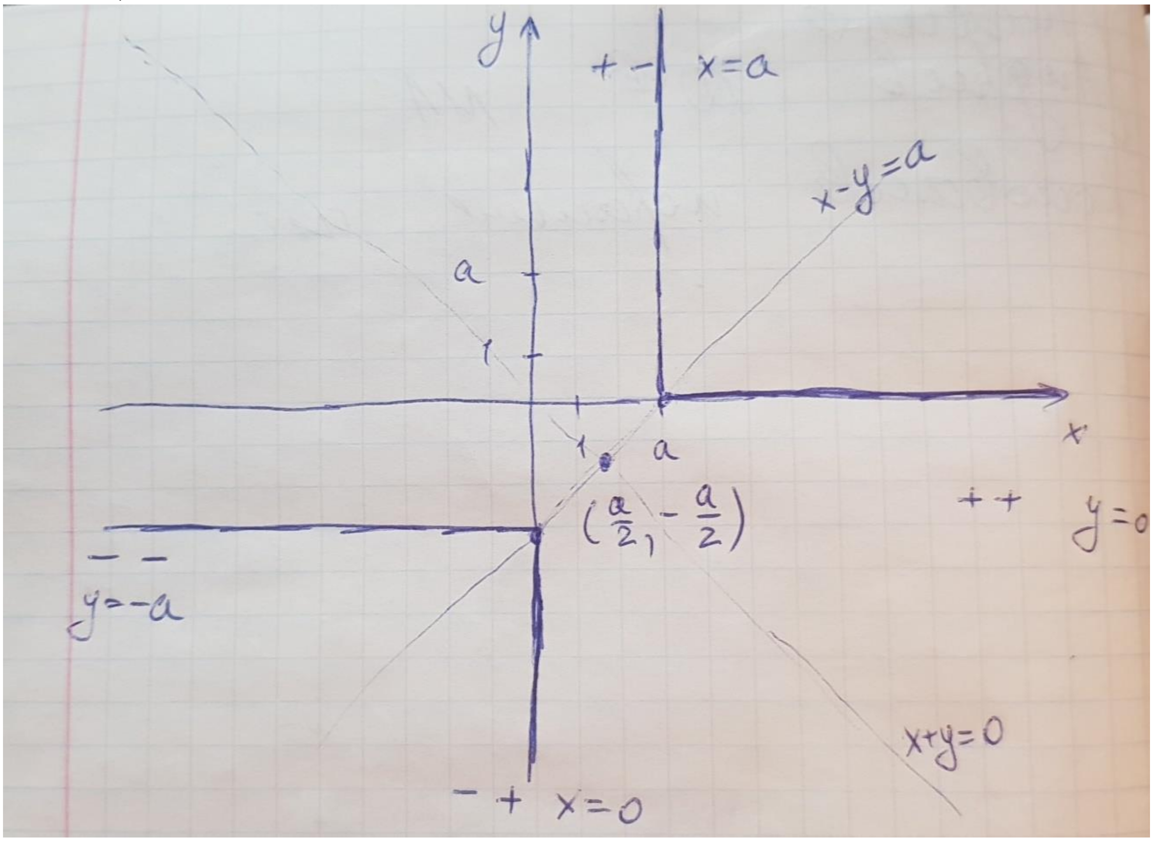
КОСМОНАВТИКА. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. КЛАССЫ 10 и 11

1. а) Изобразите на координатной плоскости множество решений уравнения

$$|x+y|-|x-y-a|=a, \qquad a>0.$$

б) Выпишите координаты центра симметрии и уравнения всех осей симметрии получившейся фигуры.

Ответ. а)



б) Оси симметрии $x+y=0$ и $x-y=a$. Центр симметрии $\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$.

Решение. а) Разбиваем плоскость на 4 части прямыми $x+y=0$ и $x-y-a=0$. В каждой из частей раскрываем модули. Получаем уравнения четырех лучей $y=0$, $x=a$, $y=-a$ и $x=0$.

б) Очевидно, смена знака выражения под каждым из модулей не нарушает равенства. Значит, каждая из прямых $x+y=0$ и $x-y-a=0$ является осью симметрии. Аналогично находим центр симметрии. Других осей симметрии нет: при симметрии относительно оси луч переходит в луч. Значит, например, для луча $y=0$ имеем только три варианта – его симметричным отражением может быть луч $x=a$, $y=-a$ или $x=0$. Первый и третий вариант реализованы, а второй невозможен: прямые $y=0$ и $y=-a$ параллельны, так что ось симметрии обязана быть либо перпендикулярна, либо параллельна им. Легко видеть, что оба варианта не подходят.

2. Точка K является серединой стороны BC параллелограмма $ABCD$. Отрезки DK и AC пересекаются в точке L.

а) Докажите, что $DL=2KL$.

б) Пусть M – середина отрезка LD. Луч CM пересекает сторону AD в точке N, а диагональ BD – в точке Q. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника NQD равна 2.

Ответ. б) 80.

Решение. а) Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. В треугольнике BCD отрезки DK и CO являются медианами, а значит, делятся точкой пересечения L в отношении 2:1, считая от вершины.

б) Применяя теорему Менелая к треугольнику BKD и секущей CN, находим $BQ = 4QD$. Отсюда $OQ: QD = 3: 2$. Применяя теорему Менелая к треугольнику AOD и секущей CN, находим $AN = 3DN$. Отсюда $DN = \frac{1}{4}DA$, $DQ = \frac{1}{5}DB$, а значит, площадь треугольника DNQ есть $\frac{1}{20}$ площади треугольника DAB и $\frac{1}{40}$ площади всего параллелограмма.

3. Найдите радиус r стационарной орбиты планеты, то есть круговой орбиты, для которой период обращения искусственного спутника планеты T равен в точности одному периоду обращения планеты. Радиус планеты примите равным R = 3400 км, длительность периода обращения 24 ч 40 мин, а ускорение свободного падения у поверхности g = 3,71 м/с^2. Ответ приведите в километрах, округлив до целых.

Ответ.

$$r = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} \approx 20461 \text{ км}$$

Решение. Уравнение движения спутника массой m по круговой орбите радиуса r имеет вид $\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$, где v – скорость спутника, G – гравитационная постоянная, M – масса планеты. Отсюда период обращения спутника $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}}$. Учитывая, что по закону всемирного тяготения ускорение свободного падения у поверхности планеты $g = \frac{GM}{R^2}$, это выражение можно переписать в виде $T = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{R\sqrt{g}}$. Выражая отсюда r, получаем ответ.

4. По заданному числу C найдите такое число x, что $x^2 + \sqrt{x} = C$, с точностью не менее 3 знаков после точки.

Входные данные

В единственной строке содержится вещественное число $1 \leq C \leq 100$

Выходные данные

Выведите одно число — искомый x.

Примеры

входные данные

2.0

выходные данные

1.000

входные данные

18

выходные данные

4.000

5. Два искусственных спутника Земли движутся в одной плоскости по круговым орбитам высотой 800 и 460 км. Они находятся в прямой видимости ровно тогда, когда отрезок, соединяющий их, не пересекает земную поверхность. В начальный момент времени спутники находились на общем луче с вершиной в центре Земли. Через некоторый промежуток времени они снова оказались на подобном луче. Какую часть времени от этого промежутка спутники были в прямой видимости? Считайте Землю идеальным шаром радиуса 6400 км.

Ответ.

$$\frac{1}{\pi}\arccos\frac{R^2-\sqrt{(2Ra+a^2)(2Rb+b^2)}}{ab}\approx 0{,}2687$$

Решение. Введем полярную систему координат с центром O в центре Земли и полярным лучом, направленным на первый спутник. Спутники движутся с постоянными угловыми скоростями. Значит, в этой системе второй спутник будет описывать окружность с постоянной угловой скоростью. Тогда искомая доля времени (вне зависимости от того, сколько полных оборотов совершит за промежуток времени второй спутник, и вне зависимости от того, вращаются ли спутники в одну сторону или в разные) совпадает с долей дуги, находясь на которой второй спутник находится в прямой видимости с точкой $A=(6860{,}0)$, по сравнению с длиной полной окружности. Пусть второй спутник находится в точке B. Связь продет тогда, когда отрезок AB коснется поверхности Земли, т.е. когда высота OH в треугольнике OAB равна 6400. По теореме Пифагора тогда $AO=2469{,}737$, $BO=3298{,}485$, $AB=5768{,}221$. По теореме косинусов находим $\cos AOB=0{,}664351$. Поскольку угол AOB равен половине искомой дуги, то ответ – его радианная мера, деленная на π.

6. Спутник дистанционного зондирования осуществляет съемку поверхности Земли с орбиты фотокамерой с ПЗС-матрицей.

а) Пусть спутник снял поле прямоугольной формы (дан список координат пикселей, образующих на снимке это поле). Поскольку съемка проводилась под углом α градусов к вертикали, на снимке поле имеет форму параллелограмма. Опишите алгоритм, позволяющий найти точку привязки – координаты центра поля. Входные данные: неупорядоченный список пар чисел (x и y координат пикселей). Выходные данные: два числа – координаты пикселя центра. Влиянием атмосферы пренебрегаем, считаем, что поле настолько мало, что поверхность можно считать плоской, а угол, под которым видны точки поля, постоянным.

б) Если бы съемка того же поля проводилась под нулевым углом к вертикали, то площадь поля S находилась бы по формуле $S=k\cdot N$, где N – число пикселей, образующих на снимке поле, а k - известный коэффициент (он зависит от разрешения камеры, высоты съемки и т.д.). Считая, что этот коэффициент и угол съемки α известны, предложите способ вычисления площади поля S. Входные данные: неупорядоченный список пар чисел (x и y координат) пикселей. Выходные данные: одно число – площадь поля S.

Ответ. а) Координата x центра есть среднее арифметическое всех -координат данных нам пикселей. Аналогично для второй координаты.

б) $S=\frac{k\cdot N}{cos^2\alpha}$

Решение. а) При съемке прямоугольника, на снимке получим параллелограмм (примем этот факт без доказательства – именно так мы видим прямоугольники, а человеческий глаз и фотокамера устроены по одному и тому же принципу). При этом, центр прямоугольника проектируется в центр параллелограмма. Заметим, что эта точка является центром симметрии. Сумму всех векторов (x,y) сгруппируем по парам (симметричный с симметричным). Для каждой пары полусумма равна координатам центра. Отсюда получаем алгоритм нахождения центра. Его достоинствами являются малое число операций (порядка N) и устойчивость к погрешностям (несколько ошибочных пикселей дадут малый вклад в ответ, т.к. в знаменателе находится большое число N).

б) Как в любой камере, лучи света, перед тем как попасть на ПЗС-матрицу, проходят через объектив. Объектив может иметь различное устройство, но в целом, он действует как обычная собирающая линза. Предположим, что при съемке нашего поля камера нацелена и сфокусирована в точности на точку A – центр поля. Тогда лучи, испускаемые источником, расположенным в точке A будут собраны на расстоянии x за линзой, где

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{f}-\frac{1}{d}$$

(здесь f - фокальное расстояние линзы, а d – расстояние от линзы то точки A). Мы предположили, что камера сфокусирована на поле, т.е. ПЗС-матрица находится именно на расстоянии x за линзой. Пусть теперь точка B лежит на границе поля. Обозначим длину отрезка AB через l. Поскольку l много меньше, чем d, то можно считать, что лучи, испускаемые точкой B, собираются также на расстоянии x за линзой (т.е. на ПЗС-матрице – все поле «в фокусе»). Проследив за лучом, исходящим из B, и проходящим через центр линзы, получим два подобных треугольника. Таким образом, в первом приближении, размер изображения отрезка AB на снимке равен дроби

$$\frac{xl}{d}=\frac{fl}{d-f}\approx\frac{fl}{d}$$

Мы получили хорошо известный факт – если объект расположен далеко от нас, то его видимые размеры прямо пропорциональны его величине и обратно пропорциональны расстоянию до него. Так происходит с каждым линейным размером, а значит, площадь поля на снимке обратно пропорциональна d^2. Разница при вертикальной и косой съемке состоит только в изменении расстояния до поля. Если спутник находится на высоте h, то $d=h\cos\alpha$. Отсюда получаем итоговый ответ.

Критерии

«п.б.» - «первичный балл»

Задача 1а)

1. Верное решение 5 п.б.
2. Неверно раскрывает модули или ошибка при сборке случаев, но ответ похож на верный 3 п.б.
3. Неверно раскрывает модули и ответ не похож на верный 2 п.б.

Задача 1б)

1. Верное решение 5 п.б.
2. Если решение верное, но нет никакого объяснения, почему найденные оси являются осями симметрии, а других нет 3 п.б.
3. Если решение верное, но объясняет, почему найденные оси являются осями симметрии, а других нет, из графика 4 п.б.
4. Неверные решения:
   a. Найдена только одна правильная ось или кроме верных есть лишние 2 п.б.
   b. Ошибка в пункте а) из-за чего задача стала существенно проще (например, получился квадрат), но далее решение верное, но без объяснений 2 п.б.

c. Если ошибка в пункте а) из-за чего задача стала существенно проще, далее решение верное, причем есть объяснение, почему оси такие 3 п.б.

Задача 2а)

1. Задача решена 5 п.б.
2. Задача не решена 0 п.б.

Задача 2б)

1. Задача решена 10 п.б.
2. Все доказано, но ответ неверный из-за арифметической ошибки 8 п.б.
3. Есть пробел в доказательстве, но ход рассуждений и ответ верный 8 п.б.
4. Запутался в доказательствах и получил неверный ответ 5 п.б.
5. Есть разумные продвижения, но решение обрывается 3 п.б.

Задача 3

1. Задача решена 10 п.б.
2. Приведена только верная буквенная формула, но явно выписаны все ее операнды в правильных размерностях 10 п.б.
3. Приведена верная буквенная формула, явно выписаны все ее операнды в правильных размерностях, а при подстановке арифметическая ошибка (но ответ разумный по порядку) 10 п.б.
4. Есть верная буквенная формула, нет или неверный численный ответ, а один или несколько операндов указаны в неверных размерностях 8 п.б.
5. Приведена верная буквенная формула, явно выписаны все ее операнды в правильных размерностях, а при подстановке арифметическая ошибка, причем ответ неразумен по порядку 8 п.б.
6. Разумные рассуждения, верные законы, но буквенная формула неверная (спутал радиусы, ошибся) 6 п.б.
7. Есть продвижения, но ошибается по сути (считает ускорение на орбите равным ускорению на поверхности планеты или ошибка в формулах) 4 п.б.
8. Есть разумные продвижения, но далее решение обрывается или совсем ошибочно 3 п.б.

Задача 4

1. Верное решение 20 п.б.

Замечания к каждой программе прописываются и учитываются индивидуально.

Задача 5

1. Задача решена 15 п.б.
2. Если решение верное, но есть огрехи, то из 15 п.б. вычитаем (возможны суммы пунктов a, одного из b-c-d, одного из e-f-g-h, одного из i-j)
   a. Не рассмотрен случай, когда между стартом и финишем прошло несколько синодических периодов 1 п.б.
   b. Перешел к относительной системе координат, говорит, что будет некоторое омега, но не упоминает про два случая (вращение в одну или в разные стороны) 1 п.б.
   c. Перешел к относительной системе координат и явно пишет, что омега есть разность омега1 и омега 2 или сумма (явно рассматривает вращение только в одну сторону) 2 п.б.
   d. Не переходит к относительной системе координат, а честно решает, взяв омега равной разности омега1 и омега 2 или вообще не упоминает о скоростях 3 п.б.

e. Переходит к относительной системе координат, выписывает омега, но не объясняет, почему доля времени равна доле дуги 1 п.б.
f. Переходит к относительной системе координат, но не выписывает омега вообще, а сразу без объяснения говорит, что доля времени равна доле дуги 2 п.б.
g. Не переходит к относительной системе координат, выписывает скорости, но не объясняет, почему доля дуги равна доле времени 3 п.б.
h. Не переходит к относительной системе координат, не выписывает скорости, не объясняет почему доля дуги равна доле времени 4 п.б.
i. Геометрические формулы верные, есть верная итоговая формула, но ошибка при подсчете – не наказывается 0 п.б.
j. Геометрические формулы верные, но ошибка в итоговой формуле (забыл двойку, нашел дополнительный угол и т.п.) 2 п.б.
k. Ошибка в геометрии или физических формулах, из-за чего формульный ответ неверен 4 п.б.

3. Есть разумные продвижения, но решение обрывается 3-5 п.б.

Задача 6а)

1. Задача решена (доказательство того, что на снимке получится параллелограмм, не требуется – его может не быть или оно может быть неверным) 15 п.б.
2. Если есть верный (почти верный) метод или алгоритм решения, но есть огрехи, то из 15 п.б. вычитаем
   a. Используется «алгоритм поиска крайних точек» - неустойчив к погрешностям данных 3 п.б.
   b. Используется алгоритм сортировки и затем выбора медианы – неоптимальный по количеству операций 3 п.б.
   c. В алгоритме «крайних точек» нет обсуждения выбора крайней точки при нескольких одинаковых значениях 3 п.б.
   d. Полуразность вместо полусуммы в алгоритме «крайних точек» 3 п.б.
   e. Нет алгоритма в виде кода или хотя бы четкой последовательности действий с переменными – только описательный метод 1-5 п.б.
   (в зависимости от подробности описания)
   f. Применяется метод среднего арифметического, но нет обоснования 3 п.б.
3. Есть понимание верного ответа на уровне описания 4 п.б.

Задача 6б)

1. Задача решена 15 п.б.
2. Есть разумные продвижения (косинус альфа появляется, говорится о проекции и т.п.) 3-4 п.б.

Первичные баллы переводились в технические (100-бальная шкала) путем округдения до ближайшего полуцелого числа:

(98, 100] первичных баллов = 100 технических баллов

(93, 97] первичных баллов = 95 технических баллов

(88, 92] первичных баллов = 90 технических баллов

(83, 87] первичных баллов = 85 технических баллов и так далее.