образом, чтобы среди вершин четырехугольников никакие три не лежали на одной прямой?

Решение:

Сумма углов четырехугольников равна 180*2k, где k-количество четырехугольников. В то же время она равна 180+ 180*2n, где n-количество дополнительных вершин, которые мы отметили, чтобы разрезать треугольник. То есть 2k=2n+1- противоречие.

6. Докажите, что число вида 3^n*7^k не может быть записано только нечетными цифрами при натуральных n и k.

Решение:

Допустим противное. Будем смотреть на остатки при делении на 20. Степень тройки дает остатки 3,9,7 и 1. Степень семерки- 7,9,3 и 1. Поскольку остатки совпадают, то любой остаток, который мы можем получить из нашего произведения, мы так же можем получить из степени тройки. То есть это всегда будет либо 1, либо 3, либо 7, либо 9. А значит предпоследняя цифра всегда будет четной.

7. На доске 5 на 5 расставили некоторое количество слонов и коней. Затем посчитали, сколько раз бьется каждый слон, и все полученные числа сложили. Какая максимальная сумма могла получиться?

Решение:

Ответ: 80.

Пример строится через шахматную раскраску- слоны на один цвет, ладьи- на другой.

Оценка: сначала расставим везде слонов. Получится сумма 64. Теперь в каждой клетке напишем число очков, которое мы можем выиграть, заменив там слона на коня. Получим следующую таблицу:

1	1	2	1	1
1	0	2	0	1
2	2	4	2	2
1	0	2	0	1
1	1	2	1	1

Разделим данную таблицу на 4 следующие таблицы:

1	1	1
1	0	1
1	1	1

В каждой из них мы заведомо можем получить не больше 4 очков, так как клетки с 1 можно разбить на пары ходом коня, то есть всего мы сможем дополнительно получить от замены слонов на коней не больше 16 очков.

Критерии определения победителей и призёров заключительного этапа олимпиады Юношеской математической школы, 2015-16 гг.

Каждая задача стоит 1 балл.

По 4 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 5 классу:
Победителем считается участник, решивший не менее 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 6 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 7 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 8 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 9 классу:
Победителем считается участник, решивший 8 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 6 задач.

По 10 классу:
Победителем считается участник, решивший 9 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 11 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.