



**Заключительный этап Олимпиады «Ломоносов»  
по ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВУ (пробный профиль)  
Номинация 10-11 классы**

Включает 7 заданий, в т.ч.:

- 4 задания по математике (№№ 1–4),
- 3 задания по экономике (№№ 5-7).

Задание	Количество баллов
№1 – математика	5
№2 – математика	5
№3 – математика	10
№4 – математика	20
№5 – экономика	20
№6 – экономика	20
№7 – экономика	20
<b>Итого</b>	<b>100</b>

**Задача 1.** Разность

$$\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} - \sqrt{|12\sqrt{5} + 29|}$$

является целым числом. Найти это число.

**Решение.**

Сравним числа:

$$12\sqrt{5} \text{ и } 29 \Rightarrow \sqrt{720} \text{ и } \sqrt{841} \Rightarrow 12\sqrt{5} < 29.$$

С учетом этого перепишем:

$$\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} - \sqrt{|12\sqrt{5} + 29|} = \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29}.$$

Т.к. по условию это целое число, тогда обозначим его через  $x$

$$\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29} = x \Rightarrow$$

$$\left( \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29} \right)^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$29 - 12\sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} \cdot \sqrt{12\sqrt{5} + 29} + 12\sqrt{5} + 29 = x^2 \Rightarrow$$

$$58 - 2\sqrt{841 - 720} = x^2 \Rightarrow$$

$$58 - 22 = x^2.$$

Т.к. изначально первое слагаемое меньше второго, то число отрицательное.

**Ответ:**  $-6$ .

**Задача 2.** Решить неравенство:

$$f(g(x)) < g(f(x)), \text{ где } f(x) = 2^x, g(x) = 4^x.$$

**Решение.** Имеем

$$f(g(x)) < g(f(x)), \text{ где } f(x) = 2^x, g(x) = 4^x \Rightarrow$$

$$f(4^x) < g(2^x) \Rightarrow$$

$$2^{4^x} < 4^{2^x} \Rightarrow$$

$$2^{2^{2x}} < 2^{2 \cdot 2^x}.$$

Прологарифмируем неравенство по основанию 2 :

$$2^{2^x} < 2 \cdot 2^x \Rightarrow$$

$$\text{обозначим } t = 2^x \Rightarrow$$

$$t^2 - 2t < 0 \Rightarrow$$

$$t \in (0, 2) \Rightarrow$$

$$x < 1.$$

**Ответ:**  $x < 1$ .

**Задача 3.** Даны функции  $y_1(x) = -2x^2 + 7x + 3$  и  $y_2(x) = \sqrt{3}x + b$ . При каком значении параметра  $b$  максимальное значение выражения  $|y_1(x) - y_2(x)|$  при  $x \in [-1, \sqrt{3}]$  будет минимальным?

**Решение.**

Рассмотрим разность функции:

$$f(x) = y_1(x) - y_2(x) = -2x^2 + 7x + 3 - \sqrt{3}x - b,$$

здесь параметр  $b$  отвечает за сдвиг функции по оси ординат. Следовательно надо подобрать  $b$  таким образом, чтобы  $|f_{\max}(x)| = |f_{\min}(x)|$  на  $[-1, \sqrt{3}]$ . Для этого рассмотрим параболу

$$g(x) = -2x^2 + 7x + 3 - \sqrt{3}x \text{ при } x \in [-1, \sqrt{3}],$$

очевидно, что минимум будет в точке  $x = -1$ , а максимум в вершине  $\frac{7-\sqrt{3}}{4}$ .

Далее находим  $b$  из уравнения

$$|g(-1) - b| = \left| g\left(\frac{7-\sqrt{3}}{4}\right) - b \right| \Rightarrow$$

$$|\sqrt{3} - 6 - b| = \left| \frac{19}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{4} - b \right| \Rightarrow$$

$$b = 1.75 - \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

**Ответ:**  $b = 1.75 - \frac{3\sqrt{3}}{8}$ .

**Задача 4.** Василий хочет открыть вклад в размере 4759013 рублей 12 копеек сроком на 1 год и выбирает один из двух банков. В первом банке проценты по вкладу начисляются один раз в два месяца в размере 15% годовых (то есть 2.5% за два месяца). Во втором банке проценты начисляются по 1% в месяц в течение 6 первых месяцев и по 1.5% в месяц за каждый из оставшихся месяцев. Определить в каком из банков более выгодные условия.

**Решение.**

Пусть  $x = 4759013.12$ , тогда для первого банка имеем

$$x(1 + 0.025)^6,$$

а для второго банка

$$x(1 + 0.01)^6(1 + 0.015)^6.$$

Сравним

$$x(1 + 0.025)^6 \text{ и } x(1 + 0.01)^6(1 + 0.015)^6 \Rightarrow$$

$$(1 + 0.025)^6 \text{ и } (1 + 0.01)^6(1 + 0.015)^6 \Rightarrow$$

$$(1 + 0.025) \text{ и } (1 + 0.01)(1 + 0.015) \Rightarrow$$

$$1 + 0.025 \text{ и } 1 + 0.01 + 0.015 + 0.01 \cdot 0.015 \Rightarrow$$

$$0 \text{ и } 0.01 \cdot 0.015$$

Вывод - во втором банке выгоднее.

**Ответ:** второй банк.

**Задача 5.** Спрос населения города Ф. на городские автобусные перевозки описывается уравнением  $Q_D=150-2P$ , а предложение автоперевозчиков в городе – уравнением  $Q_S=30+2P$  (количество  $Q_D$ ,  $Q_S$  измеряется в тысячах поездок, совершаемых в день, а цена  $P$  – в рублях). На этом рынке давно уже существует высокий уровень конкуренции, и плата за проезд определяется спросом и предложением. С начала апреля этого года администрация города решила сделать поездки на автобусах более доступными и распорядилась выплачивать автобусным перевозчикам субсидию в размере 8 рублей на каждую поездку, при условии, что цена поездки станет для пассажира дешевле на эту же сумму. Ответьте на вопросы и объясните свой ответ:

- А) Сколько стоил проезд в городском транспорте до решения администрации о субсидии? Сколько поездок ежедневно совершалось в городских автобусах?
- Б) Какой будет новая равновесная цена проезда, и сколько поездок будет совершаться в автобусах после введения субсидии? Чем можно объяснить такое изменение платы за проезд и числа поездок?
- В) Какую сумму должна будет израсходовать администрация города на выплату субсидий автобусным перевозчикам по итогам апреля?

**Решения и ответы.**

А) Находим рыночное равновесие:  $150-2P=30+2P$ ,  $P=30$  руб. за поездку,  $Q=90$  тыс. поездок в день.

Б) После введения субсидии появится разница в цене для покупателя и продавца:  $P_S=P_D+8$  (перевозчик за поездку получает сумму  $P_D$  от пассажира и субсидию 8 руб.).

Если цена за проезд составит  $30-8=22$  руб., то на рынке перевозок появится дефицит (население будет готово совершить 106 тыс. поездок). Поэтому в итоге цена окажется выше 22 руб. за поездку. Находим новое равновесие:

$150-2P_D=30+2(P_D+8)$ ,  $P_D=26$  руб.,  $Q=98$  тыс. поездок (количество поездок увеличилось в связи со снижением платы за проезд).

В) Администрация города платит 8 руб. за каждую поездку, в течение апреля (30 дней) нужно будет выплатить  $98$  тыс. поездок  $\cdot$   $8$  руб.  $\cdot$   $30$  дней = 23,5 млн. руб.

**Задача 6.** Строительная компания «Строймаркет» выполняет отделочные работы в жилых и офисных помещениях. Одновременно компания может работать не более чем на 6 объектах (на большее количество объектов не хватает ни рабочих, ни оборудования). Чем больше объектов ведет компания,

тем выше ее суммарные издержки (см. таблицу). Сейчас средняя рыночная цена на отделочные работы, выполняемые компанией, составляет 70 тыс. руб. за 1 объект. Компания ведет работы на 5 объектах.

	Количество объектов, где ведутся работы						
	0	1	2	3	4	5	6
Общие издержки, тыс. руб.	60	90	125	165	220	280	360

Ответьте на вопросы и объясните свой ответ.

А) Можно ли считать, что решение компании об объеме работ является оптимальным? Почему? Сколько составляет прибыль компании?

Б) Если в компанию обратится новый заказчик и предложит провести такие же работы на еще одном объекте за 75 тыс. рублей, следует ли принять его предложение? Почему?

### Ответы и решения

Проведем необходимые расчеты:

	Количество объектов, где ведутся работы						
	0	1	2	3	4	5	6
Общие издержки, тыс. руб.	60	90	125	165	220	280	360
Предельные издержки, тыс. руб.	–	30	35	40	55	60	80
Выручка при цене 70 тыс. руб.	0	70	140	210	280	350	420
Прибыль, тыс. руб.	-60	-20	15	45	60	70	60

А) Работа на 5 объектах – оптимальное решение для компании, поскольку она в этом случае получает наибольшую прибыль (70 тыс. руб.) (вариант: предельные издержки работы на 5-м объекте составляют 60 тыс. руб., а на 6-м – уже 80 тыс. руб., значит при 5 объектах компания ближе всего к «золотому правилу» выпуска  $P=MC$ )

Б) Если новый заказчик предложит заплатить 75 тыс. руб. за объект, для компании этот объект окажется 6-м. Предельные издержки работы компании на 6-м объекте составляют 80 тыс. руб. ( $360-280=80$  тыс. руб.), это выше предложенной цены. Если компания примет это предложение, то ее суммарная прибыль уменьшится. С точки зрения получения прибыли принимать этот заказ нерационально (вариант: издержки компании при 6 объектах составляют 360 тыс. руб., а выручка составит  $70 \cdot 5 + 75 = 425$  тыс. руб., прибыль составит  $425 - 360 = 65$  тыс. руб., то есть на 5 тыс. руб. меньше, чем при работе на 5 объектах).

**Задача 7.** Известно, что население страны К. в течение года совершило покупки товаров (как произведенных внутри страны, так и импортных) и услуг для собственного потребления на сумму 500 млн. денежных единиц (д.е.). При этом компании, работающие в стране, израсходовали 200 млн. д.е. на новое оборудование и 160 млн. д.е. на закупку сырья и полуфабрикатов для переработки. Государственные органы закупили товаров и услуг на сумму 150 млн. д.е. Таможенная служба страны К. по итогам года подсчитала, что экспорт составил 80 млн. д.е., а импорт был на сумму 60 млн. д.е. Ответьте на вопросы и объясните свой ответ:

А) Сколько составляет ВВП в этой стране? Поясните, каким методом расчета ВВП вы воспользовались.

Б) В прошлом году номинальный ВВП страны К. составлял 850 млн. д.е. Можно ли утверждать, что в этом году в стране наблюдался экономический рост, или для этого недостаточно данных?

### **Решения и ответы**

**№ 3.** А) Рассчитаем ВВП страны по расходам (суммируем расходы на приобретение конечной продукции, произведенной внутри страны): расходы населения + инвестиции компаний + государственные закупки + экспорт – импорт.  $500 + 200 + 150 + 80 - 60 = 870$  млн. д.е. (сумму 160 млн. д.е. не включаем в расчет, т.к. это покупка промежуточной продукции).

Б)  $850 < 870$  млн. д.е., однако эти суммы – номинальные величины (ВВП мог вырасти из-за роста цен, а не из-за роста производства товаров и услуг). Чтобы определить, был ли в стране экономический рост, нужно знать индекс цен (дефлятор ВВП).

Олимпиада "Предпринимательство" (Пробный профиль)  
10-11 класс. Вариант 2

**Задача 1.** Какое из чисел больше:

$$\sqrt[3]{18} \text{ или } \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{6}} 5} ?$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{6}} 5} = \\ & = \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{2}{2} \log_6 5} = \\ & = \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \log_6 5} = \\ & = 6^{-\log_6 \frac{5}{2}} = \\ & = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Сравним

$$\sqrt[3]{18} \text{ или } 2.5 \Rightarrow 18 \text{ или } 15.625.$$

**Ответ:** первое.

**Задача 2.** Решить неравенство:

$$f(f(x)) < (f(x))^2, \text{ где } f(x) = 2x^2 - 1.$$

**Решение.** Имеем

$$f(f(x)) < (f(x))^2, \text{ где } f(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow .$$

$$f(2x^2 - 1) < (2x^2 - 1)^2 \Rightarrow$$

$$2(2x^2 - 1)^2 - 1 < 4x^4 - 4x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$8x^4 - 8x^2 + 2 - 1 < 4x^4 - 4x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$x^4 - x^2 < 0 \Rightarrow$$

$$x^2(x - 1)(x + 1) < 0 \Rightarrow$$

$$x \in (-1, 0) \cup (0, 1).$$

**Ответ:**  $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ .



**Задача 3.** В прямоугольной декартовой системе координат заданы точки  $A_1(2, 1)$ ,  $A_2(3, 2)$  и  $A_3(-2, -2)$ . Составить уравнение прямой  $y(x) = ax + b$ , чтобы величина  $|y(x_1) - y_1| + |y(x_2) - y_2| + |y(x_3) - y_3|$  была минимальна, где  $(x_i, y_i)$  — координаты точки  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Решение.**

Рассмотрим:

$$|2a + b - 1| + |3a + b - 2| + |-2a + b + 2|.$$

Каждый из модулей раскрывается двумя способами и получаем семь областей (см. рисунок 1).

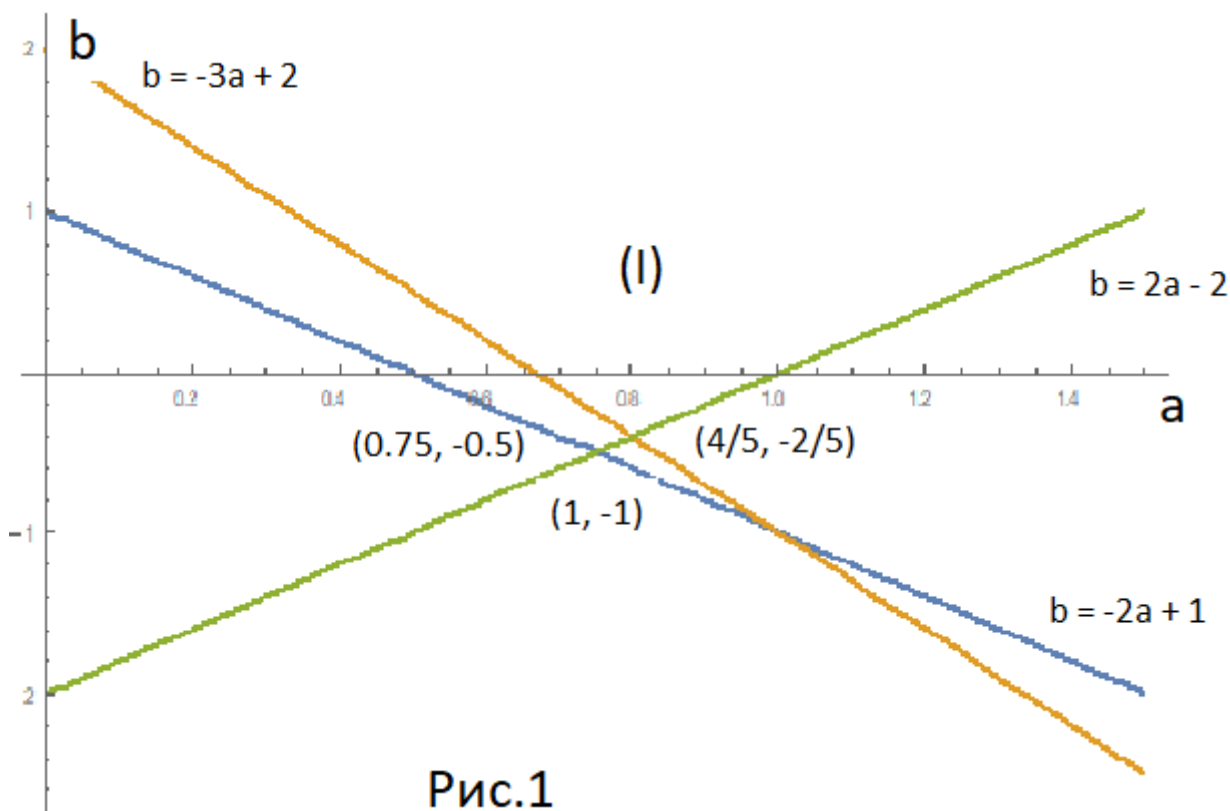


Рис.1

Рассмотрим область (I), все модули раскрываются с плюсом, поэтому

$$\begin{aligned} |2a + b - 1| + |3a + b - 2| + |-2a + b + 2| &= \\ &= 2a + b - 1 + 3a + b - 2 - 2a + b + 2 = \\ &= 3a + 3b - 1. \end{aligned}$$

Получаем, что значение  $3a + 3b - 1$  нужно минимизировать в области (I), а это означает, что необходимо двигать прямую  $3a + 3b - 1 = C$  так,

чтобы  $C$  была наименьшей, следовательно, оптимальное значение в точке  $(4/5, -2/5)$ .

Для первой области прямая  $y = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}$ .

Аналогично рассматриваются остальные области.

**Ответ:**  $y = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}$ .

**Задача 4.** Из города Торгаш на предприятие ходят три автобуса А, Б и В, которые везут работников. Из-за отсутствия свободных мест в автобусах каждый работник приписан к определенному автобусу, на котором он должен вернуться. Водители заметили, что несмотря на то, что обратно автобусы возвращаются полными, имеются пассажиры, которые на обратном пути садятся не в свой автобус. На предприятии каждому работнику выдали по билету, который однозначно определяет автобус. На обратном пути водители собрали билеты, после чего выяснилось, что пассажиры автобуса А, ехавшие в автобусе В, отказались сдавать билеты водителю автобуса В, и что половина пассажиров автобуса Б и треть пассажиров автобуса В возвращалась в автобусе А, четверть пассажиров автобуса А и треть пассажиров автобуса В ехала в автобусе Б, а также что половина пассажиров автобуса Б ехала в автобусе В. Заметили, что в автобусе А на своих местах возвращалось столько пассажиров, сколько в автобусе Б на своих местах. Найти долю пассажиров, отказавшихся сдавать билеты.

**Решение.**

Пусть

$x$  — количество мест автобуса А;

$y$  — количество мест автобуса Б;

$z$  — количество мест автобуса В.

Тогда условие перепишем в виде системы:

$$\begin{cases} x = 0.5y + 1/3z + \alpha x; \\ y = 0.25x + 1/3z + \beta y; \\ z = \nu x + 0.5y + \gamma z; \end{cases}$$

плюс последнее условие  $\alpha x = \beta y$ . Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — доли тех работников, которые возвращаются на своих местах. Необходимо найти  $\nu$ .

Из условия получаем, что  $0.5y + 0.5y + \beta y = y$ ,  $\alpha x + 0.25x + \nu x = x$  и  $1/3z + 1/3z + \gamma y = y$ , следовательно

$$\beta = 0, \quad \gamma = 1/3.$$

Из дополнительного условия получаем, что  $\alpha = 0$  — это означает, что  $\nu = 0.75$ .

**Ответ:** 0.75.

**Задание 5.** Летом в городе М. спрос на сливочное мороженое описывается уравнением  $QD=140-P$ , а предложение мороженого – уравнением  $QS=40+P$  (количество  $QD$ ,  $QS$  измеряется в тысячах стаканчиков мороженого, продаваемых за день, а цена  $P$  – в рублях). На этом рынке наблюдается высокий уровень конкуренции, и цена мороженого определяется спросом и предложением. Но с начала июля этого года городские власти решили установить новый налог – налог на мороженое, который составит 5 рублей за каждый проданный стаканчик. Налог должны уплачивать продавцы мороженого, однако им разрешили включить этот налог в цену мороженого. Ответьте на вопросы и объясните свой ответ:

- А) По какой цене продавалось мороженое до введения налога? Сколько стаканчиков покупали каждый день?
- Б) Сколько стаканчиков мороженого будут покупать после введения налога? Сколько будет стоить стаканчик мороженого? Чем можно объяснить такое изменение цены и объема продаж мороженого?
- В) Какая сумма поступит в бюджет города от «налога на мороженое» по итогам июля?

#### **Решения и ответы**

- А) Находим рыночное равновесие:  $140-P=40+P$ ,  $P=50$  руб.,  $Q=90$  тыс. стаканчиков в день.
- Б) После введения «налога на мороженое» появится разница в цене для покупателя и продавца:  $PS=PD-5$  (продавец получает сумму  $PD$  от покупателя, но уплачивает из нее 5 руб. налога). Если цена мороженого увеличится на 5 руб. ( $50+5=55$  руб.), то потребители будут готовы купить 85 тыс. стаканчиков в день. Получится избыток продукции. Рынок конкурентный, следовательно, равновесная цена будет снижаться (итоговое повышение цены будет меньше, чем на 5 руб.). Находим новое равновесие:  $140-PD=40+(PD-5)$ ,  $PD=52,5$  руб.,  $Q=87,5$  тыс. стаканчиков в день (покупают меньше в связи с ростом цены).
- В) Администрация города получает 5 руб. за каждый проданный стаканчик мороженого, значит, в течение июля (31 день) будет получено  $87,5$  тыс. стаканчиков  $\cdot$  5 руб.  $\cdot$  31 день = 13,6 млн. руб.

**Задача 6.** Строительная компания «Строй-сервис» выполняет отделочные работы в жилых помещениях. Одновременно компания может работать не более чем на 6 объектах (на большее количество объектов не хватает ни рабочих, ни оборудования). Чем больше объектов ведет компания, тем выше ее суммарные издержки (см. таблицу). Сейчас средняя рыночная цена на отделочные работы, выполняемые компанией, составляет 50 тыс. руб. за 1 объект. Компания ведет работы на 4 объектах.

	Количество объектов, где ведутся работы						
	0	1	2	3	4	5	6
Общие издержки, тыс. руб.	50	90	120	145	180	235	325

Ответьте на вопросы и объясните свой ответ.

А) Можно ли считать, что решение компании об объеме работ является оптимальным? Почему? Сколько составляет прибыль компании?

Б) Если в компанию обратится новый заказчик и предложит провести такие же работы на еще одном объекте за 52 тыс. рублей, следует ли принять его предложение? Почему?

### Решения и ответы

Проведем необходимые расчеты:

	Количество объектов, где ведутся работы						
	0	1	2	3	4	5	6
Общие издержки, тыс. руб.	50	90	120	145	180	235	325
Предельные издержки, тыс. руб.	–	40	30	25	35	55	90
Выручка при цене 50 тыс. руб.	0	50	100	150	200	250	300
Прибыль, тыс. руб.	-50	-40	-20	5	20	15	-25

А) Работа на 4 объектах – оптимальное решение для компании, поскольку она в этом случае получает наибольшую прибыль (20 тыс. руб.) (вариант: предельные издержки работы на 4-м объекте составляют 35 тыс. руб., а на 5-м – уже 55 тыс. руб., значит, при 4 объектах компания ближе всего к «золотому правилу» выпуска  $P=MC$ ).

Б) Если новый заказчик предложит заплатить 52 тыс. руб. за объект, для компании этот объект окажется 5-м. Предельные издержки работы компании на 5-м объекте составляют 55 тыс. руб. ( $235-180=55$  тыс. руб.), это выше предложенной цены. Если компания примет это предложение, то ее суммарная прибыль уменьшится. С точки зрения получения прибыли принимать этот заказ нерационально (вариант: издержки компании при 5 объектах составляют 235 тыс. руб., а выручка составит  $50 \cdot 4 + 52 = 252$  тыс. руб., прибыль составит  $252 - 235 = 17$  тыс. руб., то есть на 3 тыс. руб. меньше, чем при работе на 5 объектах).

**Задача 7.** По итогам 2019 года население страны S совершило покупки товаров и услуг для собственного потребления на сумму 380 млн. денежных единиц (д.е.) (эта сумма включает как товары и услуги, произведенные внутри страны, так и импортные). Компании, работающие в данной стране, израсходовали 210 млн. д.е. на новое оборудование и 230 млн. д.е. на закупку сырья и полуфабрикатов для переработки. Государственные органы закупили товаров и услуг на сумму 180 млн. д.е. Экспорт оценивается таможенной службой на сумму 80 млн. д.е., а импорт – на сумму 90 млн. д.е. Ответьте на вопросы и объясните свой ответ:

А) Сколько составляет ВВП в стране S? Поясните, каким методом расчета ВВП вы воспользовались.

Б) В 2018 году номинальный ВВП страны S составлял 700 млн. д.е. Можно ли утверждать, что в этом году в стране наблюдался экономический рост, или для этого недостаточно данных?

### **Решения и ответы**

А) Рассчитаем ВВП страны по расходам (суммируем расходы на приобретение конечной продукции, произведенной внутри страны): расходы населения + инвестиции компаний + государственные закупки + экспорт – импорт.  $380 + 210 + 180 + 80 - 90 = 760$  млн. д.е. (сумму 230 млн. д.е. не включаем в расчет, т.к. это покупка промежуточной продукции).

Б)  $700 < 760$  млн. д.е., однако эти суммы – номинальные величины (ВВП мог вырасти из-за роста цен, а не из-за роста производства товаров и услуг). Чтобы определить, был ли в стране экономический рост, нужно знать индекс цен (дефлятор ВВП).