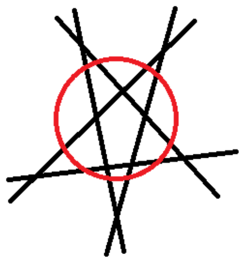
7 класс

1. На листе бумаги нарисована окружность. Можно ли провести на этом же листе 5 отрезков так, чтобы каждый из них пересекался с каждым и у каждого отрезка ровно половина его точек пересечения с другими отрезками лежала внутри окружности?

Решение:

См. картинку.



2. В тетради 96 листов. Ее страницы пронумеровали от 1 до 192 и вырвали двойной лист (т.е. вырвали лист, а тогда выпал и лист, соединявшийся с ним). На вырванных листах номера страниц образованы следующими цифрами: 0, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 9. Какие номера страниц были на вырванном листе? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 59 / 60 / 133 / 134.

Решение:

Из четырёх чисел на листе два — чётные, причём в сумме они дают 194; значит, они кончаются на 0 и 4. Тогда парные к ним нечётные кончаются на 9 и 3. Из оставшихся цифр 1,1,3,3,5,6 надо образовать начала; ясно, что это можно сделать только одним способом.

3. Гоша смотрит на равенство: 71 * __ + 72 * __ + 73 * __ + 74 * __ = 2014 и хочет вписать на подчёркнутые места по одной цифре так, чтобы сделать равенство верным. Объясните, почему у Гоши ничего не получится.

Решение:
Если сумма цифр, вписанных Гошей, будет 27 или меньше, то результат будет не больше, чем 74*27=1998. Если же сумма цифр Гоши будет 28 или больше, то результат будет не меньше, чем (71+72+73)*9+74*1=2018. Так что ни одно из чисел между 1999 и 2017 получить нельзя.

4. Замок состоит из 81 комнаты в форме квадрата 9*9. В некоторых стенах между соседними комнатами есть дверь (одна). Дверей наружу нет, зато в каждой комнате имеется не менее двух дверей. Докажите, что в какой-то комнате есть хотя бы три двери.

Решение:
Если все комнаты имеют степень два, то замок представляет собой объединение циклов. В силу шахматной раскраски каждый такой цикл должен иметь чётную длину. Но общее количество комнат нечётно.

5. У каждого из 777 банкиров есть несколько сейфов. На совещании Главный Олигарх выдал каждому банкиру по N алмазов и велел разложить их по сейфам так, чтобы в каждом из сейфов лежало разное число алмазов. Главный Олигарх точно знает, что эта задача выполнима. Докажите, что банкиры могут оставить себе не более чем по два сейфа (а остальные уничтожить) так, чтобы задача Главного Олигарха по-прежнему осталась выполнимой (при том же значении N).

Решение:
Очевидно, что необходимым условием выполнимости задачи Олигарха является то, что число сейфов меньше, чем N. Также у каждого банкира, кроме, возможно, одного, не менее двух сейфов. Покажем, что после уничтожения всех “лишних” сейфов каждого банкира эту задачу по-прежнему можно будет выполнить. Тот банкир, у которого 1 сейф (если он существует), все N алмазов кладет в него (если нет – N и 0). Следующий банкир кладет в первый сейф N-1, а в другой – 1, третий – (N-2) и 2, и так далее. Поскольку всего алмазов не больше, чем N, то эти операции можно провести для каждого банкира.

6. Назовём число фееричным, если оно простое или раскладывается не более, чем на четыре простых множителя. Вася выписал в ряд по порядку 7 последовательных трёхзначных чисел. Докажите, что можно выбрать среди них два соседних так, чтобы образованное ими шестизначное число было фееричным.

Решение:
Указанное шестизначное число имеет вид 1001k+1, где k пробегает 6 последовательных значений. Среди трёх чётных значений k остатки от деления на 3 и 5 не повторяются, а значит, можно выбрать k, так чтобы 1001k+1 не делилось бы на 2, 3, 5. Т.к. выбранное число 1001k+1 также взаимно просто с 1001=7*11*13, все его простые делители не меньше 17. Т.к. 17^5 уже семизначное, то 1001k+1 раскладывается не более, чем на 4 множителя, т.е. оно фееричто.

7. В ряд стоят 99 человек - рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждый из них произнес одну из двух фраз: "Слева от меня рыцарей вдвое больше, чем лжецов" или "Слева от меня рыцарей столько же, сколько лжецов". На самом деле рыцарей было больше, чем лжецов, а первую фразу произнесло более 50 людей. Сколько лжецов произнесли первую фразу?

Ответ: 49.
Решение:
Рыцарей больше половины, следовательно:
1) Либо они чередуются вот так: РЛР…ЛР, но этот вариант не подходит: фразу про «рыцарей вдвое больше, чем лжецов» не может произнести ни один рыцарь, но этих фраз больше 50.

2) Либо какие-то два рыцаря стоят рядом. Двое стоящих рядом рыцарей не могут оба произнести одинаковые фразы, а различные фразы они могут сказать только в одном случае: третий говорит, что рыцарей перед ним столько же, сколько и лжецов, а четвертый – что рыцарей перед ним вдвое больше, чем лжецов (это получается несложными уравнениями). Больше нигде рыцари рядом не стоят, следовательно, чтобы их было хотя бы 50, картинка может быть только такой: РЛРРЛЛР…ЛР. Все рыцари, кроме первого и четвертого слева, точно говорят, что слева от них поровну рыцарей и лжецов, т.к. больше сказать ничего не могут. Их 48. Чтобы противоположных фраз было больше 50, все оставшиеся должны говорить именно их. Следовательно, все лжецы, которых всего 49, говорят первую фразу.

8. Дано натуральное число $X<1000$. За ход можно либо прибавить 1023, либо разделить на любое натуральное число. Докажите, что можно, сделав менее 25 ходов, вернуться к числу X.

Решение:
Если X в данный момент делится на 2 – делим на 2, иначе прибавляем 1023 и затем делим на 2. Если рассматривать запись числа в двоичной системе счисления, то обе эти операции просто переставляют последнюю цифру в начало, тогда после 10 операций число гарантированно станет исходным. Так как $X < 1000 < 2^{10}$, то в двоичной записи не больше 10 цифр, каждая операция отнимает не более 2-х ходов, тогда всего будет даже не более 20 ходов.