Задания и решения второго тура отборочного этапа Олимпиады «Ломоносов» по Космонавтике 2017/2018
Разминка
Для всех классов 7-11

1) Сколько високосных лет может быть в течение одного десятилетия?
Варианты ответов. Правильный ответ б)

а) 1;
б) 3;
в) 5;
г) 7.

2) Что служит основной причиной смены сезонов на Земле, т. е. почему бывают зима и лето?
Варианты ответов. Правильный ответ а)

а) наклон оси вращения Земли к плоскости ее орбиты;
б) изменение расстояния от Солнца при движении по эллиптической орбите;
в) изменение прозрачности земной атмосферы, вызванное активностью Солнца;
г) изменение наклона оси вращения Земли к плоскости ее орбиты;

3) Сколько раз в году Солнце на экваторе бывает в зените?
Варианты ответов. Правильный ответ в)
а) ни разу;
б) 1 раз;
в) 2 раза;
г) ежедневно.

4) Почему в течение месяца происходит смена фаз Луны, т. е. наблюдается новолуние, затем первая четверть, полнолуние, последняя четверть и вновь новолуние?
Варианты ответов. Правильный ответ б)
а) по причине прохождения земной тени по лунному диску;
б) по причине изменения взаимного положения Земли, Луны и Солнца;
в) по причине регулярного поворота к Земле обратной (темной) стороны Луны;
г) по причине прохождения по земной поверхности лунной тени.

5) При какой фазе Луны вся ночь бывает лунная?
Варианты ответов. Правильный ответ в)

а) в новолуние;
б) в первую четверть;
в) в полнолуние;
г) в последнюю четверть.

6) Если бы орбита Луны лежала строго в плоскости эклиптики, то солнечные и лунные затмения происходили бы реже или чаще, чем сейчас?
Варианты ответов. Правильный ответ в)

а) вообще не происходили бы;
б) происходили бы реже;
в) происходили бы чаще;
г) происходили бы еженедельно.

7) Почему Сатурн в телескоп выглядит сплюснутым?
Варианты ответов. Правильный ответ а)

а) потому что он действительно сплюснут из-за быстрого вращения;
б) эту иллюзию создает наличие кольца вдоль экватора планеты;
в) по причине сферической аберрации объектива телескопа;
г) из-за эффекта дифференциальной рефракции в атмосфере Земли.

8) Где сегодня по продолжительности день равен ночи?
Варианты ответов. Правильный ответ г)

а) на Международной линии перемены дат;
б) везде;
в) нигде;
г) на экваторе.

9) В какой конфигурации наступает наилучшая вечерняя видимость Меркурия?
Варианты ответов. Правильный ответ а)

а) в период наибольшей восточной элонгации;
б) в период наибольшей западной элонгации;
в) в период верхнего соединения;
г) в период нижнего соединения.

10) Почему во время экспедиций на Луну по программе «Аполлон» (1969-1972 гг.) посадки астронавтов производились только на видимом полушарии Луны?
Варианты ответов. Правильный ответ в)

а) это полушарие представляет наибольший интерес для науки;
б) мощности ракеты не хватало для полета на обратную сторону Луны;
в) чтобы поддерживать радиосвязь с Землей;
г) чтобы с помощью телескопов с Земли могли контролировать работу астронавтов.

Задания и решения второго тура отборочного этапа

Олимпиады «Ломоносов» по Космонавтике 2017/2018

10-11 классы

ЗАДАЧА 1

В 1054 г. астрономы заметили вспышку звезды в созвездии Телец: это был взрыв сверхновой. Сейчас на этом месте виден остаток взрыва звезды – газовая Крабовидная туманность радиусом около 3 угловых минут. С какой средней скоростью расширялся этот газ за прошедшее тысячелетие? Расстояние до Крабовидной туманности принять равным 2000 пк. Скорость вычислить в километрах в секунду. Приведите подробное решение.

Решение: Диаметр туманности равен $d = r\alpha$, где $r = 2000\text{пк} = 6{,}18 \cdot 10^{16}$ км, $\alpha = 3' = \frac{\pi}{3600}$ рад. Тогда скорость равна $v = \frac{d}{T} = \frac{6{,}18 \cdot \pi \cdot 10^{16}}{963 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 3600} \frac{\text{км}}{\text{с}} \approx 1775$ км/с.

Ответ: около 1700 км/с.

ЗАДАЧА 2

Спутник вращается вокруг своей планеты по круговой орбите радиуса $R = 83500$км. Сколько полных оборотов сделает спутник вокруг своей планеты за 100 земных суток, если известно, что ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = 10{,}4$м/с^2? Считайте планету однородным шаром радиуса $r = 6300$ км.

Решение: Пусть m – масса спутника, M – масса планеты, v – скорость движения спутника по орбите, G – гравитационная постоянная. Согласно второму закону Ньютона и закону всемирного

[#] Параметр $V \in [15; 30]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

тяготения уравнение движения спутника имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$. Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = G\frac{M}{r^2}$, а период обращения спутника $T = \frac{2\pi R}{v}$, получаем что $T = \frac{2\pi}{r}\sqrt{\frac{R^3}{g}}$. Тогда количество полных оборотов составляет целую часть дроби $\frac{N\cdot 60\cdot 60\cdot 24}{T}$.

Ответ: целая часть числа $N \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \frac{r}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R^3}}$.

ЗАДАЧА 3

Космонавты Артем и Василий высадились на Марсе и установили контакт с марсианами.

Оказалось, все марсиане имеют по две ноги, но иногда любят стоять на одной ноге. Когда марсианин стоит на одной ноге, другую ногу не видно.

Во встречающей делегации марсиан некоторые стояли на одной ноге, а некоторые на двух. Артем пересчитал видимые ноги и получил число A.

При прощании Василий пересчитал видимые ноги заново (некоторые марсиане могли поменять позу) и получил число B.

Вернувшись на корабль, космонавты заинтересовались, сколько же марсиан их встречало. Вскоре они поняли, что однозначно определить это число можно не всегда. Теперь они хотят понять, какое минимальное и какое максимальное количество марсиан могло их встречать.

Требуется написать программу, которая по заданным числам a и b выведет минимальное и максимальное количество марсиан, встреченных космонавтами.

Входные данные содержат два целых числа a и b, разделенных ровно одним пробелом ($1 \le a \le 100$, $1 \le b \le 100$).

Выходные данные

Выведите два целых числа, разделенных пробелом — минимальное и максимальное число марсиан. Гарантируется, что хотя бы одно количество марсиан соответствует условию задачи.

Примеры

Входные данные

3 4

Выходные данные

2 3

Примечание к примеру тестов

В приведенном примере возможны следующие варианты:

* Всего было два марсианина. Когда Артем считал ноги, один стоял на двух ногах, а другой — на одной. Артем насчитал три ноги. Когда Василий считал ноги, оба марсианина стояли на двух ногах, Василий насчитал четыре ноги.

* Всего было три марсианина. Когда Артем считал ноги, все стояли на одной ноге, Артем насчитал три ноги. Когда Василий считал ноги, один марсианин стоял на двух ногах, а еще два — на одной. Василий насчитал четыре ноги.

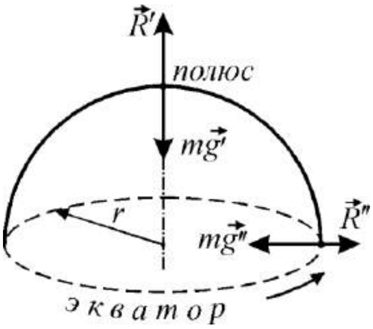
Решение: Участнику позволяется неограниченное количество раз загружать на сервер свой программный код и запускать автоматическое тестирование программы на случайных примерах.

Ответ: Программный код, загруженный на сервер олимпиады. Тестирование кода на работоспособность проводится автоматически на случайных примерах.

ЗАДАЧА 4

Вес тела на экваторе составляет $\eta\%$ от веса этого же тела на полюсе.[#] Найдите период вращения планеты вокруг своей оси T, если плотность вещества планеты $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$кг/м^3. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$м^3·кг$^{-1}$·с$^{-2}$. Планету считайте однородным шаром.

Решение: Силы, действующие на тело на полюсе и на экваторе, изображены на рисунке, где $\vec{g}'$ и $\vec{g}''$



– ускорения, вызываемы силой тяжести, $\vec{R}'$ и $\vec{R}''$ – силы реакции опор, на которых покоится тело. Поскольку планета представляет собой однородный шар, ускорения $\vec{g}'$ и $\vec{g}''$ различаются только направлением, а модули их совпадают: $g' = g'' = g$. Для тела, покоящегося на полюсе, сила тяжести и сила реакции опоры уравновешены и его вес по величине равен $P' = R' = mg$. Тело, находящееся на экваторе, движется по окружности, радиус которой равен радиусу планеты r. Следовательно, сила тяжести и сила реакции опоры не уравновешены и по второму закону Ньютона $m\omega^2 r = mg - R''$, где ω – угловая скорость вращения планеты. Поэтому вес тела на

[#] Параметр $\eta \in [94; 98]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

экваторе по величине равен $P'' = R'' = mg - m\omega^2 r$. По условию $mg - m\omega^2 r = \frac{\eta}{100\%} mg$, откуда $\omega^2 = \frac{g}{r}\left(1 - \frac{\eta}{100\%}\right)$. С другой стороны, $g = \frac{GM}{r^2}$, где $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ – масса планеты. Отсюда следует, что $\frac{g}{r} = \frac{4}{3}\pi G\rho$. Учитывая, что период вращения планеты $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получаем, что $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho(1-\eta/100\%)}}$.

Ответ: $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho(1-\eta/100\%)}}$.

ЗАДАЧА 5

Там говорилось о феноменах так называемой петли времени, то есть об искривлении вектора времени в пределах особенно мощных гравитационных полей; это явление может иногда привести даже к тому, что время повернет вспять и произойдет так называемое удвоение настоящего.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, утром во вторник увидел своего двойника из среды. Каждый из Ийонов хочет починить рули ракеты, но для этого нужно выйти в открытый космос, а скафандр только один. Тогда они решают разыграть скафандр в следующей игре. «Вторничный» Ийон ставит на шахматную доску короля. Далее «средовый» может сдвинуть короля либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку по диагонали вправо-вверх. Затем по тем же правилам ход делает «вторничный», затем снова «средовый» и т.д. (пропускать ходы нельзя). Выигрывает тот, кто поставит короля на поле h8. На какое поле надо поставить короля «вторничному» Ийону, чтобы гарантировано выиграть? Выберите правильные ответы.

Варианты ответов: a1, a2, a3, b2, b3, b4, c2, d2.

Решение: Разделим все клетки доски на «выигрышные» и «проигрышные». Пусть король находится на некоторой клетке и ход принадлежит игроку А. Клетка называется «выигрышной», если у игрока А есть стратегия, приводящая его к выигрышу вне зависимости от действий игрока Б. В противном случае клетка называется «проигрышной». Поле h8 является по определению выигрышным. Поля g8, g7 и h7 также являются «выигрышными», поскольку игрок А достигает победы за один ход. Тогда поле h6 является «проигрышным» - игрок А вынужден сделать ход на h7 (это единственный возможный ход), после чего игрок Б выигрывает. Аналогично, «проигрышным» является поле f8. Заметим, что далее поля можно классифицировать с учетом уже имеющейся информации: если с данного поля существует допустимый ход на «проигрышную» клетку, то поле является «выигрышным»; если же все допустимые ходы ведут на «выигрышные» клетки, то поле является «проигрышным». Результат «классификации» приведен на рисунке. Поскольку по условию «вторничный» ходит вторым, то ему надо

В	П	В	П	В	П	В	В
В	В	В	В	В	В	В	В
В	П	В	П	В	П	В	П
В	В	В	В	В	В	В	В
В	П	В	П	В	П	В	П
В	В	В	В	В	В	В	В
В	П	В	П	В	П	В	П
В	В	В	В	В	В	В	В

ставить короля на «проигрышные» поля.

Ответ: b2, b4, d2.

ЗАДАЧА 6

Искусственный спутник Земли, имеющий форму шара диаметра $D = \dots$м,[#] движется по круговой орбите со скоростью $v = 7{,}9$ км/с. Давление воздуха на высоте орбиты спутника $p = 0{,}9$ Па, температура $T = 270$К. Полагая, что скорость теплового движения молекул воздуха пренебрежимо мала по сравнению со скоростью спутника, найдите среднее число $\bar{z}$ столкновений молекул со спутником в единицу времени. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$Дж/К.

Решение: Оценим вначале скорость теплового движения молекул воздуха на высоте орбиты спутника. Для этого воспользуемся формулой для среднеквадратичной скорости молекул, а именно $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}}$, где $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная, $M = 0{,}029$ кг/моль – молярная масса воздуха. Расчет для $v_{\text{ср.кв.}}$ дает значение $v_{\text{ср.кв.}} \approx 470$ м/с, что действительно пренебрежимо мало по сравнению со скоростью спутника. Поскольку молекулы воздуха можно считать практически неподвижными, за время τ спутник столкнется с молекулами, находящимися в воображаемом цилиндре сечением $S = \pi D^2/4$ и длиной $v\tau$. Число таких молекул $\bar{z} = Sv\tau n$, где $n = \dfrac{p}{kT}$ – их концентрация.

Ответ: $\bar{z} = \pi D^2 v \dfrac{p}{4kT}$.

ЗАДАЧА 7

Когда я пришел в себя, каюта была набита людьми.
Передвигаться по ней было почти невозможно.
Как оказалось, все они были мною из разных дней, недель, месяцев,
а один, кажется, даже из будущего года...

Но в промежутке мы успели пройти сквозь отрицательный вихрь,
уменьшивший наше количество наполовину.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.

Путешествие седьмое: 147 вихрей

Каждый положительный вихрь удваивает количество Ийонов, а каждый отрицательный – уменьшает на 7 (при этом, если число Ийонов в ракете меньше восьми, то ракета становится пустой). Известно, что вихрей было не меньше одного и не больше 147. Сколько Ийонов может оказаться в ракете, если в начале путешествия Ийон был один? Отметьте верные ответы.

Варианты ответов: 2,3,4,5,6,7, 8,9,10, 45, 57, 103, 147.

Решение: Будем оперировать последовательностями, где номер члена – это номер вихря, а элемент – количество Ийонов в ракете после данного вихря. Приведем примеры

[#] Параметр $D \in [0{,}8; 1{,}2]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

1-2; 1-2-4; 1-2-4-8; 1-2-4-8-16-9; 1-2-4-8-16-32-64-57.

Теперь вычислим элементы последовательности по модулю 7

1-2-4-1-(2 или 1)-(4 или 2 или 2 или 1)-(1 или 4 или 4 или 2 или 4 или 2 или 2 или 1)-…

Таким образом, члены последовательности по модулю 7 могут быть равны только 1, 2 и 4.

Ответ: 2, 4, 8, 9, 57.

ЗАДАЧА 8

В звездном скоплении 251 звезда, причем каждая из них имеет блеск 16^m. Каков полный блеск этого скопления? Приведите подробное решение.

Решение: Пусть L_1 и L_2 – освещенности Земли одной звездой созвездия и всем созвездием соответственно. Тогда $L_2 = 251L_1$. Пусть m_1 и m_2 - соответствующие видимые звездные величины. Тогда

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \lg \frac{L_1}{L_2} \approx 6.$$

Ответ: $\cong 10^m$

ЗАДАЧА 9

Четверговый аккуратно
разбивал ножом яйца и выливал их содержимое в шипящий жир.
- О, прошу прощения, - запротестовал я, - свой рацион за среду ты уже
съел, ты не имеешь права второй раз за среду ужинать!

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, видит в среду своего двойника из четверга. «Средовый» Ийон Тихий хочет разделить с «четверговым» кусок сыра, имеющий форму правильной четырехугольной пирамиды $TABCD$. Ийон из среды отрезает «четверговому» одним плоским разрезом пирамиду $TAB'C'D'$ (точка B' лежит на ребре TB, точка C' - на ребре TC, точка D' - на ребре TD). Поскольку «четверговый» внимательно следит за процессом разрезания, то «средовый» Ийон выбирает точки B' и D' так, что $TB{:}\,B'B = TD{:}\,D'D = x$.[#] Найдите отношение объемов $V_{TAB'C'D'}{:}\,V_{TABCD}$.

Решение. Поскольку $TB{:}\,B'B = TD{:}\,D'D = x$, то $\frac{TB'}{TB} = \frac{TD'}{TD} = \frac{x-1}{x}$. Пусть TH – высота пирамиды, H' - точка пересечения TH и $B'D'$, тогда и $\frac{TH'}{TH} = \frac{x-1}{x}$. Обозначим $V_{TABCD} = V$. Поскольку $\frac{V_{TAB'D'}}{V_{TABD}} = \frac{TA\cdot TB'\cdot TD'}{TA\cdot TB\cdot TD}$, то $V_{TAB'D'} = \frac{V}{2}\frac{(x-1)^2}{x^2}$ (пирамида $TABCD$ – правильная, значит, объем пирамиды $TABD$ равен $\frac{V}{2}$). Найдем отношение $\frac{TC'}{TC}$. Для этого применим теорему Менелая к треугольнику HTC и секущей $H'C'$: $\frac{CC'}{TC'}\frac{TH'}{HH'}\frac{AH}{AC} = 1$. Поскольку исходная пирамида является правильной, то основание ее высоты

[#] Параметр $x \in [1{,}5;\, 2{,}5]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

попадает в середину диагонали основания, откуда получаем, что $\frac{CC'}{TC'}=\frac{2}{x-1}$, а значит, $\frac{TC'}{TC}=\frac{x-1}{x+1}$. Так как $\frac{V_{TCB'D'}}{V_{TCBD}}=\frac{TC\cdot TB'\cdot TD'}{TC\cdot TB\cdot TD}$, то $V_{TCB'D'}=\frac{V}{2}\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}$.Окончательно получаем: $V_{TAB'C'D'}=\frac{V}{2}\frac{(x-1)^2}{x^2}\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)}V$.

Ответ: $\frac{(x-1)^2}{x(x+1)}$.

ЗАДАЧА 10

Луноход пытается связаться с Землей. Из-за особенностей рельефа и трудностей связи, зона уверенной связи на поверхности планеты имеет форму многоугольника, причем связь возможна только из точек, имеющих целочисленные координаты. Из точек на границе многоугольника связь неустойчива, за пределами многоугольника связь невозможна.

Координаты вершин многоугольника - целые числа, всего N вершин. Требуется найти количество точек, из которых можно установить уверенную связь с Землей. Стороны многоугольника друг с другом не соприкасаются (за исключением соседних - в вершинах) и не пересекаются.

Ограничения: 3 <= N <= 100 000, координаты вершин целые и по модулю не превосходят 1 000 000 .

Входные данные

В первой строке содержится число N, в следующих N строках - пары чисел - координаты точек. Если соединить точки в данном порядке, а также соединить первую и последнюю точки, получится заданный многоугольник.

Выходные данные

Вывести одно число - количество точек, лежащих внутри многоугольника и не лежащих при этом на его границе.

Примеры

Входные данные

3

1 0

0 0

0 1

Выходные данные

0

Решение: Участнику позволяется неограниченное количество раз загружать на сервер свой программный код и запускать автоматическое тестирование программы на случайных примерах.

Ответ: Программный код, загруженный на сервер олимпиады. Тестирование кода на работоспособность проводится автоматически на случайных примерах.