

## КОСМОНАВТИКА. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. КЛАССЫ 5, 6

1. Преподаватели математики поставили перед юным исследователем космоса следующую задачу. У некоторой дроби числитель и знаменатель являются различными натуральными числами. Числитель увеличили на 1, а знаменатель – на 100.

- а) Могла ли при этом исходная дробь увеличиться?  
б) Могла ли она увеличиться вдвое?  
в) Могла ли она уменьшиться вдвое?

Приведите полное решение.

**Решение.** а) Да, например дробь  $1/10000$ .

б) Нет. Пусть  $\frac{n}{m}$  – исходная дробь, тогда получаем соотношение  $\frac{n+1}{m+100} = \frac{2n}{m}$ , откуда  $nm + 200n = 1$ , что невозможно для натуральных чисел.

в) Да, например дробь  $2/50$ .

2. Полученный из космоса снимок земной поверхности представляет собой прямоугольник (длины сторон различны), разделенный на одинаковые квадраты. Квадраты пронумерованы числами  $1, 2, \dots, n$ . Сумма периметров квадратов с нечетными номерами на 24 больше суммы периметров квадратов с четными номерами. Периметр прямоугольника в 3 раза больше периметра каждого из квадратов. Найдите площадь прямоугольника.

**Ответ:** 180.

**Решение.** Разность периметров квадратов с четными и нечетными номерами равна периметру одного квадрата. Длина его стороны  $24:4 = 6$ .

Периметр прямоугольника равен  $24 \cdot 3 = 72$ . Значит, сумма длины и ширины равна 36, при этом и длина, и ширина делятся на 6, поскольку должно поместиться целое число квадратов со стороной 6.

Возможны три варианта для сторон прямоугольника:  $6 \times 30$  (5 квадратов в ряд),  $12 \times 24$  (не подходит, так как тогда имеем четное число квадратов) и  $18 \times 18$  (но тогда длины сторон одинаковы, а по условию они различны). Значит, годится только первый вариант.

Площадь прямоугольника  $6 \cdot 30 = 180$ .

3. Обозначим  $P(n)$  – произведение всех цифр натурального числа  $n$ . Найдите сумму:

$$P(1) + P(2) + \dots + P(200).$$

**Ответ** 4095.

**Решение.** Для чисел от 1 до 9 очевидно  $P(n) = n$ , т.е.  $P(1) + P(2) + \dots + P(9) = 1 + 2 + \dots + 9 = 45$ . Для двузначных чисел  $n$ -го десятка  $P(10k + n) = kn$ , т.е.  $P(10k + 1) + P(10k + 2) + \dots + P(10k + 9) = k(1 + 2 + \dots + 9) = 45k$ . Отсюда  $P(1) + P(2) + \dots + P(99) = 45 + 45 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + \dots + 45 \cdot 9 = 45 \cdot 46 = 2070$ . Для второй сотни рассуждаем аналогично и получаем  $P(100) + \dots + P(199) = 2025$ .

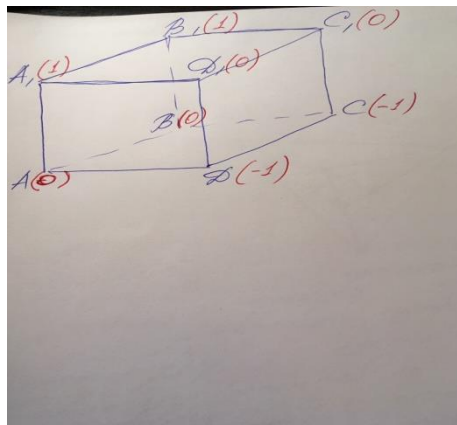
4. Три инвестора из трех государств строят космодром на нейтральной территории рядом с границей этих государств. Стоимость строительства:  $N = 897$  миллиардов «фунтиков». Расстояния от столиц этих государств до места строительства равны  $R_1 = 11$  км,  $R_2 = 9$  км,  $R_3 = 10$  км соответственно. Распределите стоимость строительства между инвесторами, исходя из условия, что вносимые инвесторами суммы  $N_1, N_2, N_3$  удовлетворяют соотношениям:  $N = N_1 + N_2 + N_3$ ,  $N_1:N_2 = R_2:R_1$ ,  $N_2:N_3 = R_3:R_2$ ,  $N_1:N_3 = R_3:R_1$  (то есть больше вносит тот, чья столица ближе к космодрому).

**Ответ**  $N_1 = 270$ ,  $N_2 = 330$ ,  $N_3 = 297$  миллиардов «фунтиков».

**Решение.** Согласно условию,  $N_1:N_2 = 9:11$ ,  $N_1:N_3 = 10:11$ . Пусть  $N_1 = 90x$ , тогда  $N_2 = 110x$ ,  $N_3 = 99x$ ,  $N = N_1 + N_2 + N_3 = 299x = 897$ . Тогда  $x = 3$ ,  $N_1 = 270$ ,  $N_2 = 330$ ,  $N_3 = 297$ .

5. Расставьте в вершинах куба числа  $a_1, a_2, \dots, a_8$  (целые, не обязательно попарно различные, не все одновременно равные нулю) чтобы число в каждой вершине равнялось сумме стоящих в трех вершинах, соединенных с данной куба (надо найти хотя бы одну такую расстановку).

**Ответ**



так,  
чисел,  
ребром

6. Код состоит из различных цифр и образует число, которое делится без остатка на любую из этих цифр.

- а) Можно ли составить код из 7 цифр? Если да, приведите пример, если нет, объясните, почему.  
 б) Можно ли составить код из 8 цифр? Если да, приведите пример, если нет, объясните, почему.  
 в) Составьте код так, чтобы полученное натуральное число было наибольшим из возможных, удовлетворяющих приведенным условиям. Объясните свой ответ.

**Решение.** а) Да, например, 1289736

б) Нет. Если такое число есть, то оно не содержит 0 и заканчивается на четную цифру. Значит, не содержит 5. Тогда сумма цифр не кратна 9.

в) Из пунктов а), б) следует, что такой код должен состоять из 7 цифр. Очевидно, он не может содержать цифру 0. Если он содержит цифру 5, то должен делиться на 5. Значит, оканчивается на 5 или на 0. На 0 нельзя, значит, на 5. Тогда это число нечетное, следовательно, не может содержать цифр 2, 4, 6, 8. Значит, в нем меньше 7 цифр – не подходит. Итак, отбрасываем цифру 5.

Чтобы число было как можно больше, начнем его с цифры 9. Тогда оно должно делиться на 9, то есть сумма его цифр должна делиться на 9.

$1+2+3+4+6+7+8+9=40$ . Ближайшее число, которое меньше 40 и делится на 9 – это 36. Значит, отбрасываем 4. Искомое число состоит из цифр 1, 2, 3, 6, 7, 8 и 9. Заметим, что 98 делится на 7, а делимость на 8 не зависит от первых двух цифр. Значит, начнем наше число с 98 и будем подбирать оставшиеся пять цифр. Самое большое возможное число равно 76321, но оно не делится на 8. Переставим две последние цифры, получим 76312 – оно делится на 8, но не делится на 7. Переставим местами 7 и 6 – число 67312 делится на 7 и на 8. Докажем, что это число действительно наибольшее. Наше число должно делиться на 7, 8 и 9, то есть на 504. Будем двигаться от 67312 вверх с шагом 504. Получим числа:

67816, 68320, 68824, 69328, 69832, 70336, 70840, 71344, 71848, 72352, 72856, 73360, 73864, 74368, 74872, 75376, 75880 (далее уже получим больше, чем 76321). Ни одно из этих чисел не подходит.

**Ответ:** 9867312.

число,

## Критерии

«п.б.» - «первичный балл»

### Задача 1а)

- |   |        |
|---|--------|
| 1. Верное решение                                 | 5 п.б. |
| 2. Есть верные мысли, но не более того            | 1 п.б. |
| 3. Рассуждение верное, но правильного примера нет | 3 п.б. |

### Задача 1б)

- |   |        |
|---|--------|
| 1. Верное решение                       | 5 п.б. |
| 2. Есть верные мысли, но не более того  | 1 п.б. |
| 3. Есть верная идея, но вывод ошибочный | 2 п.б. |
| 4. Недостаточное обоснование            | 3 п.б. |

### Задача 1в)

- |  |        |
|--|--------|
| 1. Верное решение  | 5 п.б. |
| 2. Есть верная идея, но пример ошибочный или отсутствует | 3 п.б. |
| 3. Есть верные мысли, но не более того                   | 1 п.б. |

### Задача 2

- |   |          |
|---|----------|
| 1. Верное решение   | 10 п.б.  |
| 2. Верные рассуждения, но забыто условие, что прямоугольник не является квадратом                                 | 9 п.б.   |
| 3. Верный ответ, но нет достаточного обоснования того, что стороны прямоугольника 6 и 30                          | 8-9 п.б. |
| 4. Верные рассуждения, но забыто условие, что прямоугольник не является квадратом. Второй (верный) случай упущен. | 6 п.б.   |
| 5. Верный ответ, но решение содержит существенные пробелы   | 5 п.б.   |
| 6. Есть верные продвижения  | 2-4 п.б. |

### Задача 3

- |   |         |
|---|---------|
| 1. Верное решение   | 10 п.б. |
| 2. Почти верно, но есть арифметическая ошибка                 | 8 п.б.  |
| 3. Серьезная арифметическая ошибка                            | 5 п.б.  |
| 4. Верная идея, но не доведено до ответа                      | 3 п.б.  |
| 5. Неверно понято условие, что привело к более простой задаче | 2 п.б.  |

### Задача 4

- |  |          |
|--|----------|
| 1. Верное решение                                  | 10 п.б.  |
| 2. Верная идея, но ошибка при работе с пропорциями | 7 п.б.   |
| 3. Есть верные продвижения                         | 2-3 п.б. |

### Задача 5

- |  |         |
|--|---------|
| 1. Верное решение                                      | 10 п.б. |
| 2. Есть понимание и верное продвижение. Ответ неверный | 4 п.б.  |
| 3. Есть верная идея, но не более того                  | 2 п.б.  |

### Задача 6а)

- |   |        |
|---|--------|
| 1. Верное решение   | 5 п.б. |
| 2. Верное рассуждение, ошибка при записи ответа                             | 4 п.б. |
| 3. Обоснованно нашел верные цифры, дальше решение отсутствует, или неверное | 3 п.б. |
| 4. Есть верные рассуждения, но не доведено до ответа                        | 2 п.б. |
| 5. Есть верные мысли, но не более того                                      | 1 п.б. |

### Задача 6б)

- |  |        |
|--|--------|
| 1. Верное решение                      | 5 п.б. |
| 2. Недостаточное обоснование           | 3 п.б. |
| 3. Есть верные мысли, но не более того | 1 п.б. |

### Задача 6в)

- |  |         |
|--|---------|
| 1. Верное решение  | 10 п.б. |
| 2. Верный ответ, обоснованы цифры, но нет обоснования максимальности | 8 п.б.  |

3. Обоснованно нашел верные цифры, дальше решение отсутствует, или неверное

3 п.б.

4. Есть верные мысли, но не более того

1 п.б.

Первичные баллы переводятся в технические баллы (100-бальная шкала) следующим образом: сначала первичный балл умножается на коэффициент 0.75, затем округляется до полуцелых по правилу

(0, 22] = 20 технических баллов

(23, 27] = 25 технических баллов

(28, 32] = 30 технических баллов

(33, 37] = 35 технических баллов

(38, 42] = 40 технических баллов

(43, 47] = 45 технических баллов

(48, 52] = 50 технических баллов

(53, 57] = 55 технических баллов

(58, 62] = 60 технических баллов

(63, 67] = 65 технических баллов

(68, 72] = 70 технических баллов

(73, 77] = 75 технических баллов

(78, 82] = 80 технических баллов

(83, 87] = 85 технических баллов

(88, 92] = 90 технических баллов

(93, 97] = 95 технических баллов

(98, 100] = 100 технических баллов