9-10 классы

Сюжет 1.

1. Гомотетия с коэффициентом -1/2 с центром в точке пересечения медиан большого треугольника даёт маленький. Значит, при этой гомотетии вписанная окружность переходит во вписанную окружность маленького. Значит, центр перешёл в центр. Но у гомотетии единственная неподвижная точка – центр гомотетии. Значит, инцентр у этих треугольников совпадает с центром пересечения медиан.

2. Пусть H - точка касания вписанной окружности треугольника XYZ стороны XY. Треугольник XYZ правильный, значит угол $Y/2 = 30^0$, значит YI = 2IH = 2r. Следовательно, точка Y (аналогично с точками X и Z) и есть точка касания вписанной окружности треугольника ABC стороны BC. Теперь почти как угодно всё доказывается. Например, можно заметить, что все углы треугольника ABC равны, потому что опираются на равные хорды вписанной окружности треугольника XYZ.

3. Обозначим за r радиус вписанной окружности маленького треугольника. Отрезок биссектрисы YI = r/sin(Y/2). Заметим, что YI >= 2r, т.к. 2r - это расстояние от центра окружностей I до прямой CB. Следовательно, r/sin(Y/2) >= 2r. sin(Y/2) <= 1/2. Аналогично, sin(X/2) <= 1/2 и sin(Z/2) <= 1/2. Из этого очевидным образом следует, что все углы треугольника XYZ равны 60.

4. Примечание: можно немного короче и без использования такого количества формул площади треугольника, если сразу начать выражать $\sin^2(Y/2)$ (но автору сюжета так приятнее). Обозначим за x, y и z стороны маленького треугольника, за p - его полупериметр, за S - его площадь. Напишем неравенство (аналогичное неравенству в пункте 2):

r/sin(Y/2) >= tr

Теперь будем выражать всё через стороны маленького треугольника. r = S/p

S/sin(Y/2)*p >= tr

sin(Y)zx/(2sin(Y/2)*p) >= tr

sin(Y/2)cos(Y/2)zx/sin(Y/2)*p >= tr

cos(Y/2)zx/p >= tr

$\cos^2(Y/2)z^2x^2/p^2 >= (tr)^2$

$\cos^2(Y/2) = (\cos(Y) + 1)/2$

По теореме косинусов для треугольника XYZ:

$\cos(Y) = (x^2 + z^2 - y^2)/(2xz)$

$\cos^2(Y/2) = ((x^2 + z^2 - y^2)(2xz) + 1)/2$

$\cos^2(Y/2) = (x^2 + z^2 - y^2 + 2xz)/(4xz)$

$\cos^2(Y/2) = (x + z + y)(x + z - y)/(4xz)$

$\cos^2(Y/2) = p(p - y)/(xz)$

$((p(p - y))/(xz)z^2x^2)/p^2 >= (tr)^2$

$(p(p - y)xz)/p^2 >= (tr)^2$

$p(p - y)xz >= (tpr)^2$

$p(p - y)xz >= (tS)^2$

$p(p - y)xz >= t^2 p(p-x)(p-y)(p-z)$
$xz/((p-x)(p-z)) >= t^2$

Сюжет 2.

2.1. Раскрасим треугольник в шахматную раскраску. Получится 15 белых и 21 чёрная клетки. А в тетраминошке по 2 белых и черных. Значит, всего может влезть максимум 7: разрезаем треугольник 6x6 на треугольник 4x4 и оставшуюся полоску толщины 2. В полоску влезает 4 тетраминошки и остаётся треугольник 2x2 (в котором одна белая клетка), в треугольник 4x4 влезает 3 тетреминошки и остаются 4 разрозненные чёрные клетки.

2.2. Да, существует. Это фигура «бублик». Она занимает 10 клеток (включая внутреннюю), значит, если нарисовано 1000 таких фигурок, то весь треугольник замощён. Но угловую клетку замостить нельзя.

2.3. Можно вместить столько, чтобы осталось не более одной белой клетки (это получается [n(n-1)/4]). Давайте докажем, что можно оставить не более одной белой клетки. Рассмотрим треугольник nxn и отрежем от него нижнюю полоску шириной 4. Полоску разобьём на треугольник 4x4 и параллелограм 4x(n-4). Параллелограмм плотно замощается тетраминошками, а в треугольнике можно разместить их три штуки так, чтобы осталось только 4 чёрные клетки. Такими действиями, закрывая все белые клетки, можно редуцировать треугольник до треугольника размера не более 3. Далее очевидно разбираются три варианта.

2.4. Рассмотрим связную фигуру из k клеток. Рассмотрим граф на клетках (рёбрами соединены соседние клетки). Граф этот связен, а значит, в нём как минимум k-1 ребро. Значит, есть как минимум k-1 пара сторон треугольников, примыкающих друг к другу, а значит, не находящихся на границе. Значит, периметр связной фигуры из k клеток не превосходит k+2.

Обозначим направления единичных отрезков за 1, 2 и 3. Пусть на границе связной фигуры a единичных отрезков в 1 направлении, b во 2 и c в 3.

Рассмотрим минимальный равноугольный шестиугольник со сторонами, параллельными линиям сетки треугольника, в который влезает наша связная фигура. Пусть длины его сторон в направлении 1 равны A_1, A_2, в направлении 2 – B_1, B_2, в направлении 3 – C_1, C_2. Рассмотрим его вертикальную высоту h_2, ортогональную направлению 2. Если мы будем идти по границе фигурки от самой нижней точки по циклу, мы дойдём с самого низа до самого верха и обратно до самого низа. То есть, мы пройдём расстояние в $2h_2$ клеток по вертикали. При этом мы проходим расстояние в 1 клетку по вертикали, проходя по единичному отрезку в направлениях 1 и 3, и не двигаемся по вертикали, проходя в направлении 2. Значит, мы двигались по вертикали a+c раз, значит, $h_2 <= (a+c)/2$. При этом понятно, что $h_2 = A_1+C_2=A_2+C_1$. Аналогично, $h_1 <= (b+c)/2$ и $h_3 <= (a+b)/2$. Значит, сумма трёх высот не превосходит a+b+c <= k+2. А следовательно, сумма всех шести сторон шестиугольника не превосходит k+2.

Давайте поставим на этот шестиугольник ещё один такой же и опишем треугольник вокруг полученной конструкции. Пусть сверху оказалась сторона B_1. Тогда понятно, что высота треугольника над верхним шестиугольником как раз B_1. При этом высота самого шестиугольника равна $h_2 = A_1+C_2=A_2+C_1$. Значит, высота треугольника равна сумме пяти сторон шестиугольника. Понятно, что можно повернуть шестиугольник так, чтобы она не превосходила 5/6 от периметра шестиугольника, который в свою очередь не превосходит k+2. Значит, фигурку из 100 клеток можно два раза вместить в треугольник со стороной 102*5/6=85.

Сюжет 3.

3.1. Можно (стандартная конечная разность). Последовательность знаков: +--+-++-.

3.2. Тот факт, что x^3 обнуляется, говорит о том, что при раскрытии скобок обнуляются коэффициенты при x^3, x^2 и x. Обнуления их достаточно для ображения выражения в константу при подстановке любого кубического многочлена.

3.3. Поскольку куб должен сократится, то количество + и – одинаково. Далее посмотрим на коэффициент конечной разности при x^2. Он равен 3(+-1+-2+-...+-n)=3n(n+1)/2, так что либо n делится на 4, либо n+1 делится на 4. Последнее невозможно, т.к. n чётно.

3.4. Надо привести пример для 8, для 12, а затем сказать, что можно прибавить 8 к любой расстановке. Пример для 8 приведён в 1 задаче. Пример для 12 придумать непросто, поскольку последовательность

Туэ-Морса не подходит. Вот искомый пример: +-+---+++-+-.