

Вариант 1

1. Юный исследователь космоса наблюдает на экране компьютера подвижную модель двух небесных тел, равномернодвигающихся по одной и той же окружности. Если тела двигаются в разные стороны, то встречаются каждые две минуты. Если же они двигаются в одну сторону, то одно тело догоняет другое каждые 10 минут. На сколько секунд быстрее проходит всю окружность одно из тел?

Решение. Пусть v_1 м/мин – скорость первого тела, v_2 м/мин – скорость второго тела. При движении в разные стороны они сближаются со скоростью $v_1 + v_2$, а при движении в одну сторону – сближаются со скоростью $v_1 - v_2$. Пусть L – длина окружности. Тогда $\frac{L}{v_1+v_2} = 2$ мин – время между встречами при движении в разных направлениях, а $\frac{L}{v_1-v_2} = 10$ минут – время, за которое первое тело догоняет второе.

Получим систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{L}{v_1+v_2} = 2 \\ \frac{L}{v_1-v_2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 + 2v_2 = L \\ 10v_1 - 10v_2 = L \end{cases} \quad \text{Отсюда}$$

$$v_1 = 0,3L, \quad v_2 = 0,2L.$$

Тогда первое тело проходит окружность за $\frac{L}{0,3L} = \frac{10}{3}$ минут, второе тело – за $\frac{L}{0,2L} = 5$ минут.

Разница составляет $300 - 200 = 100$ секунд.

Ответ: 100 секунд.

Ответы к другим вариантам: 360, 270, 450.

Критерии проверки:

+ (10 баллов) – задача решена верно, решение полное;

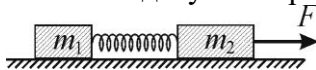
+ (8 баллов) – при верной логике решения допущена арифметическая ошибка (например, при переводе минут в секунды);

± (6 баллов) – верно найдено соотношение между скоростями, дальше ошибки или решение не доведено до конца;

∓ (3 балла) – верно составлена система, дальше ошибки или не доведено до конца или задача решена в частном случае.

– (0 баллов) – все остальное.

2. Исследуя возможности тягача с транспортно-перегрузочным агрегатом для ракет, юный исследователь космоса решает следующую модельную задачу: «На горизонтальном столе покоятся два бруска массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, связанные между собой недеформированной горизонтальной пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м. Коэффициент трения между столом и брусками $\mu = 0,1$. Какую минимальную работу A нужно совершить, прикладывая некоторую силу к правому бруску, чтобы сдвинуть с места левый брусок?» Помогите исследователю решить задачу. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с².



Решение. Пусть брусок массы m_2 переместили вдоль поверхности стола на расстояние x . Для того, чтобы мог сдвинуться брусок массы m_1 , необходимо выполнение условия $kx = \mu m_1 g$, откуда $x = \frac{\mu m_1 g}{k}$. Искомая работа будет минимальной, если кинетической энергии оба бруска не приобретают. В этом случае искомая работа затрачивается только на преодоление трения и сообщение энергии растянутой пружины: $A = \mu m_2 g x + \frac{kx^2}{2}$. Из записанных соотношений следует, что

$$\text{величина минимальной работы равна } A = \frac{\mu^2 g^2 m_1}{k} \left(m_2 + \frac{m_1}{2} \right).$$

Ответ: $A = 0,025$ Дж.

Ответы к другим вариантам: 0,022; 0,027; 0,084.

Критерии проверки:

+ (10 баллов) – задача решена верно, решение полное;

± (6 баллов) – верно найдено смещение, найдена работа, но в формуле для работы «потеряна» $\frac{1}{2}$ **или** формулы верные, но есть арифметическая ошибка;

∓ (3 балла) – верно найдено смещение правого бруска, дальше ошибки или решение не доведено до конца;

– (0 баллов) – все остальное.

3. Преподаватели информатики и теории чисел рассказали юному исследователю космоса, что обыкновенная дробь с натуральными числителем и знаменателем называется *правильной*, если числитель меньше знаменателя. Они сказали, что такая дробь называется *несократимой*, если нет равной ей дроби с меньшими числителем и знаменателем и поставили задачу:

«Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по заданному натуральному числу N находит наибольшую правильную несократимую дробь, у которой сумма числителя и знаменателя равны N . Программа должна ввести с клавиатуры число N и вывести на экран два числа: числитель и знаменатель искомой дроби.»

Пример работы программы:

Введите N

10

Ответ

3 7

Критерии проверки: тестируется программа.

4. На занятиях кружка юный исследователь космоса изучает сплав двух металлов массой 1 кг. При этом плотность одного в 3 раза, а другого в 8 раз больше плотности воды. При погружении в воду сплав оказывает давление на дно сосуда, равное $P = 7,5$ Н. Найдите массовую долю первого металла в сплаве.

Решение. Обозначим ρ – плотность воды, тогда плотности металлов равны соответственно 3ρ и 8ρ . Пусть масса первого металла равна x , тогда второго: $1 - x$.

Значит, объемы металлов равны $V_1 = \frac{x}{3\rho}$ и $V_2 = \frac{1-x}{8\rho}$. Из закона Архимеда следует:

$(V_1 + V_2)\rho g = mg - P = \Delta P = 2,5$, где $m = 1$ кг – масса сплава. Получаем уравнение: $\left(\frac{x}{3} + \frac{1-x}{8}\right) \cdot 10 = 2,5$, откуда $x = 0,6$.

Ответ: 0,6.

Ответы к другим вариантам: 0,64; 0,55; 0,75.

Критерии проверки:

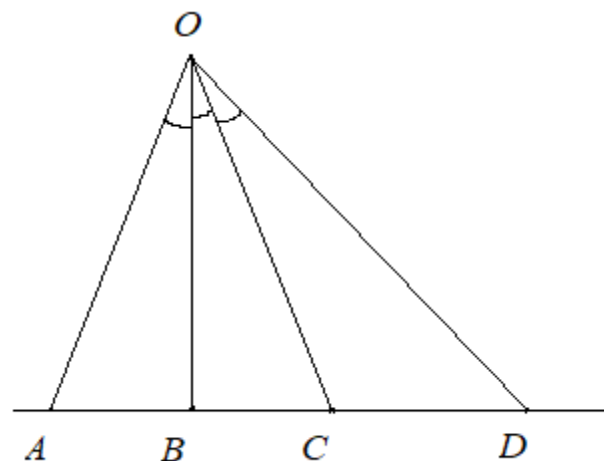
+ (10 баллов) – задача решена верно, решение полное;

+ (8 баллов) – при верной логике решения ответ неверный вследствие арифметической ошибки;

± (6 баллов) – верно составлено уравнение, дальше ошибки или решение не закончено;

– (0 баллов) – все остальное.

5. Расположенный в точке O радар осуществляет слежение за объектом, движущимся по прямой. Фиксируя положение объекта, радар вычисляет расстояние до него и поворачивается на фиксированный угол α для следующего замера. Всего произведено 4 замера в точках A, B, C, D , расположенных в указанном порядке. Известно, что точка B находится на минимальном (среди всех точек прямой) расстоянии от радара, $OB = 2$, $OC = \sqrt{5}$. Найдите расстояние AD .



Решение. OB – биссектриса и высота в треугольнике AOC , следовательно, этот треугольник равнобедренный. Значит, $AO = OC = \sqrt{5}$, $AB = BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = 1$. Обозначим $CD = x$. OC – биссектриса в треугольнике BOD , значит, по свойству биссектрисы: $\frac{BC}{CD} = \frac{OB}{OD}$, откуда $OD = 2x$. По теореме Пифагора для треугольника BOD : $4 + (x + 1)^2 = (2x)^2$. Отсюда $3x^2 - 2x - 5 = 0$, $x_1 = -1, x_2 = 5/3$. Отрицательный корень не подходит, следовательно, $AD = 1 + 1 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$.

Ответ: $11/3$.

Ответы к другим вариантам: $46/5$; $47/15$; $13/4$.

Критерии проверки:

+ (10 баллов) – задача решена верно, решение полное;

+ (8 баллов) – при верной логике решения ответ неверный вследствие арифметической ошибки;

\pm (6 баллов) верно найдены все элементы равных прямоугольных треугольников и есть свойство биссектрисы, но ответ не получен;

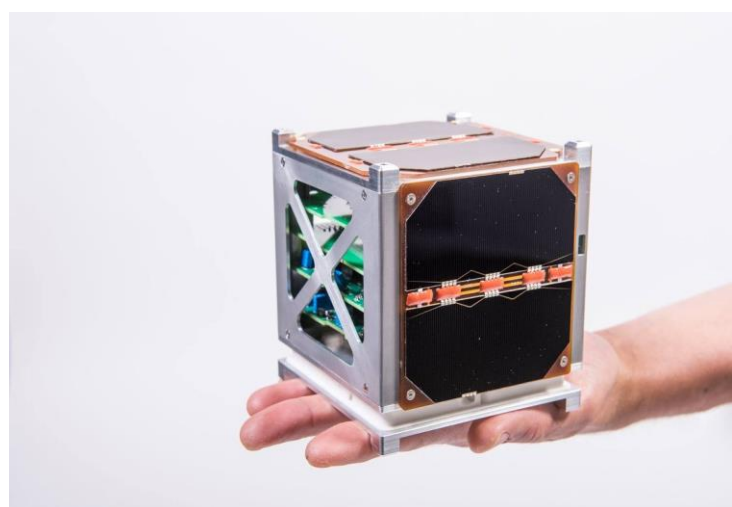
\mp (3 балла) – верно найдены все элементы равных прямоугольных треугольников, дальней ошибки или решение не закончено;

– (0 баллов) – все остальное.

6. Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.

а) Опишите, какой будет траектория движения спутника относительно центра Земли, если космонавт просто выпустит спутник из рук за пределами станции, не придавая никакой дополнительной скорости. Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС?

б) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит спутник по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции)? Не является ли такой запуск спутника



опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)? Орбиту МКС считайте круговой.

Решение.

а) И космонавт, и спутник в его руках уже имеют скорость относительно центра Земли, равную скорости станции, и, как и вся станция, движутся по круговой орбите. Поскольку космонавт не придает спутнику никакой дополнительной скорости, то спутник, предоставленный сам себе, продолжит движение по той же самой орбите. Вернувшись на станцию, космонавт еще долго будет наблюдать «висящий» за бортом спутник. Такая ситуация является, естественно, нежелательной, поскольку различные дополнительные факторы (в первую очередь, непостоянство поля тяготения Земли) могут вызвать малое отклонение траектории движения станции и привести к столкновению.

б) Ясно, что сил космонавта не хватит, чтобы увеличить скорость спутника с первой космической до второй. Значит, спутник, как и станция, будет двигаться по замкнутой эллиптической орбите вокруг Земли. При этом поскольку космонавт придал спутнику дополнительную скорость, направленную по касательной к окружности (орбита станции), т. е. по вектору, направленному вонне окружности, то спутник в первые секунды полета окажется на более высокой орбите. Кроме того, мы уже знаем, что эта эллиптическая орбита касается круговой орбиты МКС в точке запуска спутника. Теперь заметим, что касание эллипса и окружности с центром в фокусе этого эллипса может осуществляться только в двух точках – перигее и апогее эллиптической орбиты. Действительно, если тело движется по эллиптической орбите за пределами окружности, а затем касается этой окружности, то после касания тело вновь окажется вне окружности (эллипс – выпуклая кривая). Значит, это тело вначале приближалось, а затем отдалялось от центра окружности – фокуса эллипса, т. е. точка касания была перигеем орбиты. Итак, единственной общей точкой орбиты спутника и орбиты МКС будет та самая точка, в которой космонавт осуществил запуск, т.е. спутник и МКС вновь сблизятся после одного витка. Однако опасность столкновения со спутником, станции не грозит, т. к. в точку касания орбит тела придут в разное время. Скорость броска руки человека (4-6 м/с) очень мала по сравнению со скоростью станции (примерно 8 км/с), а значит, эллиптическая орбита спутника будет близка к круговой. Считая орбиту спутника близкой к круговой, можем записать равенство $R\omega^2 = g$, где R – радиус орбиты, ω – угловая скорость, а g – ускорение свободного падения. Знаем, что с удалением от Земли сила тяжести уменьшается, т. е. уменьшается величина g . Радиус при этом увеличивается, а значит, угловая скорость уменьшается. Поскольку мы уже знаем, что орбита спутника в целом выше орбиты станции, то угловая скорость спутника меньше угловой скорости станции. Тогда период обращения спутника $T = \frac{2\pi}{\omega}$ по орбите больше периода обращения станции. Итак, после одного витка спутник придет в точку соприкосновения орбит позже станции и столкновение не произойдет. При следующих витках спутник продолжит отставать от станции и столкновение теоретически возможно только после нескольких витков, когда спутник отстанет от станции «на круг». Однако за это время различные дополнительные факторы (в первую очередь прецессия орбиты) вызовут отклонение траектории станции и вероятность столкновения пренебрежимо мала.

Критерии проверки (по баллам, максимум = 10 баллов):

а) 1 балл – понимает, что спутник сохраняет орбиту МКС;

1 балл – обосновывает предыдущее утверждение;

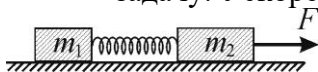
1 балл – понимает потенциальную опасность при маневрах МКС.

б) 1 балл – понимает, что орбита – эллипс;

- 1 балл – понимает, что орбита спутника будет выше орбиты МКС;
- 1 балл – понимает, что есть одна точка касания орбит;
- 1 балл – понимает, что время обращения спутника больше;
- 1 балл – делает вывод о безопасности;
- 1 балл – обосновывает первые три утверждения;
- 1 балл – представлено грамотное и логичное изложение своих мыслей (по сумме пунктов).

Вариант 2

1. Юный исследователь космоса наблюдает на экране компьютера подвижную модель двух небесных тел, равномерно двигающихся по одной и той же окружности. Если тела двигаются в разные стороны, то встречаются каждые четыре минуты. Если же они двигаются в одну сторону, то одно тело догоняет другое каждые 12 минут. На сколько секунд быстрее проходит всю окружность одно из тел?
2. Исследуя возможности тягача с транспортно-перегрузочным агрегатом для ракет, юный исследователь космоса решает следующую модельную задачу: «На горизонтальном столе покоятся два бруска массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 1,5$ кг, связанные между собой недеформированной горизонтальной пружиной жесткостью $k = 110$ Н/м. Коэффициент трения между столом и брусками $\mu = 0,11$. Какую минимальную работу A нужно совершить, прикладывая некоторую силу к правому бруску, чтобы сдвинуть с места левый брусок?» Помогите исследователю решить задачу. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с².

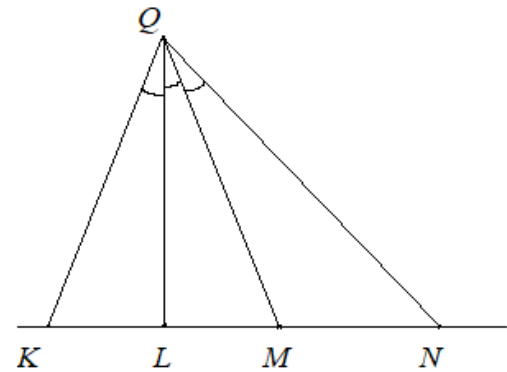


3. Преподаватели информатики и теории чисел рассказали юному исследователю космоса, что обыкновенная дробь с натуральными числителем и знаменателем называется *правильной*, если числитель меньше знаменателя. Они сказали, что такая дробь называется *несократимой*, если нет равной ей дроби с меньшими числителем и знаменателем и поставили задачу:

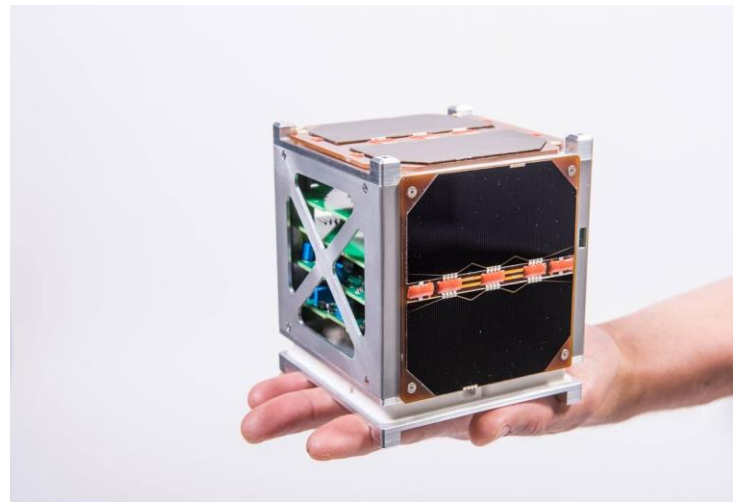
«Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по заданному натуральному числу N находит наибольшую правильную несократимую дробь, у которой сумма числителя и знаменателя равны N . Программа должна ввести с клавиатуры число N и вывести на экран два числа: числитель и знаменатель искомой дроби.»

Пример работы программы:
 Введите N
 10
 Ответ
 3 7
4. На занятиях кружка юный исследователь космоса изучает сплав двух металлов массой 1 кг. При этом плотность одного в 4 раза, а другого в 9 раз больше плотности воды. При погружении в воду сплав оказывает давление на дно сосуда, равное $P = 8$ Н. Найдите массовую долю первого металла в сплаве.

5. Расположенный в точке Q радар осуществляет слежение за объектом, движущимся по прямой. Фиксируя положение объекта, радар вычисляет расстояние до него и поворачивается на фиксированный угол α для следующего замера. Всего произведено 4 замера в точках K, L, M, N , расположенных в указанном порядке. Известно, что точка L находится на минимальном (среди всех точек прямой) расстоянии от радара, $QK = \sqrt{13}$, $LM = 2$. Найдите расстояние KN .



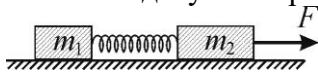
6. Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.
- а) Опишите, какой будет траектория движения спутника относительно центра Земли, если космонавт просто выпустит спутник из рук за пределами станции, не придавая никакой дополнительной скорости. Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС?



- б) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит спутник по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции)? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)? Орбиту МКС считайте круговой.

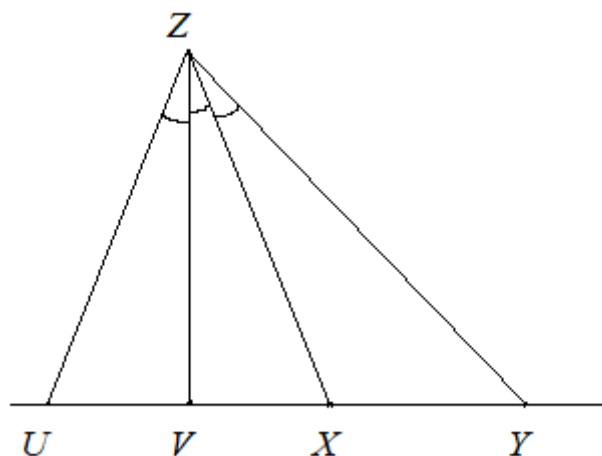
Вариант 3

1. Юный исследователь космоса наблюдает на экране компьютера подвижную модель двух небесных тел, равномерно двигающихся по одной и той же окружности. Если тела двигаются в разные стороны, то встречаются каждые три минуты. Если же они двигаются в одну сторону, то одно тело догоняет другое каждые 9 минут. На сколько секунд быстрее проходит всю окружность одно из тел?
2. Исследуя возможности тягача с транспортно-перегрузочным агрегатом для ракет, юный исследователь космоса решает следующую модельную задачу: «На горизонтальном столе покоятся два бруска массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2,5$ кг, связанные между собой недеформированной горизонтальной пружиной жесткостью $k = 90$ Н/м. Коэффициент трения между столом и брусками $\mu = 0,09$. Какую минимальную работу A нужно совершить, прикладывая некоторую силу к правому бруску, чтобы сдвинуть с места левый брусок?» Помогите исследователю решить задачу. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с².



3. Преподаватели информатики и теории чисел рассказали юному исследователю космоса, что обыкновенная дробь с натуральными числителем и знаменателем называется *правильной*, если числитель меньше знаменателя. Они сказали, что такая дробь называется *несократимой*, если нет равной ей дроби с меньшими числителем и знаменателем и поставили задачу:
«Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по заданному натуральному числу N находит наибольшую правильную несократимую дробь, у которой сумма числителя и знаменателя равны N . Программа должна ввести с клавиатуры число N и вывести на экран два числа: числитель и знаменатель искомой дроби.»
Пример работы программы:
Введите N
10
Ответ
3 7
4. На занятиях кружка юный исследователь космоса изучает сплав двух металлов массой 1 кг. При этом плотность одного в 2 раза, а другого в 6 раз больше плотности воды. При погружении в воду сплав оказывает давление на дно сосуда, равное $P = 6,5$ Н. Найдите массовую долю первого металла в сплаве.

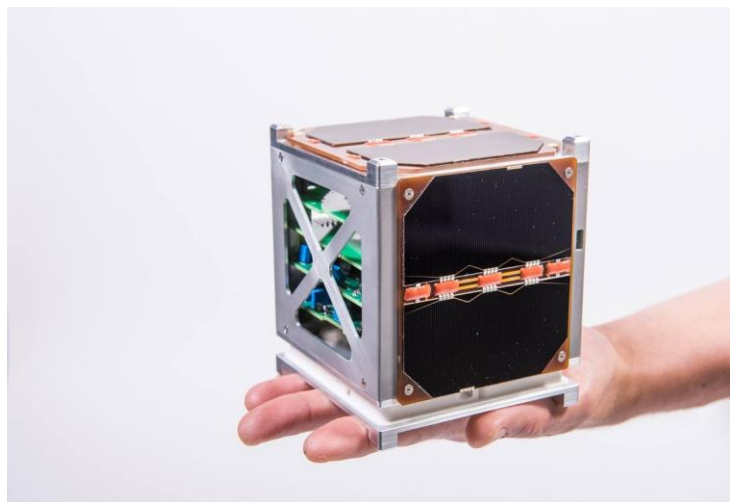
5. Расположенный в точке Z радар осуществляет слежение за объектом, движущимся по прямой. Фиксируя положение объекта, радар вычисляет расстояние до него и поворачивается на фиксированный угол α для следующего замера. Всего произведено 4 замера в точках U, V, X, Y , расположенных в указанном порядке. Известно, что точка V находится на минимальном (среди всех точек прямой) расстоянии от радара, $UV = 1$, $ZX = \sqrt{17}$. Найдите расстояние UY .



6. Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.

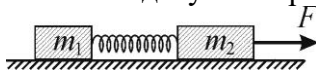
а) Опишите, какой будет траектория движения спутника относительно центра Земли, если космонавт просто выпустит спутник из рук за пределами станции, не придавая никакой дополнительной скорости. Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС?

б) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит спутник по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции)? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)? Орбиту МКС считайте круговой.



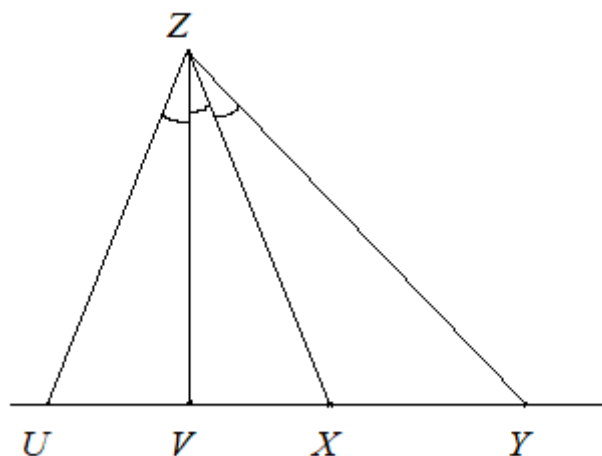
Вариант 4

1. Юный исследователь космоса наблюдает на экране компьютера подвижную модель двух небесных тел, равномерно двигающихся по одной и той же окружности. Если тела двигаются в разные стороны, то встречаются каждые пять минут. Если же они двигаются в одну сторону, то одно тело догоняет другое каждые 15 минут. На сколько секунд быстрее проходит всю окружность одно из тел?
2. Исследуя возможности тягача с транспортно-перегрузочным агрегатом для ракет, юный исследователь космоса решает следующую модельную задачу: «На горизонтальном столе покоятся два бруска массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 2,5$ кг, связанные между собой недеформированной горизонтальной пружиной жесткостью $k = 120$ Н/м. Коэффициент трения между столом и брусками $\mu = 0,12$. Какую минимальную работу A нужно совершить, прикладывая некоторую силу к правому бруску, чтобы сдвинуть с места левый брусок?» Помогите исследователю решить задачу. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с².



3. Преподаватели информатики и теории чисел рассказали юному исследователю космоса, что обыкновенная дробь с натуральными числителем и знаменателем называется *правильной*, если числитель меньше знаменателя. Они сказали, что такая дробь называется *несократимой*, если нет равной ей дроби с меньшими числителем и знаменателем и поставили задачу:
«Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая по заданному натуральному числу N находит наибольшую правильную несократимую дробь, у которой сумма числителя и знаменателя равны N . Программа должна ввести с клавиатуры число N и вывести на экран два числа: числитель и знаменатель искомой дроби.»
Пример работы программы:
Введите N
10
Ответ
3 7
4. На занятиях кружка юный исследователь космоса изучает сплав двух металлов массой 1 кг. При этом плотность одного в 2 раза, а другого в 6 раз больше плотности воды. При погружении в воду сплав оказывает давление на дно сосуда, равное $P = 6,5$ Н. Найдите массовую долю первого металла в сплаве.

5. Расположенный в точке Z радар осуществляет слежение за объектом, движущимся по прямой. Фиксируя положение объекта, радар вычисляет расстояние до него и поворачивается на фиксированный угол α для следующего замера. Всего произведено 4 замера в точках U, V, X, Y , расположенных в указанном порядке. Известно, что точка V находится на минимальном (среди всех точек прямой) расстоянии от радара, $UV = 1$, $ZX = \sqrt{17}$. Найдите расстояние UY .



6. Космонавт выходит из шлюзовой камеры МКС (международная космическая станция), чтобы запустить малый спутник типа «кубсат» с рук. Выход из шлюзовой камеры «смотрит» на Землю.

а) Опишите, какой будет траектория движения спутника относительно центра Земли, если космонавт просто выпустит спутник из рук за пределами станции, не придавая никакой дополнительной скорости. Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС?

б) Какой будет траектория спутника относительно центра Земли, если космонавт бросит спутник по направлению движения станции (для определенности: строго в направлении вектора скорости станции)? Не является ли такой запуск спутника опасным для МКС (естественно, считаем, что в направлении броска нет конструктивных элементов станции)? Орбиту МКС считайте круговой.

