Всесибирская открытая олимпиада школьников по астрономии 2021/22 учебного года

Заключительный этап

Авторские решения

11 класс

1. Гравитационный маневр. Космический корабль изначально находится на орбите Земли вокруг Солнца, но потом совершает гравитационный маневр: сначала он получает дополнительный импульс так, что его новая скорость составляет $\varepsilon = 0{,}5$ от старой, не меняя направление, а затем, достигнув перицентра новой орбиты, получает дополнительный импульс, равный по величине первому, и увеличивающий скорость аппарата, не меняя ее направления. Сумеет ли корабль покинуть Солнечную систему? Если да, то какова будет его скорость на бесконечности, если нет, то какова будет большая полуось конечной орбиты? Найдите приближенно (с точностью до второго знака после запятой) предельное значение ε, определяющее, покинет ли аппарат Солнечную систему. *(Д. С. Катков)*

Решение.

Космический корабль, находящийся на орбите Земли, обладает скоростью, совпадающей с орбитальной скоростью нашей планеты: $V_0 = (GM/R_0)^{1/2}$.

Первым включением двигателей мы придали ему удельный импульс $\Delta V = (1 - \varepsilon)V_0$. После этого его орбита стала эллиптической, а первоначальная точка — точкой афелия новой орбиты: $R_{a1} = R_0$. Афелийная скорость корабля равна $V_{a1} = \varepsilon\ V_0 = \varepsilon\ (GM/R_0)^{1/2}$.

Эксцентриситет новой орбиты может быть определён из уравнения афелийной скорости: $V_{a1}^2 = GM / R_{a1}\ (1 - e_1) = V_0^2\ (1 - e_1)$. Отсюда получаем $e_1 = 1 - \varepsilon^2$, а большая полуось орбиты равна $a_1 = R_0 / (1 + e_1) = R_0 / (2 - \varepsilon^2)$.

Новый перигелий находится на расстоянии от Солнца $R_{п1} = a_1\ (1 - e_1) = R_0\ \varepsilon^2 / (2 - \varepsilon^2)$.

В точке нового перигелия корабль обладает скоростью $V_п = V_a\ (1+e_1) / (1-e_1) = \varepsilon V_0\ (2 - \varepsilon^2) / \varepsilon^2 = V_0\ (2 - \varepsilon^2) / \varepsilon = V_0\ (2/\varepsilon - \varepsilon)$.

Добавляя ему такой же удельный импульс, мы увеличиваем его скорость на $\Delta V = (1 - \varepsilon)V_0$. Точка перигелия промежуточной орбиты стала точкой перигелия конечной орбиты ($R_{п2} = R_{п1}$), и новая перигелийная скорость теперь равна $V_{п2} = V_п + (1 - \varepsilon)V_0 = V_0\ (2/\varepsilon - 2\varepsilon + 1)$.

Теперь, чтобы определиться с дальнейшей судьбой нашего корабля, надо сравнить его перигелийную скорость $V_{п2}$ со второй космической скоростью в точке перигелия $R_{п2}$. Она равна $V_{II} = (2GM / R_{п2})^{1/2} = \sqrt{2}\ V_0\ (R_0 / R_{п2})^{1/2} = \sqrt{2}\ V_0\ (2 - \varepsilon^2)^{1/2} / \varepsilon$.

То есть корабль улетит «в бесконечность» при условии $(2/\varepsilon - 2\varepsilon + 1) > \sqrt{2}\ (2 - \varepsilon^2)^{1/2} / \varepsilon$. Для заданного в условии задачи $\varepsilon = 0{,}5$ это условие проверяется простой подстановкой: перигелийная скорость равна $4V_0 \approx 119$ км/с, а вторая космическая равна $\sqrt{14}\ V_0 \approx 111$ км/с.

Корабль действительно **покидает** Солнечную Систему, и скорость корабля на бесконечном удалении от Солнца считается из закона сохранения энергии: $V_\infty^2 = V_{п2}^2 - V_{II}2 = 16\ V_0^2 - 14\ V_0^2 = 2\ V_0^2$, и $V_\infty = \sqrt{2}\ V_0 \approx$ **42 км/с**.

Для того, чтобы определить граничное значение ε, нам придётся тем или иным способом решить уравнение $(2/\varepsilon - 2\varepsilon + 1)^2 = 2\ (2 - \varepsilon^2) / \varepsilon^2$.

Оно после раскрытия скобок приводится к уравнению третьей степени $4\varepsilon^3 - 4\varepsilon^2 - 5\varepsilon + 4 = 0$, которое энтузиасты математики могут решить с использованием формул Кардано, а энтузиасты приближённых вычислений в астрономии и физике – подбором, например, методом последовательных двоичных делений промежутка (0 ; 1).

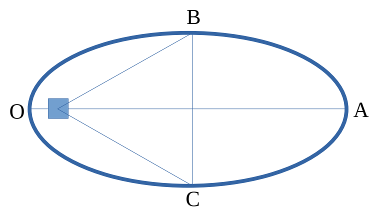
В результате с требуемой в условии точностью получается единственный корень в промежутке от 0 до 1: **$\varepsilon = 0{,}68$**. При большем значении ε корабль остаётся в системе, а при меньшем (и, в частности, при $\varepsilon = 0{,}5$) улетает от Солнца бесконечно далеко.

2. Большая Луна. Какую долю аномалистического месяца угловой размер Луны превышает средний? Какое максимальное количество ночей подряд может это длиться? Эксцентриситет орбиты Луны равен 0.0549. Аномалистический месяц равен 27.5545 средних солнечных суток. *(Б. Михайлов)*

Решение

Средний угловой размер Луны — это её угловой размер на среднем расстоянии от Земли, а среднее расстояние, как известно, равно большой полуоси орбиты.

Соответственно, вопрос задачи можно переформулировать следующим образом — какую долю от периода оборота Луны составляет время, когда её расстояние от Земли меньше большой полуоси орбиты?



Расстояние от фокуса эллипса до точки на нём равно большой полуоси, когда точка расположена на концах малой оси – в точках B и C на рисунке. На рисунке эксцентриситет орбиты Луны, конечно, сильно преувеличен для наглядности. Нужное нам время — это время, за которое Луна проходит дугу BOC. Разумеется, оно в общем случае не равно половине от периода, потому что вблизи перицентра скорость объекта больше, чем вблизи апоцентра.

Точное время прохождения дуги можно посчитать по уравнению Кеплера через истинные и эксцентрические аномалии, но можно вспомнить второй закон Кеплера в формулировке про заметаемые площади. Площадь фигуры B-O-C-Земля — это половина площади эллипса ($\pi ab/2$) без площади треугольника B-C-Земля (в терминах эллипса, $b \cdot c$). Доля этой площади от площади всего эллипса и будет искомой долей аномалистического периода.

Итого: $\alpha = (\pi ab/2 - bc) / (\pi ab) = ½ - c / \pi a = ½ - e / \pi =$ 0,4825.

В сутках это составит 13,3 суток, то есть при идеальных условиях можно получить 14 ночей «большой Луны» подряд. Попутно заметим, что нам не понадобились никакие справочные данные о Луне или Земле, кроме упомянутых в условии.

За решение в стиле «аномалистический месяц делим пополам, округляем до большего» без подробного обоснования ставится не более 2 баллов.

3. Сферический астероид в вакууме. Сферический астероид обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите, большая полуось которой равна 1 а.е. Известно, что сейчас он находится в квадратуре и его фаза равна 75%. Найдите его скорость. *(Б. Михайлов)*

Решение

В квадратуре могут находиться только внешние по отношению к Земле небесные тела, так что сразу отметим, что текущее расстояние от Солнца до астероида должно быть больше, чем 1 а.е.

Из заданной фазы 75 % определяем фазовый угол астероида:
$(1 + \cos\varphi) / 2 = 3/4$, значит, $\cos\varphi = 1/2$, и $\varphi = 60°$.

Получаем треугольник «Солнце — Земля — астероид» с прямым углом у Земли и углом 60° у астероида. Значит, расстояние от астероида до Солнца (гипотенуза) равно
$R = 1$ а.е. $/ \sin 60° = 2 / \sqrt{3}$ а.е $\approx 1{,}15$ а.е.

Из закона сохранения энергии выводится (или вспоминается) известная формула зависимости модуля скорости небесного тела от его текущего расстояния до Солнца:

$V^2 = GM\,(2/R - 1/a) = GM/a\,(2a/R - 1)$

Подставляя значения $a = 1$ а.е. (из условия), $R = 2/\sqrt{3}$ а.е., получим $V \approx 30$ км/с $\cdot (\sqrt{3} - 1)^{1/2} =$ 25,67 км/с.

4. Похожие, но разные. Абсолютные звёздные величины двух звёзд на главной последовательности отличаются на 2^m. Во сколько раз отличаются их средние плотности? *(Б. Михайлов)*

Решение

Для звёзд главной последовательности работают эмпирические степенные формулы связи светимости с массой (функция масс) и с радиусом звезды (функция радиусов). Показатели степени для разных частей главной последовательности немного разные, но самые часто употребляющиеся в литературе варианты такие: $L \sim M^{3,5}$, $L \sim R^{5,2}$. За использование участниками в решении других коэффициентов в пределах от 3 до 4 для функции масс и от 4,5 до 5,5 в функции радиусов баллы не снижаются.

Через функции масс и радиусов цепочкой преобразований можно получить связь плотности звезды с её светимостью: $L \sim M^{3,5} \sim (\rho R^3)^{3,5} \sim \rho^{3,5} R^{10,5} \sim \rho^{3,5} L^{10,5/5,2} \sim \rho^{3,5} L^{2,02}$

Отсюда получаем зависимость $\rho \sim L^{(1 - 2,02)/3,5} \approx L^{-0,3}$.

Поскольку звёзды по условию отличаются по светимости на 2m, значит, $L_1/L_2 = 2{,}512^2 = 10^{0,8}$, и их плотности относятся как $\rho_1/\rho_2 = 10^{-0,24} \approx 0{,}58$. Более яркая звезда имеет меньшую плотность.

5. Свет мой, зеркальце. На расстоянии 1 а.е. от Солнца установлено идеальное зеркало площадью 1000 км^2. Плотность материала зеркала равна ρ = 2000 кг/м^3, плоскость зеркала перпендикулярна направлению на Солнце. Какую толщину должно иметь зеркало, чтобы давление излучения Солнца уравновешивало силу притяжения к нему? Заметим, что в этом случае возникает сила тяги, действующая на систему «Солнце — зеркало». Сколько времени потребуется, чтобы разогнать Солнце при помощи этой тяги на 1 м/с? Доживет ли Солнце до этого дня? *(Д. С. Катков)*

Решение

Зеркало отражает солнечный свет, и испытывает световое давление $P = E\,(1 + A) / c$.
Здесь E — освещённость на расстоянии 1 а.е. от Солнца (E = 1370 Вт/м^2), A — альбедо зеркала (зеркало идеальное и перпендикулярно направлению на Солнце, A=1), c — скорость света ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Сила притяжения к Солнцу равна $F = GMm / R^2$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Солнца, m — масса зеркала, R = 1 а.е.

Приравниваем две силы, выражая массу через плотность и объём:

$E\,S\,(1 + A) / c = GM\,\rho S d / R^2$

Отсюда толщина зеркала $d = 2\,E\,R^2 / (c\,GM\,\rho)$.

Подставляя численные значения, получим $d \approx 7{,}7 \cdot 10^{-7}$ м = 0,77 мкм.

Сила тяги, действующая на Солнце, определяется двумя факторами: силой гравитационного притяжения Солнца к зеркалу и силой светового давления отражённого зеркалом луча. Посчитаем численно обе силы.

Сила притяжения: $F_g = GMm / R^2 = 9{,}1 \cdot 10^3$ Н.

Сила светового давления отражённого пучка эквивалентна силе светового давления Солнца, находящегося на расстоянии 2 а.е., то есть в 4 раза меньше найденной выше силы гравитационного притяжения (так как гравитационная сила равна силе светового давления на расстоянии 1 а.е). Заметим попутно, что, поскольку зеркало сильно меньше Солнца по линейным размерам, весь отражённый зеркалом пучок света попадёт на Солнце.

Таким образом, суммарная сила, действующая на Солнце, направлена к зеркалу и составляет

$F = ¾\,F_g = 6{,}8 \cdot 10^3$ Н.

Ускорение от такой силы равно $a = F / M = 3{,}4 \cdot 10^{-27}$ м/с^2, и до скорости 1 м/с Солнце будет разгоняться в течение $1 / a \approx 2{,}94 \cdot 10^{26}$ с ≈ $9{,}34 \cdot 10^{18}$ лет.

Поскольку по современным теориям эволюции звёзд, Солнцу до превращения в красного гиганта осталось всего 4-5 млрд лет, наше зеркало, увы, не успеет разогнать звезду до такой скорости. Солнце до этого знаменательного момента не доживёт.

6. Зонд и Солнце. Аппарат NASA Parker Solar Probe, изучающий Солнце, в середине ноября прошёл на рекордном расстоянии от поверхности Солнца – 8,5 миллиона километров. Во время максимального сближения он достиг скорости 163 км/с – этот показатель также является рекордным. На какое максимальное расстояние от Солнца может удалиться аппарат, если его диаметр равен 2,3 м, а альбедо 0,9? *(Б. Михайлов)*

Решение

Указание альбедо аппарата заставляет задуматься о влиянии давления света на его орбиту.

Сила светового давления равна $F_{св} = L / (4\pi R^2) \cdot S (1+A) / c$, и суммарная центральная сила, действующая на аппарат, может быть представлена как притяжение к звезде с «эффективной массой», чуть меньшей, чем реальная масса Солнца:

$F = GMm / R^2 - L / (4\pi R^2) \cdot (1+A) / c = Gm / R^2 \cdot (M - L / (4\pi c\ GMm) \cdot S (1+A))$.

Считая обращённую к Солнцу сторону аппарата круглой (на это намекает слово «диаметр»), оценим отрицательную добавку к массе Солнца. Масса аппарата в условии не дана, но аппарат небольшой, и её можно оценить значением 500 кг, не слишком погрешив против реальности (в реальности — 550 кг).

$\Delta M = L / (4\pi c\ GMm) \cdot S (1+A) = 4{,}8 \cdot 10^{-5}$ кг

Понятно, что по сравнению с массой Солнца эта добавка абсолютно незначительна, и влияние светового давления можно не учитывать. Однако поскольку в условии заданы диаметр и альбедо аппарата, за решение без численного доказательства малости силы светового давления участникам будут снижены баллы.

Попутно отметим, что на вывод о малости силы светового давления наши оценки массы аппарата (в разумных пределах) не влияют. Поэтому участники могут использовать любые значения массы в пределах от 100 до 1000 кг без снижения баллов.

В итоге мы можем считать движение аппарата в приближении классической кеплеровской механики без учёта влияния излучения.

Перигелийное расстояние равно $R_п = 8{,}5 + 0{,}7 = 9{,}2$ млн км (не забываем про радиус Солнца), перигелийная скорость равна $V_п = 163$ км/с $= (GM / R_п \cdot (1 + e))^{1/2}$, откуда эксцентриситет орбиты $e = 0{,}815$. Большая полуось равна $a = R_п / (1 - e) = 49{,}7$ млн км, и расстояние афелия равно 90.2 млн км.