Вариант I

Задача 1. Дан многочлен $F(x) = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+100x^{99}$. Можно ли, переставив коэффициенты в нём, получить многочлен $G(x) = g_0+g_1x+g_2x^2+g_3x^3+\ldots+g_{99}x^{99}$ такой, что для всех натуральных чисел $k \geqslant 2$ разность $F(k) - G(k)$ не кратна 100?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Предположим противное и пусть такой многочлен $G(x)$ существует. Будем пользоваться следующей известной леммой:

> если $H(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то для любых целых a и b число $H(a) - H(b)$ делится на $a - b$.

Тогда числа $F(101) - F(1)$ и $G(101) - G(1)$ делятся на 100, а тогда на 100 делится и их разность:

$$\big(F(101) - F(1)\big) - \big(G(101) - G(1)\big) = \big(F(101) - G(101)\big) - \big(F(1) - G(1)\big).$$

Осталось заметить, что $F(1) = 1 + 2 + \ldots + 100 = G(1)$, то есть $F(101) - G(101)$ делится на 100. Противоречие.

Другое решение. Предположим противное. Будем писать сравнения по модулю 100. Тогда

$$F(101) = 1 + 2\cdot 101 + 3\cdot 101^2 + \ldots + 100\cdot 101^{99} \equiv 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1^2 + \ldots + 100\cdot 1^{99} =$$
$$= g_0 + g_1 + \ldots + g_{99} \equiv g_0 + g_1\cdot 101 + g_2\cdot 101^2 + \ldots + g_{99}\cdot 101^{99} = G(101),$$

откуда $F(101) \equiv G(101)$, то есть $F(101) - G(101)$ делится на 100. Противоречие.

Задача 2. При каком наименьшем n существуют n чисел из интервала $(-1; 1)$, таких, что их сумма равна 0, а сумма их квадратов равна 30?

Ответ: 32.

Решение. Для начала приведём пример 32 чисел, сумма которых равна 0, а сумма их квадратов равна 30. Например, подойдут числа $x_1 = x_2 = \ldots = x_{16} = \sqrt{\frac{15}{16}}$, $x_{17} = x_{18} = \ldots = x_{32} = -\sqrt{\frac{15}{16}}$.

Докажем теперь, что меньше чем 32 числами обойтись не удастся. Предположим противное. Тогда среди всех чисел или положительных, или отрицательных не более 15. Домножая, если необходимо, все числа на -1, можно считать, что отрицательных чисел не более 15.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — все отрицательные числа, а $y_{k+1}, \ldots, y_n$ — все неотрицательные числа. Тогда $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 < k \leqslant 15$, а

$$y_{k+1}^2 + y_{k+2}^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant y_{k+1} + y_{k+2} + \ldots + y_n = -y_1 - y_2 - \ldots - y_k < k \leqslant 15.$$

Складывая полученные неравенства, получаем, $30 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 < 30$. Противоречие.

Задача 3. Пункты A и B, находящиеся на кольцевой аллее, соединены прямолинейным отрезком шоссе длиной 4 км, являющимся диаметром кольцевой аллеи. Из пункта A из дома по аллее вышел на прогулку пешеход. Через 1 час он обнаружил, что забыл ключи и попросил соседа-велосипедиста поскорее привезти их. Через какое минимальное время он может получить ключи, если скорость велосипедиста на шоссе равна 15 км/ч, на аллее — 20 км/ч, а скорость пешехода — 6 км/ч? Пешеход может идти навстречу велосипедисту.

Ответ: через $\frac{2\pi-2}{21}$ ч.

Решение. Для определенности будем считать, что пешеход вышел на прогулку по кольцевой аллее против часовой стрелки. В пункте A у велосипедиста есть три возможности:

1. поехать по аллее против часовой стрелки;

2. поехать по шоссе;

3. поехать по аллее по часовой стрелке.

За 1 час прогулки пешеход прошел 6 километров и не дошел до пункта B (целых $2\pi - 6$ км!), поэтому третий вариант точно дольше первого и его можно исключить.

В первом случае двигаясь по аллее они должны будут преодолеть расстояние 6 км и в случае, если они будут двигаться навстречу друг другу, необходимое время равно $\frac{6}{6+20}$ ч.

Во втором случае при движении навстречу друг другу через $\frac{2\pi-6}{6}$ ч пешеход достигнет пункта B, а велосипедист ещё будет ехать по шоссе (поскольку $\frac{4}{15} > \frac{2\pi-6}{6}$). Тогда велосипедист всё время до встречи будет ехать по шоссе и скорость сближения пешехода и велосипедиста всё время будет составлять $15 + 6 = 21$ км/ч. Значит, они встретятся через $\frac{2\pi-2}{21}$ ч.

Сравним числа, полученные в 1 и 2 случаях:

$$\frac{3}{13} > 0{,}23 > 0{,}21 > \frac{2 \cdot 3{,}15 - 2}{21} > \frac{2\pi - 2}{21}$$

(первое и третье неравенство можно получить, например, делением в столбик). Следовательно, ответ достигается во 2-м случае.

Комментарий. Отдельные участники понимали условие иначе, чем в приведенном решении: считали, что пешеход и велосипедист встретились через час и именно тогда пешеход попросил соседа-велосипедиста привезти ему ключи. Поскольку в условии явно не сказано, где именно находился сосед, а при другой трактовки условия получается в целом аналогичная задача (хотя и с несколько более громоздким вычислением) жюри приняло решение засчитывать оба варианта трактовки условия. Приведём план решения для второй трактовки.

Ответ: $\frac{7\pi-5}{42}$.

Решение. Для определенности будем считать, что пешеход вышел на прогулку по кольцевой аллее против часовой стрелки. За 1 час прогулки пешеход прошел 6 километров и не дошел до пункта B целых $2\pi - 6$ км. Точку, где сейчас находятся пешеход и велосипедист, назовём точкой C.

Поскольку скорость велосипедиста в любом случае больше скорости пешехода, то оптимальной стратегией будет

- велосипедисту максимально быстро доехать до пункта A;
- в это время пешеходу идти «навстречу» велосипедисту, рассчитав идти по шоссе или по аллее.
- велосипедисту и пешеходу продолжить двигаться навстречу друг другу.

Находясь в пункте C у велосипедиста есть две возможности: поехать по аллее по часовой стрелке или доехать до пункта B и поехать по шоссе. В первом случае велосипедист затратит $\frac{6}{20}$ ч, а во втором — $\frac{2\pi-6}{20} + \frac{4}{15}$ ч. Сравним эти два числа:

$$\frac{2\pi - 6}{20} + \frac{4}{15} < \frac{6}{20}.$$

Итак, велосипедист поедет в пункт A по шоссе. Пусть он затратит на эту поездку время t. Тогда пешеход за это время может пройти расстояние $6t$. Если велосипедист и пешеход договорятся встретиться на аллее, то тогда они смогут сделать это через $\frac{6-6t}{20+6}$ ч; если же они договорятся встретится на шоссе, то — через $\frac{4+(2\pi-6)-6t}{15+6}$ ч. Сравним эти два времени.

$$\frac{2\pi - 2 - 6t}{21} < \frac{6 - 6t}{26}.$$

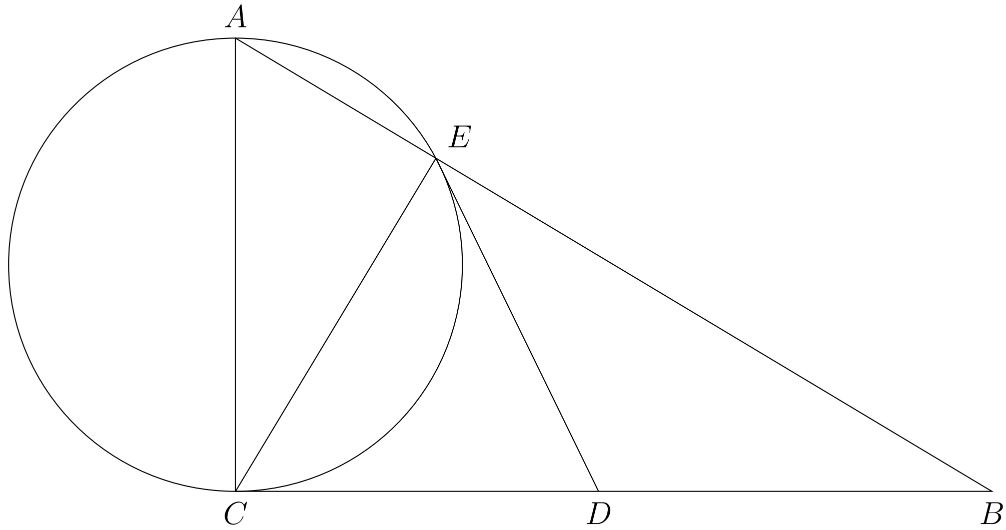
Итак, пешеход и велосипедист встретятся на шоссе, т.е. через

$$\frac{2\pi - 2 - 6t}{21} + t = \frac{7\pi - 5}{42} \text{ ч.}$$

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке E. Через точку E проведена касательная к окружности, которая пересекает катет CB в точке D. Найдите длину DB, если $AE = 6$, а $BE = 2$.

Ответ: 2.

Решение. Решение основано на двух простых наблюдениях. Во-первых, $\angle AEC = 90°$, поскольку опирается на диаметр. Во-вторых, DE и DC — касательные к окружности из условия, поэтому $DE = DC$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике CEB на гипотенузе BC отмечена такая точка D, что $DE = DC$; хорошо известно, что тогда D — середина этой гипотенузы, $BD = BC/2$.



Закончить решения можно несколькими способами, приведём два из них.

Первый способ, высота прямоугольного треугольника и теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике ABC высота CE делит гипотенузу AB на отрезки $AE = 6$ и $BE = 2$. Получаем, что $CE^2 = AE \cdot BE = 6 \cdot 2$; по теореме Пифагора $BC^2 = BE^2 + CE^2 = 2^2 + 2 \cdot 6 = 16$, $BD = BC/2 = 2$.

Второй способ, теорема о квадрате касательной. По теореме о квадрате касательной для касательной BC и секущей BA имеем: $BC^2 = BE \cdot BA = 2 \cdot (2 + 6) = 16$, $BD = BC/2 = 2$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 12x^2 + 4xy + 3y^2 + 16x = -6 \\ 4x^2 - 12xy + y^2 + 12x - 10y = -7 \end{array}\right. .$$

Ответ: $x = -\frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{2}$.

Решение. Сложим первое уравнение, умноженное на 3, и второе. Получим,

$$40x^2 + 10y^2 + 60x - 10y = -25;$$

после деления на 10 и преобразований, $4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. Сумма двух квадратов может равняться нулю только в случае, когда каждый из этих квадратов равен нулю. Поэтому, ничего кроме $x = -\frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{2}$ не может являться решением нашей системы.

Для окончания решения необходимо проверить, что найденные числа подходят:

$$\left\{\begin{array}{l} 12 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 16 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -6 \\ 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 12 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 10 \cdot \frac{1}{2} = -7 \end{array}\right. .$$

Комментарий. Достаточно проверить, что найденные числа подходят хотя бы в одно из уравнений.

Задача 6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$4\sin(3x) + 13\cos(3x) = 8\sin(x) + 11\cos(x).$$

Ответ: $\frac{\alpha-\beta}{2} \approx -0{,}1651$, где $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{13}$, $\beta = \operatorname{arctg} \frac{8}{11}$.

Комментарий 1. В зависимости от выбора способа решения и обратной тригонометрической функции ответ может иметь разный вид. Приведём ещё несколько способов описать α и β:

$$\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{13}{4} = \arcsin\frac{4}{\sqrt{185}} = \arccos\frac{13}{\sqrt{185}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{13}{\sqrt{185}} = \ldots$$
$$\beta = \operatorname{arcctg}\frac{11}{8} = \arcsin\frac{8}{\sqrt{185}} = \arccos\frac{11}{\sqrt{185}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{11}{\sqrt{185}} = \ldots$$

Например, ответ можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{13}{\sqrt{185}} - \arcsin\frac{8}{\sqrt{185}}\right).$$

Для удобства проверки в ответе приведено приблизительное значение выражения. От участиников этого, естественно, не требовалось.

Комментарий 2. Ответ можно упростить до одной обратной тригонометрической функции. Действительно, если $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{13}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{8}{11}$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{4/13 - 8/11}{1 + 4/13\cdot 8/11} = -\frac{12}{35},$$

откуда, поскольку $\alpha - \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, получаем, что ответ равен $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{12}{35}$. От участников подобного упрощения не требовалось.

Решение. Поделим левую и правую части уравнения на $\sqrt{185} = \sqrt{4^2+13^2} = \sqrt{8^2+11^2}$. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{13}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{8}{11}$; тогда $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{185}}$, $\cos\alpha = \frac{13}{\sqrt{185}}$, $\sin\beta = \frac{8}{\sqrt{185}}$, $\cos\alpha = \frac{11}{\sqrt{185}}$, а уравнение приобретает вид

$$\sin\alpha\sin 3x + \cos\alpha\cos 3x = \sin\beta\sin x + \cos\beta\cos x,$$

или $\cos(3x-\alpha) = \cos(x-\beta)$. Решенями этого уравнения является совокупность

$$\left[\begin{array}{l} 3x - \alpha = x - \beta + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 3x - \alpha = \beta - x + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.,$$

то есть

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\alpha-\beta+2\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{\alpha+\beta+2\pi n}{4},\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Поскольку $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, то наибольшими отрицательными корнями серий из совокупности являются числа $x_1 = \frac{\alpha-\beta}{2}$ и $x_2 = \frac{\alpha+\beta-2\pi}{4}$. Осталось сравнить x_1 и x_2. Для этого заметим, что

$$x_2 = \frac{\alpha+\beta-2\pi}{4} < \frac{\pi/2+\pi/2-2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} = \frac{-\pi/2}{2} < \frac{\alpha-\beta}{2} = x_1.$$

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - 11x^2 + ax - 8 = 0$ имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?

Ответ: только 22.

Решение. Пусть параметр a подходит. Тогда у многочлена $x^3 - 11x^2 + ax - 8 = 0$ есть три различных корня x_1, x_2, x_3. Воспользуемся теоремой Виета для многочлена третьей степени:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3 = 11 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a \\ x_1x_2x_3 = 8 \end{array}\right..$$

Поскольку x_1, x_2, x_3 образуют геометрическую прогрессию (пусть именно в таком порядке), то найдутся такие b и q, что $x_1 = b$, $x_2 = bq$, $x_3 = bq^2$. Тогда из равенства $x_1x_2x_3 = 8$, имеем $b^3q^3 = 8$, откуда $x_2 = bq = 2$, $x_1 = 2/q$, $x_3 = 2q$.

Тогда $2\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=11$ (*), после преобразований $2q^2-9q+2=0$. Дискриминант этого выражения равен $D=9^2-4\cdot2\cdot2>0$, поэтому такое q, а с ним и x_1, x_2, x_3, найдутся. Тогда

$$a=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=x_1x_2x_3\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=8\cdot\left(\frac{q}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2q}\right)=4\left(q+1+\frac{1}{q}\right)=2\cdot11=22.$$

(В предпоследнем переходе мы воспользовались равенством (*)).

Комментарий. Естественно, q, x_1, x_2, x_3 можно вычислить явно:

$$q_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{65}}{4}.$$

Выберем q с «+» (если выбрать с «−», то x_1 и x_3 поменяются местами, что не повлияет на ответ); тогда

$$x_1=\frac{2\cdot4}{9+\sqrt{65}}=\frac{9-\sqrt{65}}{2},\ x_2=2,\ x_3=\frac{9+\sqrt{65}}{2}.$$

Можно было вычислить a, подставив полученные числа в выражение $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$.

Задача 8. Про тетраэдр $PQRS$ известно, что $PQ=4$, $SR=6$, $\angle QRS=\angle PSR=50°$, $\angle QSR=\angle PRS=40°$. Вокруг тетраэдра описана сфера. Рассмотрим на этой сфере множество всех точек, сумма сферических расстояний от которых до точек P, Q, R, S не меньше 6π. Чему равна площадь этого множества? Сферическое расстояние между двумя точками на сфере — длина наименьшей дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки.

Ответ: 18π, т.е. половина площади сферы радиуса 3.

Решение. Так как $\angle QRS+\angle QSR=\angle PRS+\angle PSR=90°$, то треугольники QRS и PRS — прямоугольные с общей гипотенузой RS. Если O — середина отрезка RS, то по свойству медианы прямоугольного треугольника, $OP=OQ=OR=OS=3$. Следовательно, радиус описанной сферы равен 3, а точка O — её центр.

Обозначим через $d(X,Y)$ сферическое расстояние между точками X и Y. По условию задачи необходимо найти площадь множества ω на сфере, состоящего в точности из точек M, для которых

$$d(M,P)+d(M,Q)+d(M,R)+d(M,S)\geqslant6\pi. \qquad (1)$$

Поскольку RS — диаметр сферы, то точки R, M и S лежат на одной окружности большого круга; следовательно, $d(R,M)+d(M,S)=d(R,S)=3\pi$. Неравенство (1) перепишется в виде

$$d(M,P)+d(M,Q)\geqslant3\pi. \qquad (2)$$

Пусть Q_1 — точка, симметричная точке Q относительно центра сферы O. Так как Q_1 и Q — концы диаметра сферы, то $d(Q,M)+d(M,Q_1)=d(Q,Q_1)=3\pi$. Подставляя $d(M,Q)=3\pi-d(M,Q_1)$ в неравенство (2), получаем

$$d(M,P)\geqslant d(M,Q_1).$$

Так как $PQ=4\neq6$, то PQ не является диаметром, а потому $Q_1\neq P$. Итак, ω есть множество точек на сфере, сферическое расстояние от которых до одной точки на сфере не превосходит сферического расстояни до другой точки на сфере. В силу симметрии (относительно плоскости, проходящей через центр сферы перпендикулярно отрезку Q_1P), ω — половина сферы и её площадь равна $\frac{1}{2}\cdot4\cdot\pi\cdot3^2=18\pi$.

Задача 9. Про функции $p(x)$ и $q(x)$ известно, что $p(0)=q(0)>0$ и $p'(x)\sqrt{q'(x)}=\sqrt{2}$ для любого $x\in[0;1]$. Докажите, что если $x\in[0;1]$, то $p(x)+2q(x)>3x$.

Решение. Заметим, что $p(0)+2q(0)>0$, поэтому для доказательства неравенства достаточно проверить, что функция $p(x)+2q(x)-3x$ возрастает на промежутке $[0;1]$. Для этого докажем, что её производная на этом промежутке неотрицательна. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ, подстановка.

$$p'(x)+2q'(x)-3=p'(x)+\frac{4}{\big(p'(x)\big)^2}-3=\frac{\big(p'(x)+1\big)\big(p'(x)-2\big)^2}{\big(p'(x)\big)^2}\geqslant 0,$$

поскольку $p'(x)$, как следует из условия, неотрицательно.

Второй способ, неравенство о средних.

$$p'(x)+2q'(x)=\frac{1}{2}p'(x)+\frac{1}{2}p'(x)+2q'(x)\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}p'(x)\cdot\frac{1}{2}p'(x)\cdot 2q'(x)}=3,$$

где неравенство следует из неравенства о средних для трёх чисел, а последнее равенство – из условия.

Задача 10. Пете необходимо спаять электрическую схему, состоящую из 10 чипов, соединённых между собой проводами (один провод соединяет два различных чипа; два чипа может соединять не более одного провода), при этом из одного чипа должно выходить 9 проводов, из одного — 8, из одного — 7, из двух — по 5, из трёх — по 3, из одного — 2, из одного — 1. Может ли Петя спаять такую схему?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Введём граф, вершинами которого будут чипы, а ребро между вершинами проведём в том и только том случае, если соответствующие чипы соединены проводами.

Будем описывать граф в виде последовательности целых чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где a_i означает степень вершины i. Будем называть последовательность целых чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *реализуемой*, если существует граф, описание которого совпадает с $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. В условии спрашивается, реализуема ли последовательность $(9,8,7,5,5,3,3,3,2,1)$.

Заметим следующие два простых факта:

1. Пусть $a_i=0$; тогда если реализуема последовательность $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, то реализуема и последовательность $(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n)$. Для реализации достаточно откинуть вершину с номером i.
2. Пусть $a_i=n-1$; тогда если реализуема последовательность $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, то реализуема и последовательность $(a_1-1,a_2-1,\ldots,a_{i-1}-1,a_{i+1}-1,\ldots,a_n-1)$. Действительно, если $a_i=n-1$, то вершина с номером i должна быть соединена со всеми остальными вершинами, поэтому достаточно откинуть её и все выходящие из неё рёбра.

Предположим противное и пусть последовательность $(9,8,7,5,5,3,3,3,2,1)$ реализуема. Пользуясь фактами 1 и 2 последовательно получаем, что тогда реализуемы и последовательности

$$(7,6,4,4,2,2,2,1,0),\ (7,6,4,4,2,2,2,1),\ (5,3,3,1,1,1,0),\ (5,3,3,1,1,1),\ (2,2,0,0,0),\ (2,2),$$

но последовательность $(2,2)$, очевидно, не реализуема. Противоречие; значит, наше предположение неверно и последовательность $(9,8,7,5,5,3,3,3,2,1)$ не реализуема.

Другое решение. Аналогично первому решению введём граф.

Заметим, что если $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ — степени вершин некоторого графа без петель и кратных рёбер, то для каждого k выполнено неравенство

$$d_1+d_2+\ldots+d_k\leqslant k(k-1)+d_{k+1}+\ldots+d_n.$$

Действительно, все рёбра, выходящие из вершин с номерами от 1 до k делятся на два типа:

1. идущие в вершины с номерами от $k+1$ до n — таких не больше $d_{k+1}+\ldots+d_n$;
2. идущие в вершины с номерами от 1 до k — таких не больше $\frac{k(k-1)}{2}$, но каждое мы можем посчитать по два раза.

В задаче нас спрашивают, существует ли граф со степенями вершин $(9,8,7,5,5,3,3,3,2,1)$. Предположим, что он существует, и воспользуемся доказанным утверждением для первых 5 вершин:

$$34=9+8+7+5+5\leqslant 5\cdot 4+3+3+3+2+1=32,$$

противоречие.

Вариант II

Задача 1. Дан многочлен $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 101x^{100}$. Можно ли, переставив коэффициенты в нём, получить многочлен $Q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \ldots + q_{100}x^{100}$ такой, что для всех натуральных чисел $k \geqslant 2$ разность $P(k) - Q(k)$ не кратна 2020?

Ответ: Нет, нельзя.

Решение. Предположим противное и пусть такой многочлен $Q(x)$ существует. Будем пользоваться следующей известной леммой:

> если $H(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то для любых целых a и b число $H(a) - H(b)$ делится на $a - b$.

Тогда числа $P(2021) - P(1)$ и $Q(2021) - Q(1)$ делятся на 2020, а тогда на 2020 делится и их разность:

$$\big(P(2021) - P(1)\big) - \big(Q(2021) - Q(1)\big) = \big(P(2021) - Q(2021)\big) - \big(P(1) - Q(1)\big).$$

Осталось заметить, что $P(1) = 1 + 2 + \ldots + 101 = Q(1)$, то есть $P(2021) - Q(2021)$ делится на 2020. Противоречие.

Другое решение. Предположим противное. Будем писать сравнения по модулю 2020. Тогда

$$P(2021) = 1 + 2 \cdot 2021 + 3 \cdot 2021^2 + \ldots + 101 \cdot 2021^{100} \equiv 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + \ldots + 101 \cdot 1^{100} = \\ = q_0 + q_1 + \ldots + q_{100} \equiv q_0 + q_1 \cdot 2021 + q_2 \cdot 2021^2 + \ldots + q_{100} \cdot 2021^{100} = Q(2021),$$

откуда $P(2021) \equiv Q(2021)$, то есть $P(2021) - Q(2021)$ делится на 2020. Противоречие.

Задача 2. При каком наименьшем n существуют n чисел из интервала $(-1; 1)$, таких, что их сумма равна 0, а сумма их квадратов равна 42?

Ответ: 44.

Решение. Для начала приведём пример 44 чисел, сумма которых равна 0, а сумма их квадратов равна 42. Например, подойдут числа $x_1 = x_2 = \ldots = x_{22} = \sqrt{\frac{21}{22}}$, $x_{23} = x_{24} = \ldots = x_{44} = -\sqrt{\frac{21}{22}}$.

Докажем теперь, что меньше чем 44 числами обойтись не удастся. Предположим противное. Тогда среди всех чисел или положительных, или отрицательных не более 21. Домножая, если необходимо, все числа на -1, можно считать, что отрицательных чисел не более 21.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — все отрицательные числа, а $y_{k+1}, \ldots, y_n$ — все неотрицательные числа. Тогда $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 < k \leqslant 21$, а

$$y_{k+1}^2 + y_{k+2}^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant y_{k+1} + y_{k+2} + \ldots + y_n = -y_1 - y_2 - \ldots - y_k < k \leqslant 21.$$

Складывая полученные неравенства, получаем, $42 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 < 42$. Противоречие.

Задача 3. Пункты A и B, находящиеся на кольцевой аллее, соединены прямолинейным отрезком шоссе длиной 4 км, являющимся диаметром кольцевой аллеи. Из пункта A из дома по аллее вышел на прогулку пешеход. Через 1 час он обнаружил, что забыл ключи и попросил соседа-велосипедиста поскорее привезти их. Через какое минимальное время он может получить ключи, если скорость велосипедиста на шоссе равна 15 км/ч, на аллее — 20 км/ч, а скорость пешехода — 7 км/ч? Пешеход может идти навстречу велосипедисту.

Ответ: через $\frac{4\pi-7}{27}$ ч.

Решение. Для определенности будем считать, что пешеход вышел на прогулку по кольцевой аллее против часовой стрелки. В пункте A у велосипедиста есть три возможности:

1. поехать по аллее против часовой стрелки;
2. поехать по шоссе;
3. поехать по аллее по часовой стрелке.

За 1 час прогулки пешеход прошел 7 километров и, миновав пункт B, не дошёл до пункта A целых $4\pi - 7$ км. Поэтому первый вариант точно дольше третьего и его можно исключить.

В третьем случае двигаясь по аллее они должны будут преодолеть расстояние $4\pi - 7$ км и в случае, если они будут двигаться навстречу друг другу, необходимое время равно $\frac{4\pi-7}{20+7}$ ч.

Во втором случае при движении навстречу друг другу через $\frac{7-2\pi}{7}$ ч пешеход достигнет пункта B, а велосипедист ещё будет ехать по шоссе (поскольку $\frac{4}{15} > \frac{7-2\pi}{7}$). Тогда велосипедист всё время до встречи будет ехать по шоссе и скорость сближения пешехода и велосипедиста всё время будет составлять $15 + 7 = 22$ км/ч. Значит, они встретятся через $\frac{11-2\pi}{22}$ ч.

Сравним числа, полученные в 2 и 3 случаях:

$$\frac{11 - 2\pi}{22} > \frac{11 - 2 \cdot 3{,}15}{22} > 0{,}21 > \frac{4 \cdot 3{,}15 - 7}{27} > \frac{4\pi - 7}{27}$$

(второе и третье неравенство можно получить, например, делением в столбик). Следовательно, ответ достигается в 3-м случае.

Комментарий. Отдельные участники понимали условие иначе, чем в приведенном решении: считали, что пешеход и велосипедист встретились через час и именно тогда пешеход попросил соседа-велосипедиста привезти ему ключи. Поскольку в условии явно не сказано, где именно находился сосед, а при другой трактовки условия получается в целом аналогичная задача (хотя и с несколько более громоздким вычислением) жюри приняло решение засчитывать оба варианта трактовки условия. Приведём план решения для второй трактовки.

Ответ: $\frac{8\pi-14}{27}$.

Решение. Для определенности будем считать, что пешеход вышел на прогулку по кольцевой аллее против часовой стрелки. За 1 час прогулки пешеход прошел 7 километров и отошёл от пункта B на целых $7 - 2\pi$ км. Точку, где сейчас находятся пешеход и велосипедист, назовём точкой C.

Поскольку скорость велосипедиста в любом случае больше скорости пешехода, то оптимальной стратегией будет

- велосипедисту максимально быстро доехать до пункта A;
- в это время пешеходу идти «навстречу» велосипедисту, рассчитав идти по шоссе или по аллее.
- велосипедисту и пешеходу продолжить двигаться навстречу друг другу.

Находясь в пункте C у велосипедиста есть две возможности: поехать по аллее против часовой стрелки или доехать до пункта B и поехать по шоссе. В первом случае велосипедист затратит $\frac{4\pi-7}{20}$ ч, а во втором — $\frac{7-2\pi}{20} + \frac{4}{15}$ ч. Сравним эти два числа:

$$\frac{4\pi - 7}{20} < \frac{7 - 2\pi}{20} + \frac{4}{15}.$$

Итак, велосипедист поедет в пункт A по аллее. Пусть он затратит на эту поездку время t. Тогда пешеход за это время может пройти расстояние $7t$. Если велосипедист и пешеход договорятся встретиться на аллее, то тогда они смогут сделать это через $\frac{4\pi-7-7t}{20+7}$ ч; если же они договорятся встретится на шоссе, то — через $\frac{4+(7-2\pi)-7t}{15+7}$ ч. Сравним эти два времени:

$$\frac{4 + (7 - 2\pi) - 7t}{15 + 7} < \frac{4\pi - 7 - 7t}{20 + 7}.$$

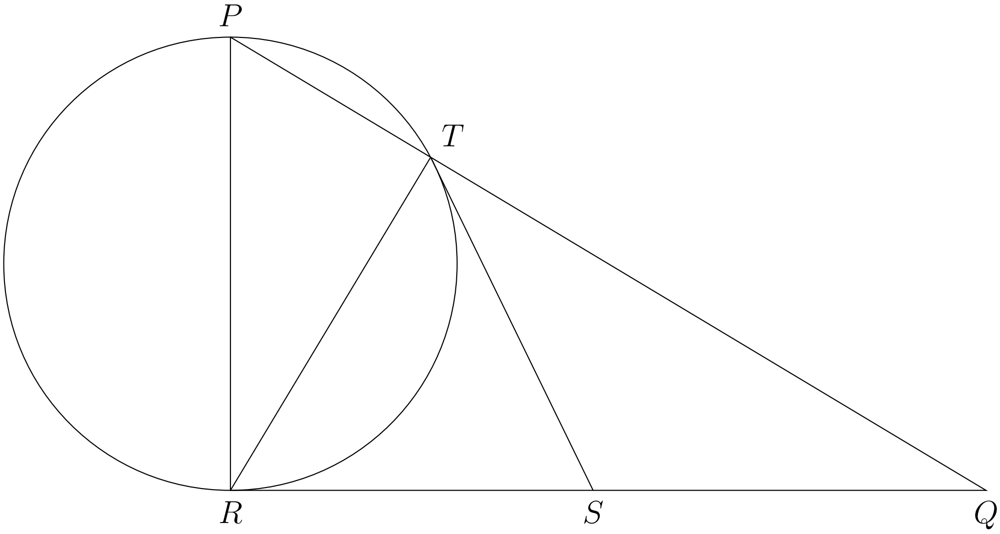
Итак, пешеход и велосипедист встретятся на шоссе, т.е. через

$$\frac{4 + (7 - 2\pi) - 7t}{15 + 7} + t = \frac{8\pi - 14}{27}.$$

Задача 4. В прямоугольном треугольнике PQR на катете PR как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу PQ в точке T. Через точку T проведена касательная к окружности, которая пересекает катет RQ в точке S. Найдите длину SQ, если $PT = 15$, а $QT = 5$.

Ответ: 5.

Решение. Решение основано на двух простых наблюдениях. Во-первых, $\angle PTR = 90^\circ$, поскольку опирается на диаметр. Во-вторых, ST и SR — касательные к окружности из условия, поэтому $ST = SR$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике RTQ на гипотенузе QR отмечена такая точка S, что $ST = SR$; хорошо известно, что тогда S — середина этой гипотенузы, $QS = QR/2$.



Закончить решения можно несколькими способами, приведём два из них.

Первый способ, высота прямоугольного треугольника и теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике PQR высота RT делит гипотенузу PQ на отрезки $PT = 15$ и $QT = 5$. Получаем, что $RT^2 = PT \cdot QT = 15 \cdot 5$; по теореме Пифагора $QR^2 = QT^2 + RT^2 = 5^2 + 15 \cdot 5 = 100$, $QS = QR/2 = 5$.

Второй способ, теорема о квадрате касательной. По теореме о квадрате касательной для касательной QR и секущей QP имеем: $QR^2 = QT \cdot QP = 5 \cdot (5 + 15) = 100$, $QS = QR/2 = 5$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + 4xy + 12y^2 + 16y = -6 \\ x^2 - 12xy + 4y^2 - 10x + 12y = -7 \end{array} \right. .$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{4}$.

Решение. Сложим первое уравнение, умноженное на 3, и второе. Получим,

$$10x^2 + 40y^2 - 10x + 60y = -25;$$

после деления на 10 и преобразований, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = 0$. Сумма двух квадратов может равняться нулю только в случае, когда каждый из этих квадратов равен нулю. Поэтому, ничего кроме $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{4}$ не может являться решением нашей системы.

Для окончания решения необходимо проверить, что найденные числа подходят:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 12 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 16 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -6 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 10 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -7 \end{array} \right. .$$

Комментарий. Достаточно проверить, что найденные числа подходят хотя бы в одно из уравнений.

Другое решение. Посмотрим на первое уравнение как на уравнение относительно x при фиксированном y:

$$12x^2 + 2(2y + 8)x + 3y^2 + 6 = 0.$$

Тогда четверть его дискриминанта равняется

$$D/4 = (2y + 8)^2 - 12(3y^2 + 6) = 4\big(\big)$$

Задача 6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin(x) + 8\cos(x) = 4\sin(8x) + 7\cos(8x).$$

Ответ: $\frac{\alpha+\beta-2\pi}{9} \approx -0{,}6266$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{4}{7}$.

Комментарий 1. В зависимости от выбора способа решения и обратной тригонометрической функции ответ может иметь разный вид. Приведём ещё несколько способов описать α и β:

$$\alpha = \operatorname{arcctg} 8 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{65}} = \arccos\frac{8}{\sqrt{65}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{8}{\sqrt{65}} = \ldots$$
$$\beta = \operatorname{arcctg}\frac{7}{4} = \arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} = \arccos\frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{7}{\sqrt{65}} = \ldots$$

Например, ответ можно переписать в виде

$$-\frac{1}{9}\left(\pi + \arcsin\frac{8}{\sqrt{65}} + \arcsin\frac{7}{\sqrt{65}}\right).$$

Для удобства проверки в ответе приведено приблизительное значение выражения. От участиников этого, естественно, не требовалось.

Комментарий 2. Ответ можно упростить до одной обратной тригонометрической функции. Действительно, если $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{4}{7}$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{1/8 + 4/7}{1 - 1/8\cdot 4/7} = \frac{3}{4},$$

откуда, поскольку $\alpha+\beta \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, получаем, что ответ равен $\frac{1}{9}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} - 2\pi\right)$. От участников подобного упрощения не требовалось.

Решение. Поделим левую и правую части уравнения на $\sqrt{65} = \sqrt{1^2+8^2} = \sqrt{4^2+7^2}$. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{4}{7}$; тогда $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{65}}$, $\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{65}}$, $\sin\beta = \frac{4}{\sqrt{65}}$, $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}}$, а уравнение приобретает вид

$$\sin\alpha\sin x + \cos\alpha\cos x = \sin\beta\sin 8x + \cos\beta\cos 8x,$$

или $\cos(x-\alpha) = \cos(8x-\beta)$. Решенями этого уравнения является совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x-\alpha = 8x-\beta+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x-\alpha = \beta-8x+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.,$$

то есть

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\beta-\alpha-2\pi k}{7},\ k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{\alpha+\beta+2\pi n}{9},\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Поскольку $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, то наибольшими отрицательными корнями серий из совокупности являются числа $x_1 = \frac{\beta-\alpha-2\pi}{7}$ и $x_2 = \frac{\alpha+\beta-2\pi}{9}$. Осталось сравнить x_1 и x_2. Для этого заметим, что

$$-x_1 = (2\pi+\alpha-\beta)\cdot\frac{1}{7} > (2\pi-\alpha-\beta)\cdot\frac{1}{9} = -x_2$$

(каждый из множителей слева больше соответствующего множетеля справа и все четыре положительны), откуда $x_1 < x_2 < 0$.

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - 14x^2 + ax - 27 = 0$ имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?

Ответ: только 42.

Решение. Пусть параметр a подходит. Тогда у многочлена $x^3 - 14x^2 + ax - 27 = 0$ есть три различных корня x_1, x_2, x_3. Воспользуемся теоремой Виета для многочлена третьей степени:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3 = 14 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = a \\ x_1x_2x_3 = 27 \end{array}\right..$$

Поскольку x_1, x_2, x_3 образуют геометрическую прогрессию (пусть именно в таком порядке), то найдутся такие b и q, что $x_1 = b$, $x_2 = bq$, $x_3 = bq^2$. Тогда из равенства $x_1x_2x_3 = 27$, имеем $b^3q^3 = 27$, откуда $x_2 = bq = 3$, $x_1 = 3/q$, $x_3 = 3q$.

Тогда $3\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 14$ (*), после преобразований $3q^2 - 11q + 3 = 0$. Дискриминант этого выражения равен $D = 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 > 0$, поэтому такое q, а с ним и x_1, x_2, x_3, найдутся. Тогда

$$a = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = x_1x_2x_3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 27 \cdot \left(\frac{q}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3q}\right) = 9\left(q + 1 + \frac{1}{q}\right) = 3 \cdot 14 = 42.$$

(В предпоследнем переходе мы воспользовались равенством (*)).

Комментарий. Естественно, q, x_1, x_2, x_3 можно вычислить явно:

$$q_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{85}}{6}.$$

Выберем q с «+» (если выбрать с «−», то x_1 и x_3 поменяются местами, что не повлияет на ответ); тогда

$$x_1 = \frac{3 \cdot 6}{11 + \sqrt{85}} = \frac{11 - \sqrt{85}}{2},\ x_2 = 3,\ x_3 = \frac{11 + \sqrt{85}}{2}.$$

Можно было вычислить a, подставив полученные числа в выражение $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

Задача 8. Про тетраэдр $XYZT$ известно, что $XY = 6$, $TZ = 8$, $\angle YZT = \angle XTZ = 25°$, $\angle YTZ = \angle XZT = 65°$. Вокруг тетраэдра описана сфера. Рассмотрим на этой сфере множество всех точек, сумма сферических расстояний от которых до точек X, Y, Z, T не меньше 8π. Чему равна площадь этого множества? Сферическое расстояние между двумя точками на сфере — длина наименьшей дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки.

Ответ: 32π, т.е. половина площади сферы радиуса 4.

Решение. Так как $\angle YZT + \angle YTZ = \angle XZT + \angle XTZ = 90°$, то треугольники YZT и XZT — прямоугольные с общей гипотенузой ZT. Если O — середина отрезка ZT, то по свойству медианы прямоугольного треугольника, $OX = OY = OZ = OT = 4$. Следовательно, радиус описанной сферы равен 4, а точка O — её центр.

Обозначим через $d(X, Y)$ сферическое расстояние между точками X и Y. По условию задачи необходимо найти площадь множества ω на сфере, состоящего в точности из точек M, для которых

$$d(M, X) + d(M, Y) + d(M, Z) + d(M, T) \geqslant 8\pi. \tag{1}$$

Поскольку ZT — диаметр сферы, то точки Z, M и T лежат на одной окружности большого круга; следовательно, $d(Z, M) + d(M, T) = d(Z, T) = 4\pi$. Неравенство (1) перепишется в виде

$$d(M, X) + d(M, Y) \geqslant 4\pi. \tag{2}$$

Пусть Y_1 — точка, симметричная точке Y относительно центра сферы O. Так как Y_1 и Y — концы диаметра сферы, то $d(Y, M) + d(M, Y_1) = d(Y, Y_1) = 4\pi$. Подставляя $d(M, Y) = 4\pi - d(M, Y_1)$ в неравенство (2), получаем

$$d(M, X) \geqslant d(M, Y_1).$$

Так как $XY = 6 \neq 8$, то XY не является диаметром, а потому $Y_1 \neq X$. Итак, ω есть множество точек на сфере, сферическое расстояние от которых до одной точки на сфере не превосходит сферического расстояни до другой точки на сфере. В силу симметрии (относительно плоскости, проходящей через центр сферы перпендикулярно отрезку Y_1X), ω — половина сферы и её площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 4^2 = 32\pi$.

Задача 9. Про функции $s(x)$ и $t(x)$ известно, что $s(0) = t(0) > 0$ и $s'(x)\sqrt{t'(x)} = 5$ для любого $x \in [0; 1]$. Докажите, что если $x \in [0; 1]$, то $2s(x) + 5t(x) > 15x$.

Решение. Заметим, что $2s(0) + 5t(0) > 0$, поэтому для доказательства неравенства достаточно проверить, что функция $2s(x) + 5t(x) - 15x$ возрастает на промежутке $[0; 1]$. Для этого докажем, что её производная на этом промежутке неотрицательна. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ, подстановка.

$$2s'(x)+5t'(x)-15=2s'(x)+\frac{125}{\big(s'(x)\big)^2}-15=\frac{\big(2s'(x)+5\big)\big(s'(x)-5\big)^2}{\big(s'(x)\big)^2}\geqslant 0,$$

поскольку $s'(x)$, как следует из условия, неотрицательно.

Второй способ, неравенство о средних.

$$2s'(x)+5t'(x)=s'(x)+s'(x)+5t'(x)\geqslant 3\sqrt[3]{s'(x)\cdot s'(x)\cdot 5t'(x)}=15,$$

где неравенство следует из неравенства о средних для трёх чисел, а последнее равенство – из условия.

Задача 10. В кружок ходит 10 человек, некоторые из которых между собой дружат. Может ли так быть, что в этом кружке один участник дружит с 9 другими, один участник — с 7 другими, один участник — с 6 другими, два участника — с 5 другими каждый, два участника — с 3 другими каждый, один участник — с 2 другими, два участника — с 1 другим каждый?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Введём граф, вершинами которого будут участники кружка, а ребро между вершинами проведём в том и только том случае, если соответствующие участники кружка дружат.

Будем описывать граф в виде последовательности целых чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где a_i означает степень вершины i. Будем называть последовательность целых чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *реализуемой*, если существует граф, описание которого совпадает с $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. В условии спрашивается, реализуема ли последовательность $(9, 7, 6, 5, 5, 3, 3, 2, 1, 1)$.

Заметим следующие два простых факта:

1. Пусть $a_i = 0$; тогда если реализуема последовательность $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то реализуема и последовательность $(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Для реализации достаточно откинуть вершину с номером i.
2. Пусть $a_i = n-1$; тогда если реализуема последовательность $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то реализуема и последовательность $(a_1-1, a_2-1, \dots, a_{i-1}-1, a_{i+1}-1, \dots, a_n-1)$. Действительно, если $a_i = n-1$, то вершина с номером i должна быть соединена со всеми остальными вершинами, поэтому достаточно откинуть её и все выходящие из неё рёбра.

Предположим противное и пусть последовательность $(9, 7, 6, 5, 5, 3, 3, 2, 1, 1)$ реализуема. Пользуясь фактами 1 и 2 последовательно получаем, что тогда реализуемы и последовательности

$$(6,5,4,4,2,2,1,0,0),\ (6,5,4,4,2,2,1),\ (4,3,3,1,1,0),\ (4,3,3,1,1),\ (2,2,0,0),\ (2,2)$$

но последовательность $(2, 2)$, очевидно, не реализуема. Противоречие; значит, наше предположение неверно и последовательность $(9, 7, 6, 5, 5, 3, 3, 2, 1, 1)$ не реализуема.

Другое решение. Аналогично первому решению введём граф.

Заметим, что если $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ — степени вершин некоторого графа без петель и кратных рёбер, то для каждого k выполнено неравенство

$$d_1+d_2+\ldots+d_k\leqslant k(k-1)+d_{k+1}+\ldots+d_n.$$

Действительно, все рёбра, выходящие из вершин с номерами от 1 до k делятся на два типа:

1. идущие в вершины с номерами от $k+1$ до n — таких не больше $d_{k+1}+\ldots+d_n$;
2. идущие в вершины с номерами от 1 до k — таких не больше $\frac{k(k-1)}{2}$, но каждое мы можем посчитать по два раза.

В задаче нас спрашивают, существует ли граф со степенями вершин $(9, 7, 6, 5, 5, 3, 3, 2, 1, 1)$. Предположим, что он существует, и воспользуемся доказанным утверждением для первых 5 вершин:

$$32=9+7+6+5+5\leqslant 5\cdot 4+3+3+2+1+1=30,$$

противоречие.

Вариант III

Задача 1. Дан многочлен $S(x) = 1+3x+5x^2+7x^3+\ldots+201x^{100}$. Можно ли, переставив коэффициенты в нём, получить многочлен $T(x) = t_0+t_1x+t_2x^2+t_3x^3+\ldots+t_{100}x^{100}$ такой, что для всех натуральных чисел $k \geqslant 2$ разность $S(k)-T(k)$ не кратна 2020?

Ответ: Нет, нельзя.

Решение. Предположим противное и пусть такой многочлен $T(x)$ существует. Будем пользоваться следующей известной леммой:

> если $H(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то для любых целых a и b число $H(a)-H(b)$ делится на $a-b$.

Тогда числа $S(2021)-S(1)$ и $T(2021)-T(1)$ делятся на 2020, а тогда на 2020 делится и их разность:

$$\big(S(2021)-S(1)\big)-\big(T(2021)-T(1)\big) = \big(S(2021)-T(2021)\big)-\big(S(1)-T(1)\big).$$

Осталось заметить, что $S(1) = 1+3+\ldots+201 = T(1)$, то есть $S(2021)-T(2021)$ делится на 2020. Противоречие.

Другое решение. Предположим противное. Будем писать сравнения по модулю 2020. Тогда

$$S(2021) = 1+3\cdot 2021+5\cdot 2021^2+\ldots+201\cdot 2021^{100} \equiv 1+3\cdot 1+5\cdot 1^2+\ldots+201\cdot 1^{100} = \\ = t_0+t_1+\ldots+t_{100} \equiv t_0+t_1\cdot 2021+t_2\cdot 2021^2+\ldots+t_{100}\cdot 2021^{100} = T(2021),$$

откуда $S(2021) \equiv T(2021)$, то есть $S(2021)-T(2021)$ делится на 2020. Противоречие.

Задача 2. При каком наименьшем n существуют n чисел из интервала $(-1;1)$, таких, что их сумма равна 0, а сумма их квадратов равна 36?

Ответ: 38.

Решение. Для начала приведём пример 38 чисел, сумма которых равна 0, а сумма их квадратов равна 36. Например, подойдут числа $x_1 = x_2 = \ldots = x_{19} = \sqrt{\frac{18}{19}}$, $x_{20} = x_{21} = \ldots = x_{38} = -\sqrt{\frac{18}{19}}$.

Докажем теперь, что меньше чем 38 числами обойтись не удастся. Предположим противное. Тогда среди всех чисел или положительных, или отрицательных не более 18. Домножая, если необходимо, все числа на -1, можно считать, что отрицательных чисел не более 18.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — все отрицательные числа, а $y_{k+1}, \ldots, y_n$ — все неотрицательные числа. Тогда $y_1^2+y_2^2+\ldots+y_k^2 < k \leqslant 18$, а

$$y_{k+1}^2+y_{k+2}^2+\ldots+y_n^2 \leqslant y_{k+1}+y_{k+2}+\ldots+y_n = -y_1-y_2-\ldots-y_k < k \leqslant 18.$$

Складывая полученные неравенства, получаем, $36 = y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2 < 36$. Противоречие.

Задача 3. Пункты A и B, находящиеся на кольцевой аллее, соединены прямолинейным отрезком шоссе длиной 4 км, являющимся диаметром кольцевой аллеи. Из пункта A из дома по аллее вышел на прогулку пешеход. Через 1 час он обнаружил, что забыл ключи и попросил соседа-велосипедиста поскорее привезти их. Через какое минимальное время он может получить ключи, если скорость велосипедиста на шоссе равна 15 км/ч, на аллее — 20 км/ч, а скорость пешехода — 6,5 км/ч? Пешеход может идти навстречу велосипедисту.

Ответ: через $\frac{21-4\pi}{43}$ ч.

Решение. Для определенности будем считать, что пешеход вышел на прогулку по кольцевой аллее против часовой стрелки. В пункте A у велосипедиста есть три возможности:

1. поехать по аллее против часовой стрелки;
2. поехать по шоссе;
3. поехать по аллее по часовой стрелке.

За 1 час прогулки пешеход прошел 6,5 километров и, миновав пункт B, не дошёл до пункта A целых $4\pi - 6{,}5$ км. Поэтому первый вариант точно дольше третьего и его можно исключить.

В третьем случае двигаясь по аллее они должны будут преодолеть расстояние $4\pi - 6{,}5$ км и в случае, если они будут двигаться навстречу друг другу, необходимое время равно $\frac{4\pi-6{,}5}{20+6{,}5}$ ч.

Во втором случае при движении навстречу друг другу через $\frac{6{,}5-2\pi}{6{,}5}$ ч пешеход достигнет пункта B, а велосипедист ещё будет ехать по шоссе (поскольку $\frac{4}{15} > \frac{6{,}5-2\pi}{6{,}5}$). Тогда велосипедист всё время до встречи будет ехать по шоссе и скорость сближения пешехода и велосипедиста всё время будет составлять $15 + 6{,}5 = 21{,}5$ км/ч. Значит, они встретятся через $\frac{10{,}5-2\pi}{21{,}5}$ ч.

Сравним числа, полученные в 2 и 3 случаях:

$$\frac{10{,}5 - 2\pi}{21{,}5} < \frac{21 - 4 \cdot 3{,}14}{43} < 0{,}20 < 0{,}22 < \frac{8 \cdot 3{,}14 - 13}{53} < \frac{4\pi - 6{,}5}{26{,}5}$$

(второе и четвёртое неравенство можно получить, например, делением в столбик). Следовательно, ответ достигается во 2-м случае.

Комментарий. Отдельные участники понимали условие иначе, чем в приведенном решении: считали, что пешеход и велосипедист встретились через час и именно тогда пешеход попросил соседа-велосипедиста привезти ему ключи. Поскольку в условии явно не сказано, где именно находился сосед, а при другой трактовки условия получается в целом аналогичная задача (хотя и с несколько более громоздким вычислением) жюри приняло решение засчитывать оба варианта трактовки условия. Приведём план решения для второй трактовки.

Ответ: $\frac{155-28\pi}{172}$.

Решение. Для определенности будем считать, что пешеход вышел на прогулку по кольцевой аллее против часовой стрелки. За 1 час прогулки пешеход прошел 6,5 километров и отошёл от пункта B на целых $6{,}5 - 2\pi$ км. Точку, где сейчас находятся пешеход и велосипедист, назовём точкой C.

Поскольку скорость велосипедиста в любом случае больше скорости пешехода, то оптимальной стратегией будет

- велосипедисту максимально быстро доехать до пункта A;
- в это время пешеходу идти «навстречу» велосипедисту, рассчитав идти по шоссе или по аллее.
- велосипедисту и пешеходу продолжить двигаться навстречу друг другу.

Находясь в пункте C у велосипедиста есть две возможности: поехать по аллее против часовой стрелки или доехать до пункта B и поехать по шоссе. В первом случае велосипедист затратит $\frac{4\pi-6{,}5}{20}$ ч, а во втором — $\frac{6{,}5-2\pi}{20} + \frac{4}{15}$ ч. Сравним эти два числа:

$$\frac{6{,}5 - 2\pi}{20} + \frac{4}{15} < \frac{4\pi - 6{,}5}{20}$$

Итак, велосипедист поедет в пункт A по шоссе. Пусть он затратит на эту поездку время t. Тогда пешеход за это время может пройти расстояние $6{,}5t$. Если велосипедист и пешеход договорятся встретиться на аллее, то тогда они смогут сделать это через $\frac{4\pi-6{,}5-6{,}5t}{20+6{,}5}$ ч; если же они договорятся встретится на шоссе, то — через $\frac{4+(6{,}5-2\pi)-6{,}5t}{15+6{,}5}$ ч. Сравним эти два времени:

$$\frac{4\pi - 6{,}5 - 6{,}5t}{20 + 6{,}5} > \frac{4 + (6{,}5 - 2\pi) - 6{,}5t}{15 + 6{,}5}$$

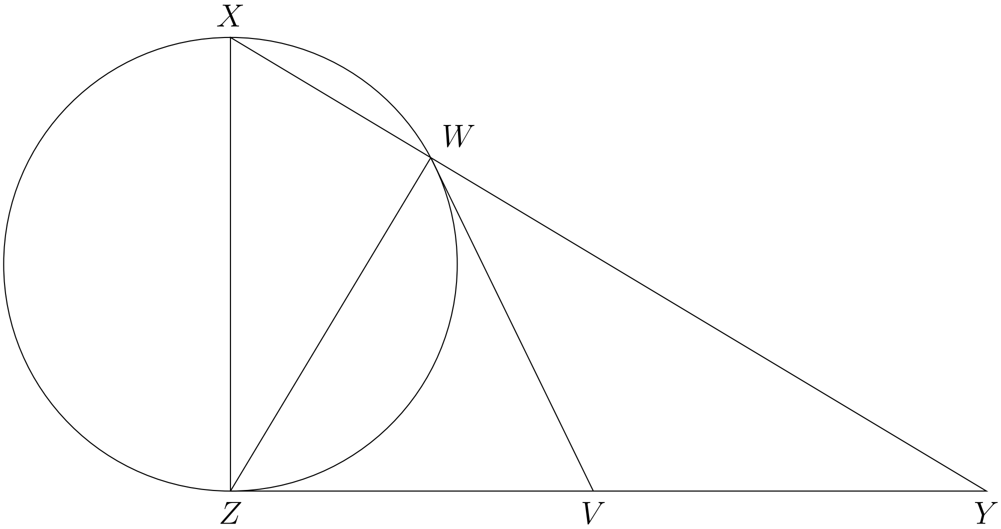
Итак, пешеход и велосипедист встретятся на шоссе, т.е. через

$$\frac{4 + (6{,}5 - 2\pi) - 6t}{15 + 6{,}5} + t = \frac{155 - 28\pi}{172}.$$

Задача 4. В прямоугольном треугольнике XYZ на катете XZ как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу XY в точке W. Через точку W проведена касательная к окружности, которая пересекает катет ZY в точке V. Найдите длину VY, если $XW = 12$, а $YW = 4$.

Ответ: 4.

Решение. Решение основано на двух простых наблюдениях. Во-первых, $\angle XWZ = 90°$, поскольку опирается на диаметр. Во-вторых, VW и VZ — касательные к окружности из условия, поэтому $VW = VZ$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике ZWY на гипотенузе YZ отмечена такая точка V, что $VW = VZ$; хорошо известно, что тогда V — середина этой гипотенузы, $YV = YZ/2$.



Закончить решения можно несколькими способами, приведём два из них.

Первый способ, высота прямоугольного треугольника и теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике XYZ высота ZW делит гипотенузу XY на отрезки $XW = 12$ и $YW = 4$. Получаем, что $ZW^2 = XW \cdot YW = 12 \cdot 4$; по теореме Пифагора $YZ^2 = YW^2 + ZW^2 = 4^2 + 12 \cdot 4 = 64$, $YV = YZ/2 = 4$.

Второй способ, теорема о квадрате касательной. По теореме о квадрате касательной для касательной YZ и секущей YX имеем: $YZ^2 = YW \cdot YX = 4 \cdot (4 + 12) = 64$, $YV = YZ/2 = 4$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 16x^2 + 8xy + 4y^2 + 20x + 2y = -7 \\ 8x^2 - 16xy + 2y^2 + 20x - 14y = -11 \end{cases}.$$

Ответ: $x = -\frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{2}$.

Решение. Сложим первое уравнение, умноженное на 2, и второе. Получим,

$$40x^2 + 10y^2 + 60x - 10y = -25;$$

после деления на 10 и преобразований, $4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. Сумма двух квадратов может равняться нулю только в случае, когда каждый из этих квадратов равен нулю.

Ответ: $x = -\frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{2}$.

Решение. Сложим первое уравнение, умноженное на 3, и второе. Получим,

$$40x^2 + 10y^2 + 60x - 10y = -25;$$

после деления на 10 и преобразований, $4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. Сумма двух квадратов может равняться нулю только в случае, когда каждый из этих квадратов равен нулю. Поэтому, ничего кроме $x = -\frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{2}$ не может являться решением нашей системы.

Для окончания решения необходимо проверить, что найденные числа подходят:

$$\begin{cases} 16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 20 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} = -7 \\ 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 16 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 20 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 14 \cdot \frac{1}{2} = -11 \end{cases}.$$

Комментарий. Достаточно проверить, что найденные числа подходят хотя бы в одно из уравнений.

Задача 6. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$2\sin(6x) + 9\cos(6x) = 6\sin(2x) + 7\cos(2x).$$

Ответ: $\frac{\alpha+\beta}{8} \approx 0{,}1159$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{9}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{6}{7}$.

Комментарий 1. В зависимости от выбора способа решения и обратной тригонометрической функции ответ может иметь разный вид. Приведём ещё несколько способов описать α и β:

$$\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{9}{2} = \arcsin\frac{2}{\sqrt{85}} = \arccos\frac{9}{\sqrt{85}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{9}{\sqrt{85}} = \ldots$$
$$\beta = \operatorname{arcctg}\frac{7}{6} = \arcsin\frac{6}{\sqrt{85}} = \arccos\frac{7}{\sqrt{85}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{7}{\sqrt{85}} = \ldots$$

Например, ответ можно переписать в виде

$$\frac{1}{8}\left(\pi - \arcsin\frac{9}{\sqrt{85}} - \arcsin\frac{7}{\sqrt{85}}\right).$$

Для удобства проверки в ответе приведено приблизительное значение выражения. От участиников этого, естественно, не требовалось.

Комментарий 2. Ответ можно упростить до одной обратной тригонометрической функции. Действительно, если $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{9}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{6}{7}$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{2/9 + 6/7}{1 - 2/9\cdot 6/7} = \frac{4}{3},$$

откуда, поскольку $\alpha+\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, получаем, что ответ равен $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. От участников подобного упрощения не требовалось.

Решение. Поделим левую и правую части уравнения на $\sqrt{85} = \sqrt{2^2+9^2} = \sqrt{6^2+7^2}$. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{9}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{6}{7}$; тогда $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{85}}$, $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{85}}$, $\sin\beta = \frac{6}{\sqrt{85}}$, $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{85}}$, а уравнение приобретает вид

$$\sin\alpha\sin 6x + \cos\alpha\cos 6x = \sin\beta\sin 2x + \cos\beta\cos 2x,$$

или $\cos(6x-\alpha) = \cos(2x-\beta)$. Решенями этого уравнения является совокупность

$$\left[\begin{array}{l} 6x-\alpha = 2x-\beta+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 6x-\alpha = \beta-2x+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.,$$

то есть

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\alpha-\beta+2\pi k}{4},\ k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{\alpha+\beta+2\pi n}{8},\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Поскольку $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, то наименьшими положительными корнями серий из совокупности являются числа $x_1 = \frac{\alpha-\beta+2\pi}{4}$ и $x_2 = \frac{\alpha+\beta}{8}$. Осталось сравнить x_1 и x_2. Для этого заметим, что

$$x_2 = \frac{\alpha+\beta}{8} < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4} < \frac{2\pi+\alpha-\beta}{4} = x_1.$$

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - 15x^2 + ax - 64 = 0$ имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?

Ответ: только 60.

Решение. Пусть параметр a подходит. Тогда у многочлена $x^3 - 15x^2 + ax - 64 = 0$ есть три различных корня x_1, x_2, x_3. Воспользуемся теоремой Виета для многочлена третьей степени:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 15 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = a \\ x_1x_2x_3 = 64 \end{cases}.$$

Поскольку x_1, x_2, x_3 образуют геометрическую прогрессию (пусть именно в таком порядке), то найдутся такие b и q, что $x_1 = b$, $x_2 = bq$, $x_3 = bq^2$. Тогда из равенства $x_1x_2x_3 = 64$, имеем $b^3q^3 = 64$, откуда $x_2 = bq = 4$, $x_1 = 4/q$, $x_3 = 4q$.

Тогда $4\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 15$ (*), после преобразований $4q^2 - 11q + 4 = 0$. Дискриминант этого выражения равен $D = 11^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 > 0$, поэтому такое q, а с ним и x_1, x_2, x_3, найдутся. Тогда

$$a = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = x_1x_2x_3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 64 \cdot \left(\frac{q}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4q}\right) = 16\left(q + 1 + \frac{1}{q}\right) = 4 \cdot 15 = 60.$$

(В предпоследнем переходе мы воспользовались равенством (*)).

Комментарий. Естественно, q, x_1, x_2, x_3 можно вычислить явно:

$$q_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{57}}{8}.$$

Выберем q с «+» (если выбрать с «−», то x_1 и x_3 поменяются местами, что не повлияет на ответ); тогда

$$x_1 = \frac{4 \cdot 8}{11 + \sqrt{57}} = \frac{11 - \sqrt{57}}{2},\ x_2 = 4,\ x_3 = \frac{11 + \sqrt{57}}{2}.$$

Можно было вычислить a, подставив полученные числа в выражение $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

Задача 8. Про тетраэдр $KLMN$ известно, что $KL = 5$, $NM = 6$, $\angle LMN = \angle KNM = 35^\circ$, $\angle LNM = \angle KMN = 55^\circ$. Вокруг тетраэдра описана сфера. Рассмотрим на этой сфере множество всех точек, сумма сферических расстояний от которых до точек K, L, M, N не больше 6π. Чему равна площадь этого множества? Сферическое расстояние между двумя точками на сфере — длина наименьшей дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки.

Ответ: 18π, т.е. половина площади сферы радиуса 3.

Решение. Так как $\angle LMN + \angle LNM = \angle KMN + \angle KNM = 90^\circ$, то треугольники LMN и KMN — прямоугольные с общей гипотенузой MN. Если O — середина отрезка MN, то по свойству медианы прямоугольного треугольника, $OK = OL = OM = ON = 3$. Следовательно, радиус описанной сферы равен 3, а точка O — её центр.

Обозначим через $d(X,Y)$ сферическое расстояние между точками X и Y. По условию задачи необходимо найти площадь множества ω на сфере, состоящего в точности из точек X, для которых

$$d(X,K) + d(X,L) + d(X,M) + d(X,N) \leqslant 6\pi. \tag{1}$$

Поскольку MN — диаметр сферы, то точки M, X и N лежат на одной окружности большого круга; следовательно, $d(M,X) + d(X,N) = d(M,N) = 3\pi$. Неравенство (1) перепишется в виде

$$d(X,K) + d(X,L) \leqslant 3\pi. \tag{2}$$

Пусть L_1 — точка, симметричная точке L относительно центра сферы O. Так как L_1 и L — концы диаметра сферы, то $d(L,X) + d(X,L_1) = d(L,L_1) = 3\pi$. Подставляя $d(X,L) = 3\pi - d(X,L_1)$ в неравенство (2), получаем

$$d(X,K) \leqslant d(X,L_1).$$

Так как $KL = 5 \neq 6$, то KL не является диаметром, а потому $L_1 \neq K$. Итак, ω есть множество точек на сфере, сферическое расстояние от которых до одной точки на сфере не превосходит сферического расстояни до другой точки на сфере. В силу симметрии (относительно плоскости, проходящей через центр сферы перпендикулярно отрезку L_1K), ω — половина сферы и её площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 18\pi$.

Задача 9. Про функции $a(x)$ и $b(x)$ известно, что $a(0) = b(0) > 0$ и $a'(x)\sqrt{b'(x)} = 2$ для любого $x \in [0;1]$. Докажите, что если $x \in [0;1]$, то $a(x) + 8b(x) > 6x$.

Решение. Заметим, что $a(0) + 8b(0) > 0$, поэтому для доказательства неравенства достаточно проверить, что функция $a(x) + 8b(x) - 6x$ возрастает на промежутке $[0;1]$. Для этого докажем, что её производная на этом промежутке неотрицательна. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ, подстановка.

$$a'(x)+8q'(x)-6=a'(x)+\frac{32}{\big(a'(x)\big)^2}-6=\frac{\big(a'(x)+2\big)\big(a'(x)-4\big)^2}{\big(a'(x)\big)^2}\geqslant 0,$$

поскольку $a'(x)$, как следует из условия, неотрицательно.

Второй способ, неравенство о средних.

$$a'(x)+8b'(x)=\frac{1}{2}a'(x)+\frac{1}{2}a'(x)+8b'(x)\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}a'(x)\cdot\frac{1}{2}a'(x)\cdot 8b'(x)}=6,$$

где неравенство следует из неравенства о средних для трёх чисел, а последнее равенство – из условия.

Задача 10. В отряде 10 человек. Каждый день из них нужно выбирать двух дежурных (при этом одна и та же пара не может дежурить дважды). Могло ли так оказаться, что через несколько дней один человек дежурил 9 раз, двое — по 8 раз, двое — по 5 раз, четверо — по 3 раза, один — 1 раз?

Ответ: Нет, не могло.

Решение. Введём граф, вершинами которого будут участники отряда, а ребро между вершинами проведём в том и только том случае, если соответствующие участники отряда вместе ходили дежурить.

Будем описывать граф в виде последовательности целых чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где a_i означает степень вершины i. Будем называть последовательность целых чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *реализуемой*, если существует граф, описание которого совпадает с $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. В условии спрашивается, реализуема ли последовательность $(9,8,8,5,5,3,3,3,3,1)$.

Заметим следующие два простых факта:
1. Пусть $a_i=0$; тогда если реализуема последовательность $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, то реализуема и последовательность $(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n)$. Для реализации достаточно откинуть вершину с номером i.
2. Пусть $a_i=n-1$; тогда если реализуема последовательность $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, то реализуема и последовательность $(a_1-1,a_2-1,\ldots,a_{i-1}-1,a_{i+1}-1,\ldots,a_n-1)$. Действительно, если $a_i=n-1$, то вершина с номером i должна быть соединена со всеми остальными вершинами, поэтому достаточно откинуть её и все выходящие из неё рёбра.

Предположим противное и пусть последовательность $(9,8,8,5,5,3,3,3,3,1)$ реализуема. Пользуясь фактами 1 и 2 последовательно получаем, что тогда реализуемы и последовательности

$$(7,7,4,4,2,2,2,2,0),\ (7,7,4,4,2,2,2,2),\ (6,3,3,1,1,1,1),\ (2,2,0,0,0,0),\ (2,2)$$

но последовательность $(2,2)$, очевидно, не реализуема. Противоречие; значит, наше предположение неверно и последовательность $(9,8,8,5,5,3,3,3,3,1)$ не реализуема.

Другое решение. Аналогично первому решению введём граф.

Заметим, что если $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ — степени вершин некоторого графа без петель и кратных рёбер, то для каждого k выполнено неравенство

$$d_1+d_2+\ldots+d_k\leqslant k(k-1)+d_{k+1}+\ldots+d_n.$$

Действительно, все рёбра, выходящие из вершин с номерами от 1 до k делятся на два типа:
1. идущие в вершины с номерами от $k+1$ до n — таких не больше $d_{k+1}+\ldots+d_n$;
2. идущие в вершины с номерами от 1 до k — таких не больше $\frac{k(k-1)}{2}$, но каждое мы можем посчитать по два раза.

В задаче нас спрашивают, существует ли граф со степенями вершин $(9,8,8,5,5,3,3,3,3,1)$. Предположим, что он существует, и воспользуемся доказанным утверждением для первых 5 вершин:

$$35=9+8+8+5+5\leqslant 5\cdot 4+3+3+3+3+1=33,$$

противоречие.

Вариант IV

Задача 1. Дан многочлен $A(x) = 1+3x+5x^2+7x^3+\ldots+199x^{99}$. Можно ли, переставив коэффициенты в нём, получить многочлен $B(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots+b_{99}x^{99}$ такой, что для всех натуральных чисел $k \geqslant 2$ разность $A(k)-B(k)$ не кратна 199?

Ответ: Нет, нельзя.

Решение. Предположим противное и пусть такой многочлен $B(x)$ существует. Будем пользоваться следующей известной леммой:

> если $H(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то для любых целых a и b число $H(a)-H(b)$ делится на $a-b$.

Тогда числа $A(200)-A(1)$ и $B(200)-B(1)$ делятся на 199, а тогда на 199 делится и их разность:

$$\big(A(200)-A(1)\big)-\big(B(200)-B(1)\big)=\big(A(200)-B(200)\big)-\big(A(1)-B(1)\big).$$

Осталось заметить, что $A(1) = 1+3+\ldots+199 = B(1)$, то есть $A(200)-B(200)$ делится на 199. Противоречие.

Другое решение. Предположим противное. Будем писать сравнения по модулю 199. Тогда

$$A(200) = 1+3\cdot 200+5\cdot 200^2+\ldots+199\cdot 200^{99} \equiv 1+3\cdot 1+5\cdot 1^2+\ldots+199\cdot 1^{99} = \\ = b_0+b_1+\ldots+b_{99} \equiv b_0+b_1\cdot 200+b_2\cdot 200^2+\ldots+b_{99}\cdot 200^{99} = B(200),$$

откуда $A(200)\equiv B(200)$, то есть $A(200)-B(200)$ делится на 199. Противоречие.

Задача 2. При каком наименьшем n существуют n чисел из интервала $(-1;1)$, таких, что их сумма равна 0, а сумма их квадратов равна 40?

Ответ: 42.

Решение. Для начала приведём пример 42 чисел, сумма которых равна 0, а сумма их квадратов равна 40. Например, подойдут числа $x_1 = x_2 = \ldots = x_{21} = \sqrt{\frac{20}{21}}$, $x_{22} = x_{23} = \ldots = x_{42} = -\sqrt{\frac{20}{21}}$.

Докажем теперь, что меньше чем 42 числами обойтись не удастся. Предположим противное. Тогда среди всех чисел или положительных, или отрицательных не более 20. Домножая, если необходимо, все числа на -1, можно считать, что отрицательных чисел не более 20.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — все отрицательные числа, а $y_{k+1}, \ldots, y_n$ — все неотрицательные числа. Тогда $y_1^2+y_2^2+\ldots+y_k^2 < k \leqslant 20$, а

$$y_{k+1}^2+y_{k+2}^2+\ldots+y_n^2 \leqslant y_{k+1}+y_{k+2}+\ldots+y_n = -y_1-y_2-\ldots-y_k < k \leqslant 20.$$

Складывая полученные неравенства, получаем, $40 = y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2 < 40$. Противоречие.

Задача 3. Пункты A и B, находящиеся на кольцевой аллее, соединены прямолинейным отрезком шоссе длиной 4 км, являющимся диаметром кольцевой аллеи. Из пункта A из дома по аллее вышел на прогулку пешеход. Через 1 час он обнаружил, что забыл ключи и попросил соседа-велосипедиста поскорее привезти их. Через какое минимальное время он может получить ключи, если скорость велосипедиста на шоссе равна 15 км/ч, на аллее — 20 км/ч, а скорость пешехода — 5,5 км/ч? Пешеход может идти навстречу велосипедисту.

Ответ: через $\frac{11}{51}$ ч.

Решение. Для определенности будем считать, что пешеход вышел на прогулку по кольцевой аллее против часовой стрелки. В пункте A у велосипедиста есть три возможности:

1. поехать по аллее против часовой стрелки;
2. поехать по шоссе;
3. поехать по аллее по часовой стрелке.

За 1 час прогулки пешеход прошел 5,5 километров и не дошел до пункта B (целых $2\pi - 5{,}5$ км!), поэтому третий вариант точно дольше первого и его можно исключить.

В первом случае двигаясь по аллее они должны будут преодолеть расстояние 5,5 км и в случае, если они будут двигаться навстречу друг другу, необходимое время равно $\frac{5{,}5}{20+5{,}5}$ ч.

Во втором случае при движении навстречу друг другу через $\frac{2\pi-5{,}5}{5{,}5}$ ч пешеход достигнет пункта B, а велосипедист ещё будет ехать по шоссе (поскольку $\frac{4}{15} > \frac{2\pi-5{,}5}{5{,}5}$). Тогда велосипедист всё время до встречи будет ехать по шоссе и скорость сближения пешехода и велосипедиста всё время будет составлять $15 + 5{,}5 = 20{,}5$ км/ч. Значит, они встретятся через $\frac{2\pi-1{,}5}{20{,}5}$ ч.

Сравним числа, полученные в 1 и 2 случаях:

$$\frac{5{,}5}{25{,}5} = \frac{11}{51} < 0{,}22 < 0{,}23 < \frac{4 \cdot 3{,}14 - 3}{41} < \frac{2\pi - 1{,}5}{20{,}5}$$

(первое и третье неравенство можно получить, например, делением в столбик). Следовательно, ответ достигается в 1-м случае.

Комментарий. Отдельные участники понимали условие иначе, чем в приведенном решении: считали, что пешеход и велосипедист встретились через час и именно тогда пешеход попросил соседа-велосипедиста привезти ему ключи. Поскольку в условии явно не сказано, где именно находился сосед, а при другой трактовки условия получается в целом аналогичная задача (хотя и с несколько более громоздким вычислением) жюри приняло решение засчитывать оба варианта трактовки условия. Приведём план решения для второй трактовки.

Ответ: $\frac{22}{51}$.

Решение. Для определенности будем считать, что пешеход вышел на прогулку по кольцевой аллее против часовой стрелки. За 1 час прогулки пешеход прошел 5,5 километров и не дошел до пункта B целых $2\pi - 5{,}5$ км. Точку, где сейчас находятся пешеход и велосипедист, назовём точкой C.

Поскольку скорость велосипедиста в любом случае больше скорости пешехода, то оптимальной стратегией будет

- велосипедисту максимально быстро доехать до пункта A;
- в это время пешеходу идти «навстречу» велосипедисту, рассчитав идти по шоссе или по аллее.
- велосипедисту и пешеходу продолжить двигаться навстречу друг другу.

Находясь в пункте C у велосипедиста есть две возможности: поехать по аллее по часовой стрелке или доехать до пункта B и поехать по шоссе. В первом случае велосипедист затратит $\frac{5{,}5}{20}$ ч, а во втором — $\frac{2\pi-5{,}5}{20} + \frac{4}{15}$ ч. Сравним эти два числа:

$$\frac{5{,}5}{20} < \frac{2\pi - 5{,}5}{20} + \frac{4}{15}$$

Итак, велосипедист поедет в пункт A по аллее. Пусть он затратит на эту поездку время t. Тогда пешеход за это время может пройти расстояние $5{,}5t$. Если велосипедист и пешеход договорятся встретиться на аллее, то тогда они смогут сделать это через $\frac{5{,}5-5{,}5t}{20+5{,}5}$ ч; если же они договорятся встретится на шоссе, то — через $\frac{4+(2\pi-5{,}5)-5{,}5t}{15+5{,}5}$ ч. Сравним эти два времени.

$$\frac{5{,}5 - 5{,}5t}{20 + 5{,}5} < \frac{4 + (2\pi - 5{,}5) - 5{,}5t}{15 + 5{,}5}$$

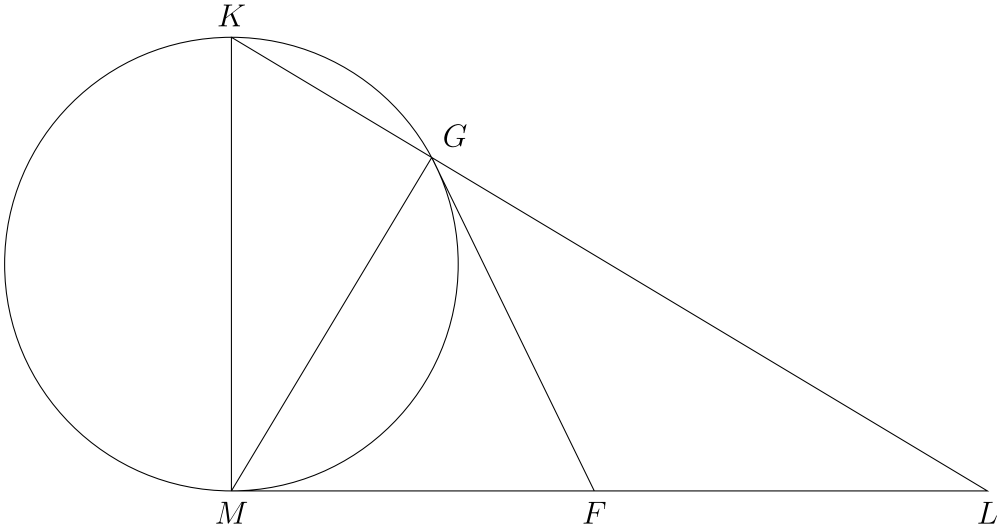
Итак, пешеход и велосипедист встретятся на аллее, т.е. через

$$\frac{5{,}5 - 5{,}5t}{20 + 5{,}5} + t = \frac{22}{51} \text{ ч.}$$

Задача 4. В прямоугольном треугольнике KLM на катете KM как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу KL в точке G. Через точку G проведена касательная к окружности, которая пересекает катет ML в точке F. Найдите длину FL, если $KG = 5$, а $LG = 4$.

Ответ: 3.

Решение. Решение основано на двух простых наблюдениях. Во-первых, $\angle KGM = 90°$, поскольку опирается на диаметр. Во-вторых, FG и FM — касательные к окружности из условия, поэтому $FG = FM$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике MGL на гипотенузе LM отмечена такая точка F, что $FG = FM$; хорошо известно, что тогда F — середина этой гипотенузы, $LF = LM/2$.



Закончить решения можно несколькими способами, приведём два из них.

Первый способ, высота прямоугольного треугольника и теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике KLM высота MG делит гипотенузу KL на отрезки $KG = 5$ и $LG = 4$. Получаем, что $MG^2 = KG \cdot LG = 5 \cdot 4$; по теореме Пифагора $LM^2 = LG^2 + MG^2 = 4^2 + 5 \cdot 4 = 36$, $LF = LM/2 = 3$.

Второй способ, теорема о квадрате касательной. По теореме о квадрате касательной для касательной LM и секущей LK имеем: $LM^2 = LG \cdot LK = 4 \cdot (4 + 5) = 36$, $LF = LM/2 = 3$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 + 8xy + 16y^2 + 2x + 20y = -7 \\ 2x^2 - 16xy + 8y^2 - 14x + 20y = -11 \end{cases}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{4}$.

Решение. Сложим первое уравнение, умноженное на 2, и второе. Получим,

$$10x^2 + 40y^2 - 10x + 60y = -25;$$

после деления на 10 и преобразований, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = 0$. Сумма двух квадратов может равняться нулю только в случае, когда каждый из этих квадратов равен нулю. Поэтому, ничего кроме $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{4}$ не может являться решением нашей системы.

Для окончания решения необходимо проверить, что найденные числа подходят:

$$\begin{cases} 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -7 \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 14 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -11 \end{cases}.$$

Комментарий. Достаточно проверить, что найденные числа подходят хотя бы в одно из уравнений.

Задача 6. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$14\sin(3x) - 3\cos(3x) = 13\sin(2x) - 6\cos(2x).$$

Ответ: $\frac{2\pi - \alpha - \beta}{5} \approx 0{,}7570$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{14}{3}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{13}{6}$.

Комментарий 1. В зависимости от выбора способа решения и обратной тригонометрической функции ответ может иметь разный вид. Приведём ещё несколько способов описать α и β:

$$\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{3}{14} = \arcsin\frac{14}{\sqrt{205}} = \arccos\frac{3}{\sqrt{205}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{\sqrt{205}} = \dots$$
$$\beta = \operatorname{arcctg}\frac{6}{13} = \arcsin\frac{13}{\sqrt{205}} = \arccos\frac{6}{\sqrt{205}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{6}{\sqrt{205}} = \dots$$

Например, ответ можно переписать в виде

$$\frac{1}{5}\left(\pi + \arcsin\frac{3}{\sqrt{205}} + \arcsin\frac{6}{\sqrt{205}}\right).$$

Для удобства проверки в ответе приведено приблизительное значение выражения. От участиников этого, естественно, не требовалось.

Комментарий 2. Ответ можно упростить до одной обратной тригонометрической функции. Действительно, если $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{14}{3}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{13}{6}$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{14/3 + 13/6}{1 - 14/3\cdot 13/6} = -\frac{3}{4},$$

откуда, поскольку $\alpha+\beta \in (0;\pi)$, получаем, что $\alpha+\beta = \pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, а ответ равен $\frac{1}{5}\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$. От участников подобного упрощения не требовалось.

Решение. Поделим левую и правую части уравнения на $\sqrt{205} = \sqrt{14^2+3^2} = \sqrt{13^2+6^2}$. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{14}{3}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{13}{6}$; тогда $\sin\alpha = \frac{14}{\sqrt{205}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{205}}$, $\sin\beta = \frac{13}{\sqrt{205}}$, $\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{205}}$, а уравнение приобретает вид

$$\sin\alpha\sin 6x + \cos\alpha\cos 6x = \sin\beta\sin 2x + \cos\beta\cos 2x,$$

или $\cos(3x+\alpha) = \cos(2x+\beta)$. Решенями этого уравнения является совокупность

$$\left[\begin{array}{l} 3x+\alpha = 2x+\beta+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 3x+\alpha = -\beta-2x+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.,$$

то есть

$$\left[\begin{array}{l} x = \beta-\alpha+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{-\alpha-\beta+2\pi n}{5},\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right..$$

Поскольку $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то наименьшими положительными корнями серий из совокупности являются числа $x_1 = \beta-\alpha+2\pi$ и $x_2 = \frac{2\pi-\alpha-\beta}{5}$. Осталось сравнить x_1 и x_2. Для этого заметим, что

$$x_2 = \frac{2\pi-\alpha-\beta}{5} < \frac{2\pi}{5} < \pi < \beta-\alpha+2\pi = x_1.$$

Задача 7. При каких значениях параметра a уравнение $x^3+16x^2+ax+64=0$ имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?

Ответ: только 64.

Решение. Пусть параметр a подходит. Тогда у многочлена $x^3+16x^2+ax+64=0$ есть три различных корня x_1, x_2, x_3. Воспользуемся теоремой Виета для многочлена третьей степени:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -16 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = a \\ x_1x_2x_3 = -64 \end{cases}.$$

Поскольку x_1, x_2, x_3 образуют геометрическую прогрессию (пусть именно в таком порядке), то найдутся такие b и q, что $x_1 = b$, $x_2 = bq$, $x_3 = bq^2$. Тогда из равенства $x_1x_2x_3 = -64$, имеем $b^3q^3 = -64$, откуда $x_2 = bq = -4$, $x_1 = -4/q$, $x_3 = -4q$.

Тогда $-4\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=-16$ (*), после преобразований $q^2-3q+1=0$. Дискриминант этого выражения равен $D=3^2-4\cdot 1\cdot 1>0$, поэтому такое q, а с ним и x_1, x_2, x_3, найдутся. Тогда

$$a=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=x_1x_2x_3\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-64\cdot\left(-\frac{q}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4q}\right)=16\left(q+1+\frac{1}{q}\right)=4\cdot 16=64.$$

(В предпоследнем переходе мы воспользовались равенством (*)).

Комментарий. Естественно, q, x_1, x_2, x_3 можно вычислить явно:

$$q_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Выберем q с «+» (если выбрать с «$-$», то x_1 и x_3 поменяются местами, что не повлияет на ответ); тогда

$$x_1=\frac{-4\cdot 2}{3+\sqrt{5}}=-2(3-\sqrt{5}),\ x_2=-4,\ x_3=-2(3+\sqrt{5}).$$

Можно было вычислить a, подставив полученные числа в выражение $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$.

Задача 8. Про тетраэдр $ABCD$ известно, что $AB=7$, $DC=8$, $\angle BCD=\angle ADC=75^\circ$, $\angle BDC=\angle ACD=15^\circ$. Вокруг тетраэдра описана сфера. Рассмотрим на этой сфере множество всех точек, сумма сферических расстояний от которых до точек A, B, C, D не больше 8π. Чему равна площадь этого множества? Сферическое расстояние между двумя точками на сфере — длина наименьшей дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки.

Ответ: 32π, т.е. половина площади сферы радиуса 4.

Решение. Так как $\angle BCD+\angle BDC=\angle ACD+\angle ADC=90^\circ$, то треугольники BCD и ACD — прямоугольные с общей гипотенузой CD. Если O — середина отрезка CD, то по свойству медианы прямоугольного треугольника, $OA=OB=OC=OD=4$. Следовательно, радиус описанной сферы равен 4, а точка O — её центр.

Обозначим через $d(X,Y)$ сферическое расстояние между точками X и Y. По условию задачи необходимо найти площадь множества ω на сфере, состоящего в точности из точек M, для которых

$$d(M,A)+d(M,B)+d(M,C)+d(M,D)\leqslant 8\pi. \qquad (1)$$

Поскольку CD — диаметр сферы, то точки C, M и D лежат на одной окружности большого круга; следовательно, $d(C,M)+d(M,D)=d(C,D)=4\pi$. Неравенство (1) перепишется в виде

$$d(M,A)+d(M,B)\leqslant 4\pi. \qquad (2)$$

Пусть B_1 — точка, симметричная точке B относительно центра сферы O. Так как B_1 и B — концы диаметра сферы, то $d(B,M)+d(M,B_1)=d(B,B_1)=4\pi$. Подставляя $d(M,B)=4\pi-d(M,B_1)$ в неравенство (2), получаем

$$d(M,A)\leqslant d(M,B_1).$$

Так как $AB=7\neq 8$, то AB не является диаметром, а потому $B_1\neq A$. Итак, ω есть множество точек на сфере, сферическое расстояние от которых до одной точки на сфере не превосходит сферического расстояни до другой точки на сфере. В силу симметрии (относительно плоскости, проходящей через центр сферы перпендикулярно отрезку B_1A), ω — половина сферы и её площадь равна $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\pi\cdot 4^2=32\pi$.

Задача 9. Про функции $f(x)$ и $g(x)$ известно, что $f(0)=g(0)>0$ и $f'(x)\sqrt{g'(x)}=3$ для любого $x\in[0;1]$. Докажите, что если $x\in[0;1]$, то $2f(x)+3g(x)>9x$.

Решение. Заметим, что $2f(0)+3g(0)>0$, поэтому для доказательства неравенства достаточно проверить, что функция $2f(x)+3g(x)-9x$ возрастает на промежутке $[0;1]$. Для этого докажем, что её производная на этом промежутке неотрицательна. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ, подстановка.

$$2f'(x)+3g'(x)-9=2f'(x)+\frac{27}{\left(f'(x)\right)^2}-9=\frac{\left(2f'(x)+3\right)\left(f'(x)-3\right)^2}{\left(f'(x)\right)^2}\geqslant 0,$$

поскольку $f'(x)$, как следует из условия, неотрицательно.

Второй способ, неравенство о средних.

$$2f'(x)+3g'(x)=f'(x)+f'(x)+3g'(x)\geqslant 3\sqrt[3]{f'(x)\cdot f'(x)\cdot 3g'(x)}=9,$$

где неравенство следует из неравенства о средних для трёх чисел, а последнее равенство – из условия.

Задача 10. В стране 10 городов, между некоторыми из которых проложена дорога (каждая дорога соединяет ровно два города, между двумя городами есть не более одной дороги, сменить одну дорогу на другую можно только в каком-то городе). Может ли так быть, что из одного города выходит 9 дорог, из одного — 8, из двух — по 7, из двух — по 6, из двух — по 4, из одного — 2, из одного — 1?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Введём граф, вершинами которого будут города, а ребро между вершинами проведём в том и только том случае, если соответствующие города соединены дорогой.

Будем описывать граф в виде последовательности целых чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где a_i означает степень вершины i. Будем называть последовательность целых чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *реализуемой*, если существует граф, описание которого совпадает с $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. В условии спрашивается, реализуема ли последовательность $(9,8,7,7,6,6,4,4,2,1)$.

Заметим следующие два простых факта:
1. Пусть $a_i=0$; тогда если реализуема последовательность $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, то реализуема и последовательность $(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n)$. Для реализации достаточно откинуть вершину с номером i.
2. Пусть $a_i=n-1$; тогда если реализуема последовательность $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, то реализуема и последовательность $(a_1-1,a_2-1,\ldots,a_{i-1}-1,a_{i+1}-1,\ldots,a_n-1)$. Действительно, если $a_i=n-1$, то вершина с номером i должна быть соединена со всеми остальными вершинами, поэтому достаточно откинуть её и все выходящие из неё рёбра.

Предположим противное и пусть последовательность $(9,8,7,7,6,6,4,4,2,1)$ реализуема. Пользуясь фактами 1 и 2 последовательно получаем, что тогда реализуемы и последовательности

$$(7,6,6,5,5,3,3,1,0),\ (7,6,6,5,5,3,3,1),\ (5,5,4,4,2,2,0),\ (5,5,4,4,2,2),\ (4,3,3,1,1),\ (2,2,0,0),\ (2,2)$$

но последовательность $(2,2)$, очевидно, не реализуема. Противоречие; значит, наше предположение неверно и последовательность $(9,8,7,7,6,6,4,4,2,1)$ не реализуема.

Другое решение. Аналогично первому решению введём граф.

Заметим, что если $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ — степени вершин некоторого графа без петель и кратных рёбер, то для каждого k выполнено неравенство

$$d_1+d_2+\ldots+d_k\leqslant k(k-1)+d_{k+1}+\ldots+d_n.$$

Действительно, все рёбра, выходящие из вершин с номерами от 1 до k делятся на два типа:
1. идущие в вершины с номерами от $k+1$ до n — таких не больше $d_{k+1}+\ldots+d_n$;
2. идущие в вершины с номерами от 1 до k — таких не больше $\frac{k(k-1)}{2}$, но каждое мы можем посчитать по два раза.

В задаче нас спрашивают, существует ли граф со степенями вершин $(9,8,7,7,6,6,4,4,2,1)$. Предположим, что он существует, и воспользуемся доказанным утверждением для первых 6 вершин:

$$43=9+8+7+7+6+6\leqslant 6\cdot 5+4+4+2+1=41,$$

противоречие.