

Решения. Классы 7-9.

Задача 1.

Чтобы увеличить температуру воздуха на Δt , ему нужно передать количество теплоты, равное: $Q = cm\Delta t$, где $m = \rho V$ – масса воздуха в цилиндре. По определению КПД горелки

$$Q = \eta qM. \text{ Следовательно, } M = \frac{c\rho V\Delta t}{\mu q} = \frac{1,01 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 1500 \cdot 10^{-6} \cdot 20}{0,08 \cdot 27 \cdot 10^6} \approx 16833 \cdot 10^{-9} \text{ кг} = 0,17 \text{ г}$$

Ответ: 0,17г.

Задача 2.

Пусть начальный объем спирта равен V . Тогда его итоговый объем равен $0,84 \cdot 0,85 \cdot V = 0,714V$. Итоговый объем смеси равен $1,05V$, так что концентрация спирта равна $\frac{0,714V}{1,05V} = 0,68$.

Ответ: 68%.

Задача 3.

Введем систему координат, направив ось вертикально вверх и выбрав в качестве точки отсчета место старта ракеты. По условию, двигатель работает $t_0 = 4$ секунды и обеспечивает ускорение $a = 1,3g$. Во время работы двигателя ракета движется с ускорением $a - g = 0,3g$ при нулевой начальной скорости, то есть в момент остановки двигателя она имеет скорость $v_0 = 0,3gt_0$ и координату $s_0 = \frac{0,3g(t_0)^2}{2} = 23,52$. Затем ракета начинает двигаться с ускорением $(-g)$ и достигает наивысшей точки в тот момент, когда ее скорость становится нулевой: $v_0 - t_1g = 0 \Leftrightarrow t_1 = v_0/g = 0,3t_0$. За это время ракета пройдет расстояние

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{g(t_1)^2}{2} = (0,3t_0)^2 g - \frac{(0,3t_0)^2 g}{2} = \frac{(0,3t_0)^2 g}{2} = 7,056$$

Итого, $s_0 + s_1 = 30,576 \approx 31\text{м}$.

Ответ: 31м.

Задача 4.

Ниже приведена программа на языке Python

```
N=int(input())
```

```
M=1
```

```
# Находим N!
```

```
for i in range(1,N+1):
```

```
    M*=i
```

```
# Ищем номер цифры, которая не равна 0 и делится на 3. Начинаем с крайней правой
```

```
# цифры – ее номер 1
```

```
res=1
```

```

flag=0
while M>=1:
    a=M%10
    # Теперь a равно последней цифре. Если эта цифра не ноль и делится на 3, выходим
    # из цикла
    if (a==3) or (a==6) or (a==9):
        flag=1
        break
    # В противном случае отбрасываем последнюю цифру и повторяем цикл
    M=M//10
    res+=1
# Теперь res хранит либо номер искомой цифры (если цикл был прерван),
# либо число цифр числа N!, увеличенное на 1.
# В этом случае надо поменять его значение на 0
if (flag==0):
    res=0
print(res)

```

Задача 5.

Первый снимок – квадрат со стороной x . Тогда $\rho_1 = \frac{4x}{\sqrt{x^2}} = 4$.

Второй снимок – прямоугольник со сторонами x и y . Тогда $\rho_2 = \frac{2(x+y)}{\sqrt{xy}} = 4,45$. Третий

снимок – прямоугольник со сторонами x и z . Тогда $\rho_3 = \frac{2(x+z)}{\sqrt{xz}} = 5$. Аналогично, для

четвертого снимка получаем $\rho_4 = \frac{2(y+z)}{\sqrt{yz}}$. Остается решить систему уравнений. Для

первого уравнения имеем $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2,225$. Обозначим дробь $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$ и получим квадратное

уравнение $t^2 - 2,225t + 1 = 0$, откуда $t = 1,6$ или $t = 0,625$. По условию, $y > x$, так что

выбираем второй корень. Аналогично, из второго уравнения получаем $t^2 - 2,5t + 1 = 0$,

откуда $t = 0,5$. Итак, $y = 2,56x$, $z = 4x$. Подставляем эти равенства и получаем $\rho_4 =$

$$\frac{2(2,56x+4x)}{\sqrt{2,56x \cdot 4x}} = 4,1.$$

Ответ: 4 и 4,1.

Задача 6.

А) Пусть нам необходимо измерить площадь некоторого объекта с точностью ε . Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h . Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N , число квадратов

первого вида N_1 , второго вида N_2 и третьего вида N_3 . Составим две дроби $k_1 = \frac{N_1}{N}$ и $k_2 = \frac{N-N_2}{N}$. Умножая эти величины на общую площадь снимка S , получим значение *внутренней* и *внешней меры* объекта $S_1 = k_1 S$ и $S_2 = k_2 S$. Понятно, что истинное значение площади находится на промежутке $[S_1, S_2]$. Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h . В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. В тот момент, когда величина $S_2 - S_1$ станет меньше заданной нам точности ε , процесс можно остановить, взяв в качестве ответа величину $\frac{S_1+S_2}{2}$.

Б) Пусть нам необходимо измерить «величину границы» некоторого объекта. Разобьем снимок сеткой из квадратов с длиной стороны h . Будем считать, что для каждого квадрата сетки мы умеем определять (вручную или автоматически) принадлежность этого квадрата к одной из трех категорий: «квадрат целиком входит в измеряемый объект», «квадрат целиком входит в дополнение к измеряемому объекту» и «квадрат содержит и точки объекта, и точки его дополнения». Обозначим общее число квадратов N , число квадратов первого вида N_1 , второго вида N_2 и третьего вида N_3 . Будем считать, что центры квадратов третьего вида лежат на нашей кривой, а длина кривой приблизительно равна длине ломаной, соединяющей эти точки. Тогда эту длину можно приблизительно оценить выражением $l(h) = N_3 h$ (мы считаем, что кривая непрерывным образом соединяет центры соседних квадратов). Теперь начнем увеличивать число квадратов, уменьшая тем самым длину стороны h . В какой-то момент точность определения, к какой категории относится данный квадрат, станет неудовлетворительной. Тогда мы перейдем к снимку с большим разрешением и продолжим процесс. Каков бы ни был измеряемый объект, существует максимальная разумная точность детализации его границы. Например, на береговых линиях отсутствуют детали меньше 1 см, при измерении периметра вырубki нет смысла выбирать детализацию больше, чем среднее расстояние между деревьями в лесу и т.д. Таким образом, возможны два случая. Если нам доступны снимки с требуемой детализацией, то мы просто находим величину $l(h_0)$ для данного h_0 и берем ее в качестве длины границы объекта. Если снимки с требуемой детализацией не доступны, то необходимо определить характер функции $l(h)$ и затем продолжить ее за область определения (экстраполировать) и определить ее предполагаемое значение в точке h_0 . Для гладких кривых функция $l(h)$ имеет предел при $h \rightarrow 0$. Для реальных кривых величина $l(h)$ при уменьшении h возрастает к бесконечности как $C \cdot h^{-D}$. Таким образом, вначале необходимо экспериментально или с помощью уже имеющихся таблиц определить величину D , а затем и величину C как предел функции $l(h) \cdot h^D$. Параметр D интересен и тогда, когда величина $l(h_0)$ может быть найдена непосредственно. Он показывает «изрезанность», «изгибистость» границы объекта.

Критерии

Задачи 6.а) и 6.б) оценивались независимо.

За каждую из задач выставлялись оценки “+” – решена верно, “+.” – есть несущественные ошибки (приравнивается к “+”), “+/-” – решение, в целом, верное, “-/+” – есть верная идея решения.

Критерии общей оценки:

Нет чистых плюсов, нет плюс/минусов=0.

Нет чистых плюсов, есть ровно один плюс/минус и больше ничего=0.

Нет чистых плюсов, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=30.

Ровно один чистый плюс, нет плюс/минусов=40.

Ровно один чистый плюс, ровно один плюс/минус и больше ничего=45.

Ровно один чистый плюс, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=50.

Ровно два чистых плюса, нет плюс/минусов=50.

Ровно два чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего=55.

Ровно два чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=60.

Ровно три чистых плюса, нет плюс/минусов=60.

Ровно три чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего =65.

Ровно три чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=70.

Ровно четыре чистых плюса, нет плюс/минусов=70.

Ровно четыре чистых плюса, ровно один плюс/минус и больше ничего =75.

Ровно четыре чистых плюса, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=80.

Ровно пять чистых плюсов, нет плюс/минусов=80.

Ровно пять чистых плюсов, ровно один плюс/минус и больше ничего =85.

Ровно пять чистых плюсов, есть плюс/минус и еще плюс/минус или минус/плюс=90.

Ровно шесть чистых плюсов, нет плюс/минусов=90.

Ровно шесть чистых плюсов и есть один плюс/минус=95.

Ровно семь чистых плюсов =100.