



Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (20 баллов) Передние колёса автомобиля изнашиваются быстрее, чем задние: передние при прохождении 40000 км, а задние при прохождении 60000 км. Какой максимальный путь (в км) может пройти автомобиль с данными четырьмя колёсами?

Ответ: 48000

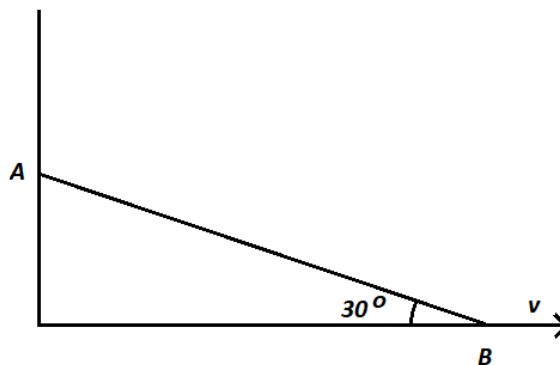
Решение. Пусть $a=40000$, $b=60000$, а искомый путь S . Ясно, что каждое колесо в качестве переднего и в качестве заднего должно проехать расстояние $S/2$ (все колёса должны изнашиваться одновременно, иначе действия водителя были неоптимальными). Поскольку суммарный износ для колеса составляет 1, получаем уравнение $\frac{S}{2a} + \frac{S}{2b} = 1$, откуда $S = \frac{2ab}{a+b}$ – среднее гармоническое величин a и b .

2. (20 баллов) Точка M лежит внутри равнобедренного треугольника с углом при вершине 120° . Расстояние от M до каждой из боковых сторон равно 3, а до основания $2\sqrt{3}$. Найдите длину основания.

Ответ: 24

Решение. Пусть длина основания a . Поскольку угол при основании 30° , высота треугольника равна $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, а его площадь $S = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}$. Длина боковой стороны $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Если соединить точку M с вершинами треугольника и сложить площади трёх полученных треугольников, получим другое выражение для площади $S = 2\sqrt{3}a$. Из уравнения $\frac{a^2}{4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}a$ находим $a=24$.

3. (20 баллов) Стержень AB движется опираясь на стенку в точке A , и на пол в точке B . В тот момент времени, когда угол между стержнем и полом составлял 30° , скорость точки B стержня была равна $v = 2$ м/с. Определите скорость точки A в этот момент времени.



Ответ: $\approx 3,46$ м/с

Решение. Скорость точки B можно разложить на две составляющие. Одна из них направлена вдоль стержня $v_{B\parallel} = v \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v$. Скорости, направленные вдоль стержней у точек A и B должны быть одинаковыми, то есть $v_{A\parallel} = v_{B\parallel} = v \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v$. С учётом того, что итоговая скорость точки A направлена вертикально вниз, а $v_{A\parallel}$ является её проекцией, получаем

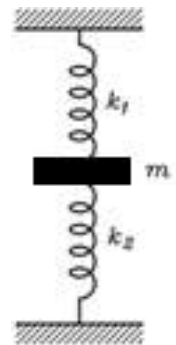
$$v_A = \frac{v_{A\parallel}}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3}v \approx 3,46 \text{ м/с}$$

4. (20 баллов) Имеются три тела одинаковой массы, из одного материала, но с разными температурами. Температура первого $t_1 = 10^\circ\text{C}$. Если его привести в тепловой контакт со вторым, то установится температура $t_{12} = 40^\circ\text{C}$. Если первое тело привести бы в тепловой контакт с третьим телом, то в этом случае установившаяся температура была бы равна $t_{13} = 60^\circ\text{C}$. Какая температура установится, если второе тело привести в тепловой контакт с третьим? Тела не меняют своего агрегатного состояния. Тепловых потерь нет.

Ответ: 90°C

Решение. Из уравнения теплового баланса имеем $c_1 m_1 (t_{12} - t_1) = c_2 m_2 (t_2 - t_{12})$, получаем, что $2t_{12} = t_1 + t_2$, $2t_{13} = t_1 + t_3$, $t_{23} = \frac{t_2 + t_3}{2} = t_{12} + t_{13} - t_1 = 90^\circ\text{C}$.

5. (20 баллов) Найдите период колебаний маятника, изображённого на рисунке. Коэффициенты упругости пружин $k_1 = 400$ Н/м и $k_2 = 1200$ Н/м, масса груза $m = 4$ кг. Массами пружин пренебречь.



Ответ: $0,314 \text{ с}$

Решение. При отклонении маятника от положения равновесия силы упругости со стороны пружин будут «помогать» друг другу, следовательно, период колебаний маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi \cdot \frac{2}{40} = 0,314 \text{ с}.$$



Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (20 баллов) Передние колёса автомобиля изнашиваются быстрее, чем задние: передние при прохождении 45000 км, а задние при прохождении 55000 км. Какой максимальный путь (в км) может пройти автомобиль с данными четырьмя колёсами?

Ответ: 49500

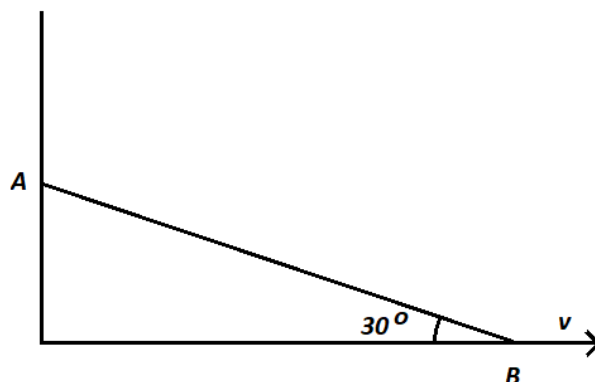
Решение. Пусть $a=45000$, $b=55000$, а искомый путь S . Ясно, что каждое колесо в качестве переднего и в качестве заднего должно проехать расстояние $S/2$ (все колёса должны изнашиваться одновременно, иначе действия водителя были неоптимальными). Поскольку суммарный износ для колеса составляет 1, получаем уравнение $\frac{S}{2a} + \frac{S}{2b} = 1$, откуда $S = \frac{2ab}{a+b}$ – среднее гармоническое величин a и b .

2. (20 баллов) Точка M лежит внутри равнобедренного треугольника с углом при вершине 120° . Расстояние от M до каждой из боковых сторон равно 6, а до основания $2\sqrt{3}$. Найдите длину основания.

Ответ: 36

Решение. Пусть длина основания a . Поскольку угол при основании 30° , высота треугольника равна $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, а его площадь $S = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}$. Длина боковой стороны $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Если соединить точку M с вершинами треугольника и сложить площади трёх полученных треугольников, получим другое выражение для площади $S = 3\sqrt{3}a$. Из уравнения $\frac{a^2}{4\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}a$ находим $a=36$.

3. (20 баллов) Стержень AB движется опираясь на стенку в точке A , и на пол в точке B . В тот момент времени когда угол между стержнем и полом составлял 30° , скорость точки B стержня была равна $v=5$ м/с. Определите скорость точки A в этот момент времени.



Ответ: $\approx 8,66$ м/с

Решение. Скорость точки B можно разложить на две составляющие. Одна из них направлена вдоль стержня $v_{B\parallel} = v \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v$. Скорости, направленные вдоль стержней у точек A и B должны быть одинаковыми, то есть $v_{A\parallel} = v_{B\parallel} = v \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v$. С учётом того, что итоговая скорость точки A направлена вертикально вниз, а $v_{A\parallel}$ является её проекцией, получаем

$$v_A = \frac{v_{A\parallel}}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3}v \approx 8,66 \text{ м/с}.$$

4. (20 баллов) Имеются три тела одинаковой массы, из одного материала, но с разными температурами. Температура первого $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Если его привести в тепловой контакт со вторым, то установится температура $t_{12} = 30^\circ\text{C}$. Если первое тело привели бы в тепловой контакт с третьим телом, то в этом случае установившаяся температура была бы равна $t_{13} = 50^\circ\text{C}$. Какая температура установится, если второе тело привести в тепловой контакт с третьим? Тела не меняют своего агрегатного состояния. Тепловых потерь нет.

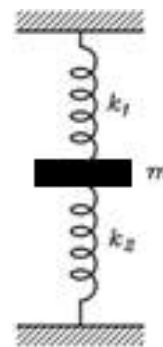
Ответ: 60°C

Решение. Из уравнения теплового баланса имеем $c_1 m_1 (t_{12} - t_1) = c_2 m_2 (t_2 - t_{12})$,

получаем, что $2t_{12} = t_1 + t_2$, $2t_{13} = t_1 + t_3$, $t_{23} = \frac{t_2 + t_3}{2} = t_{12} + t_{13} - t_1 = 60^\circ\text{C}$.

5. (20 баллов) Найдите период колебаний маятника, изображённого на рисунке. Коэффициенты упругости пружин $k_1 = 400 \text{ Н/м}$ и $k_2 = 500 \text{ Н/м}$, масса груза $m = 9 \text{ кг}$. Массами пружин пренебречь.

Ответ: $0,628 \text{ с}$



Решение. При отклонении маятника от положения равновесия силы упругости со стороны пружин будут «помогать» друг другу, следовательно, период колебаний маятника $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi \cdot \frac{3}{30} = 0,628 \text{ с}$.