КОСМОНАВТИКА. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. КЛАССЫ 7, 8, 9

1. Воинская колонна, совершающая марш-бросок, имеет длину $L = 500$ м. Командир, находящийся во главе колонны, направил конного посыльного в «хвост» колонны к своему заместителю с пакетом (заместитель замыкает колонну). Посыльный поскакал против движения колонны со скоростью u = 36 км/ч, вручил пакет заместителю командира и сразу же вернулся с той же скоростью к началу колонны, затратив на весь путь t = 2 мин 36 с. Найдите, с какой скоростью v двигалась колонна (скорость и длину колонны все это время считайте постоянными). Ответ приведите в м/с, округлив до целых.
Ответ: 6 м/с.
Решение. Скорость посыльного равна 36 км/ч=10 м/с. В одну сторону он двигался против движения колонны, следовательно, он приближался к «хвосту» колонны со скоростью $(10 + v)$м/с и затратил на этот путь время $t_1 = \frac{500}{10+v}$секунд. В обратную сторону он двигался в одну сторону с колонной, следовательно, он догонял «голову» колонны со скоростью $(10 - v)$м/с и затратил на обратный путь время $t_2 = \frac{500}{10-v}$секунд. Зная общее время, составим уравнение:
$$\frac{500}{10+v} + \frac{500}{10-v} = 156.$$
Приведем к общему знаменателю, получим $2500 = 3900 - 39v^2$,откуда $v^2 = \frac{1400}{39}$, $v \approx 6$м/с.
2. Два одинаковых шарика роняют (не сообщая начальной скорости) с одной и той же высоты над поверхностью. Первый эксперимент проводят на Земле, а второй – на планете, на которой ускорение свободного падения отлично от земного. За то время, за которое второй шарик достиг поверхности планеты, первый находился ровно на половине начальной высоты. Во сколько раз скорость первого шарика в момент падения на землю будет меньше скорости второго (в момент его падения на поверхность планеты)? Силу сопротивления воздуха не учитывайте.
Ответ: $\sqrt{2}$ раз.
Решение. 1-й способ. Введем систему координат так, чтобы начало отсчета совпадало с начальным положением шарика, а ось была направлена вниз (по ходу движения шарика). Закон движения имеет вид $S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где a – ускорение свободного падения. На Земле $a = g$. Обозначим ускорение свободного падения на планете через g_1.Далее, у нас в обоих случаях $S_0 = v_0 = 0$. Пусть высота, с которой падают шарики, равна h. Тогда для шарика на Земле имеем: $\frac{h}{2} = \frac{gt_0^2}{2}$. За то же самое время t_0второй шарик достигнет поверхности планеты, следовательно, получаем уравнение $h = \frac{g_1 t_0^2}{2}$, где на планете. Отсюда $g_1 = 2g$. Из закона сохранения энергии следует равенство
$$mg_1 h = \frac{mv_1^2}{2}$$
и такое же для второго шарика. Отсюда $g_2 : g_1 = v_2^2 : v_1^2 = 2$, т.е. $v_2 : v_1 = \sqrt{2}$.
2 способ. При свободном падении скорость тела равномерно растет со временем, т.е. $v = kt$. Тогда пройденный телом путь можно найти как произведение средней скорости $v_{\text{ср}} = \frac{kt}{2}$ и времени $s = \frac{kt^2}{2}$. Отсюда получаем, что пройденный телом путь пропорционален квадрату финальной скорости. В нашей задаче второй шарик достиг поверхности в тот момент, когда первый прошел половину пути. Если мысленно продолжить падение второго шарика (скажем, он попадает в вертикальную шахту, прорытую вглубь планеты), то в тот момент, когда первый шарик достигнет поверхности, второй пройдет вдвое больший путь. Отсюда $s_2 : s_1 = 2$, а значит, $v_2 : v_1 = \sqrt{2}$.
3. Обозначим $P(n)$ – произведение всех цифр натурального числа n.

а) Найдите сумму $P(1)+P(2)+\dots+P(200)$;

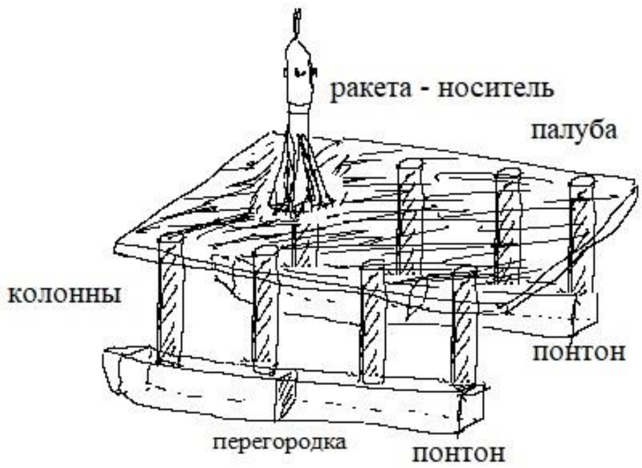
б) Найдите сумму $P(1)+P(2)+\dots+P(2021)$.

Ответ. а) 4095 **б)** 184320

Решение. а) Для чисел от 1 до 9 очевидно $P(n)=n$, т.е. $P(1)+P(2)+\dots+P(9)=1+2+\dots+9=45$. Для двузначных чисел -го десятка $P(10k+n)=kn$, т.е. $P(10k+1)+P(10k+2)+\dots+P(10k+9)=k(1+2+\dots+9)=45k$. Отсюда $P(1)+P(2)+\dots+P(99)=45+45\cdot1+45\cdot2+\dots+45\cdot9=45\cdot46=2070$. Для второй сотни рассуждаем аналогично и получаем $P(100)+\dots+P(199)=2025$.

б) Продолжая рассуждения для -ой сотни получаем $P(100k)+\dots+P(100k+99)=2025k$, т.е. $P(100)+\dots+P(999)=2025+2025\cdot2+\dots+2025\cdot9=91125$. Рассуждая для второй тысячи аналогично, получим $P(1000)+\dots+P(1999)=91125$. Отсюда итоговая сумма равна 2070+91125+91125+0=184320.

4. Платформа для морского старта представляет собой горизонтальную палубу длины 135 м и ширины 67 м, на восьми колоннах, которые опираются на два понтона, заполненные воздухом. Длина каждого понтона 135 м, ширина 10 м, высота 21,5 м. Общая масса платформы 27000 тонн.



а) Найдите глубину, на которую понтоны погружены в воду. Плотность морской воды считаем 1 т/м^3, весом стенок понтонов пренебрегаем.

б) На палубе платформы вертикально установили ракету-носитель массы 500 т, готовую к старту. Точка старта расположена на середине ширины платформы, на расстоянии 33,75 м от носа платформы. Для того, чтобы платформа осталась строго горизонтальной, а также для того, чтобы понизить центр тяжести платформы, понтоны частично заполняют водой. При этом каждый понтон в середине разделен перегородкой, что позволяет закачать в носовую часть понтона m_1 т воды, а в кормовую часть m_2 т. Найдите m_1 и m_2, если общая масса конструкции стала равна 50500 тонн.

в) Платформа для морского старта нужна для того, чтобы можно было обеспечить старт ракеты в области экватора Земли. А почему старт из области экватора предпочтительней? Поясните свое мнение.

Ответ а) $h=$10 м. **б)** $m_1=5625$ т, в носовой части каждого понтона; $m_2=5875$ т в кормовой части каждого понтона.

Решение а) Сила Архимеда уравновесит силу тяжести, т.е. $\rho_{\text{воды}}gV_{\text{погруженного тела}}=Mg$. Отсюда находим $V=27000$ м^3 $=2\cdot135\cdot10\cdot h$ (понтонов у нас два) и глубину погружения.

б) В силу симметрии ответ будет одинаковым для левого и правого понтонов. Вначале понтоны были уравновешены. Затем к понтону были приложены дополнительные силы $F_0=mg$, $m=500:2=250$ т (точка приложения делит понтон в отношении 1:3), $F_1=m_1g$ (точка приложения делит понтон в отношении 1:3) и $F_2=m_2g$ (точка приложения делит понтон в отношении 3:1). Горизонтальное положение понтона является положением равновесия, если $F_1+F_0=F_2$. По условию, суммарная масса закачанной воды равна $50500-27500=23000$ т. Получили систему уравнений

$$\begin{cases} m_2-m_1=250, \\ m_1+m_2=11500. \end{cases}$$

Проверим еще, что вся эта конструкция не потонет. Повторяя рассуждения пункта а), получим $2\cdot135\cdot10\cdot h=50500$, откуда $h=18{,}7<21{,}5$.

в) При выводе космического аппарата на орбиту, лежащую в экваториальной плоскости (например, на геостационарную орбиту) или близкую к ней наиболее предпочтительной точкой старта является точка на экваторе. В этом случае удается в полной мере использовать центробежную силу, созданную вращением Земли. Эта сила снижает ускорение свободного падения до 9,78 м/с^2, что снижает расход топлива и, в конечном счете, стоимость запуска.

5. Чтобы обменяться необходимой информацией с центром управления, необходимо передать N различных пакетов информации $A_1, \ldots, A_N$ с космического аппарата в центр и столько же ответных пакетов $B_1, \ldots, B_N$ обратно. Передача одного пакета информации в одну сторону занимает одну секунду. В процессе передачи канал полностью занят (никакой другой информации в этот момент передаваться по нему не может). В вашем распоряжении имеется p каналов связи, работающих независимо друг от друга (каждый канал может передавать любой из пакетов $A_1, \ldots, A_N, B_1, \ldots, B_N$). Пакеты можно передавать в любом порядке, но ответ B_j передавать можно только после получения пакета A_j, $1 \leq j \leq N$.

   а) За какое минимальное время t можно передать все информационные пакеты?
   б) Опишите (любым способом) алгоритм, позволяющий организовать эту передачу.
   в) Напишите программу на вашем любимом языке программирования, реализующую данный алгоритм.

   Входные данные
   Вводится натуральное число N ($1 \leq N \leq 10000$) и натуральное число p ($2 \leq p \leq 5$).
   Выходные данные
   Выведите число t. Затем выведите t строк. В каждой строке укажите номера пакетов, которые следует передавать в эту секунду. Номера разделяйте пробелом.
   Пример
   входные данные
   2 2
   выходные данные
   2
   A1 A2
   B1 B2

   Решение а), б) Если $N < p$, то в первую секунду передаем все пакеты с КА, а во вторую принимаем все ответы. Будет затрачено 2 секунды. При $N \geq p$ алгоритм меняется. Вначале передаем все пакетов с КА в центр. После этого передаем все пакеты обратно. При этом, в ту секунду, когда передача пакетов A_j заканчивается, мы уже занимаем оставшиеся свободными каналы пакетами B_j (это возможно, так как в этот момент получены, по крайней мере, все пакеты $A_1, \ldots, A_p$). В результате будет передано $2N$ пакетов. За каждую секунду будем задействовать все p каналов связи. Значит, передача займет $\left\lceil \frac{2N}{p} \right\rceil$ (наименьшее целое, большее дроби $\frac{2N}{p}$). За меньшее время осуществить передачу невозможно, т.к. первые $\left\lceil \frac{2N}{p} \right\rceil$секунд все каналы заняты (оптимизация невозможна).

Критерии

«п.б.» - «первичный балл»

Задача 1

4. Верное решение 10 п.б.
5. Верная формула, верные единицы измерения, но ошибка в подсчете 8 п.б.
6. Верная формула, ошибка из-за единиц измерения 6 п.б.
7. Уравнение решено подбором 6 п.б.
8. Все остальное 0 п.б.

Задача 2

1. Верное решение 10 п.б.
2. Верное решение с арифметической ошибкой (потерял корни, перевернул дробь и т.п.) 8 п.б.
3. Решена только первая часть (соотношение на ускорения) 2 п.б.
4. Решена только вторая часть (в ответе дробь из ускорений) 6 п.б.
5. Интуитивное неверное рассуждение или рассуждение с концептуальной ошибкой (считает, что время одинаковое и т.п.) 2 п.б.

Задача 3а)

1. Верное решение 5 п.б.
2. Арифметическая ошибка в подсчете, но ход решения верный 3 п.б.
3. Ошибочная идея или не доведено до ответа, но есть продвижение 1 п.б.

Задача 3б)

1. Верное решение 5 п.б.
2. Арифметическая ошибка в подсчете, но ход решения верный 3 п.б.
3. Ошибочная идея или не доведено до ответа, но есть продвижение 1 п.б.

Задача 4а)

1. Верное решение 5 п.б.
2. Верный ответ «почти» получен 4 п.б.
3. Забыто, что понтона два 4 п.б.
4. Неверная логика решения, но есть верные идеи 1 п.б.

Задача 4б)

1. Верное решение 10 п.б.
2. Нет проверки того, что конструкция не потонет 10 п.б.
3. Неверно обосновано (балансирует силы из каких-то своих соображений), но есть внутренняя логика и ответ верный 7-9 п.б.
4. Неверно обосновано (балансирует силы из каких-то своих соображений), есть внутренняя логика, но ответ неверный 4 п.б.
5. Ошибка при балансировке сил 6 п.б.
6. Решение не доведено до ответа, но есть продвижение 3 п.б.
7. Верный ответ без решения 0 п.б.

Задача 4в)

1. Верное и подробное объяснение 5 п.б.
2. Не говорит, что эффект будет только при выведении на орбиту, лежащую в близкой к экваториальной плоскости -1 п.б.
3. Вообще не говорит о выводе на орбиту -1 п.б.
4. Не говорит, почему ускорение свободного падения на экваторе меньше или объясняет это неверно (например, сплюснутостью Земли) -1 п.б.
5. Вообще ничего не говорит про ускорение -1 п.б.

Задача 5а) и 5б) вместе

При отсутствии решения 5б) алгоритмом считается алгоритм программы пункта 5в).

1. Верное решение 10 т.б.
2. Верное, но есть погрешности:
   a. Упущен случай N<p -1 п.б.
   b. В пункте а) неверное округление, но алгоритм дает верную формулу -1 п.б.
   c. В пункте а) не взята целая часть, но алгоритм дает верную формулу -2 п.б.
   d. Неоптимальный алгоритм, но формула в а) верна -3 п.б.

   e. Алгоритм в целом верный, но не до конца прописан -2 п.б.
   f. Не выписан ответ к п а), хотя он следует из алгоритма -2 п.б.
3. Есть верная формула с обоснованием, но нет алгоритма 5 п.б.
4. Есть верная формула без обоснования и нет алгоритма 4 п.б.
5. Неоптимальный алгоритм и неверная формула 4 п.б.
6. Нет верной формулы, нет алгоритма (даже неоптимального), но есть верное продвижение 2 п.б.

Задача 5в)

1. Верное решение 10 п.б.

   Замечания к каждой программе прописываются и учитываются индивидуально.

Первичные баллы переводятся в технические баллы (100-бальная шкала) следующим образом: сначала первичный балл умножается на коэффициент 0.7, затем округляется до полуцелых по правилу

(0, 22] = 20 технических баллов
(23, 27] = 25 технических баллов
(28, 32] = 30 технических баллов
(33, 37] = 35 технических баллов
(38, 42] = 40 технических баллов
(43, 47] = 45 технических баллов
(48, 52] = 50 технических баллов
(53, 57] = 55 технических баллов
(58, 62] = 60 технических баллов
(63, 67] = 65 технических баллов
(68, 72] = 70 технических баллов
(73, 77] = 75 технических баллов
(78, 82] = 80 технических баллов
(83, 87] = 85 технических баллов
(88, 92] = 90 технических баллов
(93, 97] = 95 технических баллов
(98, 100] = 100 технических баллов