Задания и решения первого тура отборочного этапа Олимпиады «Ломоносов» по Космонавтике 2017/2018
Разминка
Для всех классов 7-11.

1) Какой физический эффект позволил обнаружить гравитационные волны?
Варианты ответов. Правильный ответ в)
а) колебания земной поверхности;
б) изменение ускорения свободного падения ;
в) интерференция луча света;
г) изменение скорости распространения звука в воздухе.

2) Сколько землян в данный момент находится в космосе?
Варианты ответов. Правильный ответ г)
а) двое;
б) трое;
в) четверо;
г) шестеро.

3) Какую минимальную скорость должен развить космический аппарат, чтобы выйти на околоземную орбиту?
Варианты ответов. Правильный ответ в)
а) скорость звука;
б) скорость света;
в) первую космическую скорость;
г) вторую космическую скорость.

4) В каком году на поверхность Луны был доставлен первый космический аппарат?
Варианты ответов. Правильный ответ а)
а) в 1959-м;
б) в 1961-м;
в) в 1966-м;
г) в 1969-м.

5) В каком году получена первая фотография обратной стороны Луны?
Варианты ответов. Правильный ответ а)
а) в 1959-м;
б) в 1961-м;
в) в 1966-м;
г) в 1969-м.

6) В каком году началось строительство международной космической станции, которая в данный момент находится на орбите?
Варианты ответов. Правильный ответ б)
а) в 1989-м;
б) в 1998-м;
в) в 2003-м;
г) в 2011-м.

7) На какой высоте летает международная космическая станция?
Варианты ответов. Правильный ответ б)
а) 100 км;
б) 400 км;
в) 1400 км;

г) 6400 км.

8) На какой высоте находится граница между земным пространством и космосом, принятая международной федерацией астронавтики и почему?
Варианты ответов. Правильный ответ б)
а) 800 км. Потому, что это верхняя граница термосферы;
б) 100 км. Потому, что выше этой границы скорость летящего самолета должна превышать первую космическую скорость.
в) 50 км. Потому, что это верхняя граница стратосферы;
г) 38 км. Потому, что это максимальная высота полета самолета, достигнутая на данный момент.

9) Какую форму имеет капля воды в невесомости?
Варианты ответов. Правильный ответ а)
а) шар;
б) куб;
в) тор;
г) в невесомости вообще нет воды.

10) Работает ли магнитный компас на космическом корабле, находящемся на околоземной (до 500 км) орбите?
Варианты ответов. Правильный ответ а)
а) да, стрелка по-прежнему направлена к магнитному полюсу Земли;
б) работает, но стрелка направлена на Солнце;
в) не работает (стрелка движется хаотично);
г) работает, но стрелка направлена в центр Земли.

Задания и решения первого тура отборочного этапа Олимпиады «Ломоносов» по Космонавтике 2017/2018
10-11 классы

ЗАДАЧА 1

Астроном измерил красное смещение линий в спектре далекой галактики: оно оказалось равным z=0,05.[#] Приняв постоянную Хаббла H_0 = 70 км/с/Мпк, определите, сколько лет (t) шел свет от этой галактики до астронома. Приведите подробное решение.

Решение: Поскольку величина $z = 0{,}05$ мала, можем не учитывать релятивистские эффекты (в частности, не различать прошедшее для наблюдателя и собственное прошедшее время) и пользоваться плоской моделью Вселенной. Тогда, согласно определению постоянной Хаббла,

$$cz = H_0 r,$$

где $c \approx 300000$ км/с - скорость света, а r - расстояние до объекта в Мпк. Тогда $r = \frac{cz}{H_0} \approx 214{,}3 \text{ Мпк} = 661{,}2 \cdot 10^{19}$км, а значит $t = \frac{r}{c} \approx 2{,}2 \cdot 10^{16} c \approx 700$ млн лет.

Ответ: ≈ 700 млн лет.

ЗАДАЧА 2

Фобос (один из спутников Марса) вращается вокруг своей планеты по круговой орбите радиуса $R = 9400$ км. Определите период обращения Фобоса T, если известно, что ускорение свободного падения на поверхности Марса $g = 3{,}86$ м/с^2. Ответ приведите в часах и минутах, округлив до целых (например, 7 ч 02 мин). Считайте Марс однородным шаром радиуса $r = 3400$ км.

Решение: Пусть m – масса Фобоса, M – масса Марса, v – скорость движения Фобоса по орбите, G – гравитационная постоянная. Согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения уравнение движения Фобоса имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$. Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности Марса $g = G\frac{M}{r^2}$, а период обращения Фобоса $T = \frac{2\pi R}{v}$, получаем что $T = \frac{2\pi}{r}\sqrt{\frac{R^3}{g}}$.

Ответ: 7 ч 32 мин.

ЗАДАЧА 3

Карта поверхности Ганимеда состоит из прямоугольного поля NxM клеток. Рельеф местности таков, что планетоход может из каждой клетки выйти в одном из четырех направлений «вправо», «вверх», «влево» или «вниз».

[#] Параметр $z \in [0.04; 0.06]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

В начальный момент времени позиция планетохода находится в одной из ячеек карты. Однако возможно, что планетоход будет бесконечно ходить по полю и никогда не сможет исследовать поверхность Ганимеда.

Напишите программу, которая определит, сможет ли планетоход пройти по от начала до конца маршрута и завершить исследования, не зациклившись.

Формат входных данных

Во входном файле заданы сначала размеры поля – число строк N и число столбцов M ($1 \le N \le 1000$, $1 \le M \le 1000$). Далее идет N строк по M чисел в каждой, задающих направления стрелочек в клетках. Число 1 обозначает стрелочку вправо, 2 – вверх, 3 – влево, 4 – вниз. Числа в строке разделяются пробелами.

Предпоследняя строка содержит два числа - координаты клетки, в которой планетоход находится в начальный момент времени.

Последняя строка содержит два числа - координаты клетки, в которой планетоход должен прийти в конечный момент времени.

Формат выходных данных

В выходной файл выведите YES, если путь без зацикливания существует. Если такого пути нет, выведите NO.

Примеры

Входные данные:

6 5

3 1 1 4 2

1 2 4 3 1

4 2 1 1 4

1 2 3 3 3

3 1 4 4 4

2 2 3 4 2

1 2

5 3

Выходные данные:

YES

Решение: Участнику позволяется неограниченное количество раз загружать на сервер свой программный код и запускать автоматическое тестирование программы на случайных примерах.

Ответ: Программный код, загруженный на сервер олимпиады. Тестирование кода на работоспособность проводится автоматически на случайных примерах.

ЗАДАЧА 4

Спутник движется по круговой орбите, радиус которой составляет $n = 2$ радиуса планеты. Какова плотность вещества планеты ρ, если период обращения спутника $T = 4$ часа?[#] Планету считайте однородным шаром. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $м^3 \cdot с^{-2} \cdot кг^{-1}$. Ответ дайте в кг/м^3, поделив его на 10^3 и округлив до одного знака после запятой (например, 8,5).

Решение: Пусть m – масса спутника, M – масса планеты радиуса r, v – скорость движения спутника по орбите радиуса R. Согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения уравнение движения спутника имеет вид: $\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$. Учитывая, что $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, $T = \frac{2\pi R}{v}$ и $R = nr$, получаем, что $\rho = \frac{3\pi n^3}{GT^2}$.

Ответ: $\rho = \frac{3\pi n^3}{GT^2} \approx 5{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3

ЗАДАЧА 5

Там говорилось о феноменах так называемой петли времени, то есть об искривлении вектора времени в пределах особенно мощных гравитационных полей; это явление может иногда привести даже к тому, что время повернет вспять и произойдет так называемое удвоение настоящего.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, утром во вторник увидел двух дублей самого себя, из завтрашнего и послезавтрашнего дней. Вторничный Ийон Тихий хочет починить рули ракеты и для этого перекладывает гаечные ключи из ящика в карманы скафандра. Вначале в ящике лежат $N = 32$ ключей. Каждый ключ «вторничный» Тихий сначала в течение $t_1 = 15$ секунд ищет в ящике, а затем в течение $t_2 = 20$ секунд укладывает в карман скафандра. «Средовый» и «четверговый» Ийоны Тихие мешают ему. Дождавшись момента, когда «вторничный» Ийон начинает искать в ящике очередной ключ, один из дублей (но не оба) может вытащить из скафандра один ключ (на это ему требуется ровно $t_3 = 15$ секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный ключ, у «средового» уходит $t_4 = 105$ секунд, после чего он готов украсть из скафандра следующий ключ, а «четверговый» прячет ключ за $t_5 = 225$ секунд. Какое наименьшее число ключей может оказаться в кармане скафандра в тот момент, когда «вторничный» Ийон положит туда последний ключ?

[#] Параметр $T \in [1.5; 4]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

Решение: Назовем циклом последовательность двух действий – «Вторничный» выбирает ключ в ящике и кладет его в карман. Продолжительность цикла 35 секунд. По условию, воровать ключ каждый из Ийонов может только в начале цикла. Тогда у «Средового» на один ключ уходит 4 цикла или 140 секунд, а у «Четвергового» - 7 циклов или 245 секунд. Воровать ключи Ийоны могут начать только со второго цикла. Тогда за оставшиеся 31 цикл «Средовый» может украсть максимум 8 ключей, а «Четверговый» - максимум 5 ключей, так что в кармане будут лежать минимум 19 ключей. Остается показать, что это возможно, предъявив последовательность действий.

Пусть «Средовый» ворует в циклы 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, а «Четверговый» - в циклы 2, 9, 16, 24, 32.

Ответ: 19.

ЗАДАЧА 6

Две одинаковых звезды движутся вокруг общего центра масс по окружности радиуса $R = 10^{10}$ м, располагаясь на противоположных концах диаметра окружности, причем период обращения звезд равен $T = 12{,}5$ земных суток.[#] Пренебрегая влиянием других небесных тел и приняв гравитационную постоянную равной $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2, определите массу M каждой из звезд. Ответ приведите в килограммах, поделив его на 10^{30} и округлив до одного знака после запятой.

Решение: Каждая из звезд движется под действием гравитационного притяжения к другой звезде. Пусть v – скорость движения звезды по орбите. По второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения для каждой из звезд имеем: $\dfrac{Mv^2}{R} = G\dfrac{M^2}{4R^2}$. Учитывая, что $T = \dfrac{2\pi R}{v}$, получаем, что $M = \dfrac{16\pi^2 R^3}{GT^2}$.

Ответ: $M = \dfrac{16\pi^2 R^3}{GT^2} \approx 2{,}0\cdot 10^{30}\,кг$.

ЗАДАЧА 7

Когда я пришел в себя, каюта была набита людьми.
Передвигаться по ней было почти невозможно.
Как оказалось, все они были мною из разных дней, недель, месяцев,
а один, кажется, даже из будущего года...

Но в промежутке мы успели пройти сквозь отрицательный вихрь,
уменьшивший наше количество наполовину.

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

Каждый положительный вихрь удваивает количество Ийонов, а каждый отрицательный – уменьшает на 7 (при этом, если число Ийонов в ракете меньше восьми, то ракета становится пустой). Известно, что вихрей было не меньше одного и не больше 147. Сколько вихрей могла пройти ракета всего, если в конце в ней остался один единственный Ийон Тихий?

Решение: Будем оперировать последовательностями, где номер члена – это номер вихря, а элемент – количество Ийонов в ракете после данного вихря. Заметим, что условиям задачи удовлетворяет

[#] Параметр $T \in [10; 15]$ был варьируемым в зависимости от варианта.

подпоследовательность 1-2-4-8-1. Таким образом, если какое-либо число x является решением, то решением является и число x+4. Приведем примеры

1-2-4-8-1; 1-2-4-8-16-9-2-4-8-1; 1-2-4-8-16-9-18-11-4-8-1; 1-2-4-8-16-9-18-11-22-15-8-1.

Из них следует, что решениями являются число 4 (а значит все числа вида $4+4n$); число 9 (а значит все числа $9+4n$), число 10 (а значит все числа $10+4n$) и число 11 (а значит все числа $11+4n$. Под вопросом остаются числа 1, 2, 3, 5, 6 и 7. Перебором всех вариантов

1-2-4-8-(1 или 16)-(2 или 9 или 32)-(4 или 2 или 18 или 25 или 64)-(8 или 4 или 11 или 36 или 18 или 50 или 57 или 128)

убеждаемся, что эти числа ответами не являются.

Ответ: все числа от 1 до 147, кроме 1, 2, 3, 5, 6 и 7.

ЗАДАЧА 8

В звездном скоплении 1500 одинаковых звезд. Каждая звезда имеет блеск 15^m. Каков полный блеск этого скопления? Приведите подробное решение.

Решение: Пусть L_1 и L_2 – освещенности Земли одной звездой созвездия и всем совездием соответственно. Тогда $L_2 = 1500L_1$. Пусть m_1 и m_2 - соответствующие видимые звездные величины. Тогда

$$m_1 - m_2 = -2{,}5\lg\frac{L_1}{L_2} \approx 7{,}94.$$

Ответ: $\cong 7{,}06^m$

ЗАДАЧА 9

Четверговый аккуратно
разбивал ножом яйца и выливал их содержимое в шипящий жир.
- О, прошу прощения, - запротестовал я, - свой рацион за среду ты уже
съел, ты не имеешь права второй раз за среду ужинать!

Станислав Лем,
Звездные дневники Ийона Тихого.
Путешествие седьмое: 147 вихрей

В результате попадания в петлю времени Ийон Тихий, летевший в ракете один, видит в среду своего двойника из четверга. «Средовый» Ийон Тихий хочет разделить с «четверговым» кусок сыра, имеющий форму пирамиды $TABCD$ с площадью основания $S_{ABCD} = 12$ см^2. Ийон из среды отрезает «четверговому» одним плоским разрезом пирамиду $TA'B'C'D'$ (точка A' лежит на ребре TA, точка B' - на ребре TB и т.д.), а для того, чтобы дележ был «честным» проводит разрез через середину высоты TH , где H - точка пересечения отрезков AC и BD . Какой наибольший объем может иметь многогранник $ABCDA'B'C'D'$, если $AH = a$ см, $BH = b$ см, $CH = c$ см, $DH = d$ см, $TH = 12$ см?[#] Ответ дайте в см^3, округлив до сотых (например, 41,22).

[#] Варьируемые параметры a,b выбираются различными из множества {2,3,4}, параметры c,d выбираются различными, случайным образом из множества {5,6,7} в зависимости от варианта.

Решение. Искомый объем $V = V_1 - V_2$, где $V_1 = V_{TABCD}$, $V_2 = V_{TA'B'C'D'}$. Задача состоит в минимизации отношения μ этих объемов. Пусть $\frac{TA'}{TA} = x$, $\frac{TB'}{TB} = y$, $\frac{TC'}{TC} = z$, $\frac{TD'}{TD} = w$. Обозначим через φ угол между диагоналями AC и BD. Тогда $V_1 = 2(a+c)(b+d)\sin\varphi$, $V_{TABD} = 2a(b+d)\sin\varphi$, $V_{TBCD} = 2c(b+d)\sin\varphi$. Известно, что для треугольных пирамид с общим трехгранным ребром отношение объемов равно произведению отношений соответствующих ребер, лежащих на ребрах трехгранного угла. Тогда $V_{TA'B'D'} = 2xywa(b+d)\sin\varphi$, $V_{TC'B'D'} = 2zywc(b+d)\sin\varphi$. Отсюда $\mu = \frac{yw(cz+ax)}{a+c}$. Рассуждая аналогично, получим $\mu = \frac{xz(by+dw)}{b+d}$. Теперь заметим, что секущая плоскость определяется однозначно выбором секущих $A'C'$ и $B'D'$, т.е. можно считать, что параметры x и y выбираются независимо, $z = z(x)$, $w = w(y)$. Тогда задача минимизации величины μ равносильна независимой минимизации произведений xz и yw. Рассмотрим треугольник ATC. Пусть точка H' - середина высоты TH. Известно, что произведение $TA' \cdot TC' = xz \cdot TA \cdot TC$ принимает наименьшее значение, когда H' - середина отрезка $A'C'$. Тогда $A'TC'H$ - параллелограмм, следовательно, $A'T = HC'$, $TC' = A'H$. Далее, $\Delta ATC \sim \Delta HC'C$, $\Delta ATC \sim \Delta AA'H$, следовательно, $\frac{HC'}{AT} = \frac{c}{a+c}$, то есть $\frac{TA'}{TA} = x = \frac{c}{a+c}$. Аналогично $\frac{TC'}{TC} = z = \frac{a}{a+c}$. Проделаем то же для треугольника BTD. Окончательно получим, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{abcd}{(a+c)^2(b+d)^2}$. При этом $V_1 = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot TH = 48$.

Ответ: $48\left(1 - \frac{abcd}{(a+c)^2(b+d)^2}\right)$.

ЗАДАЧА 10

Воганы собрались в экспедицию на край Вселенной. У них есть корабль в форме таблицы, состоящий из N × M ячеек, связанных между собой. У каждой ячейки известна грузоподъемность, а у каждого вогана - масса. В каждой ячейке может быть не более одного вогана, если воган занял ячейку, грузоподъемность ячейки не может быть меньше массы вогана.
Руководитель экспедиции продумывает рассадку. Помогите ему определить, какому максимальному количеству воганов удастся отправиться в путь.

Входные данные
В первой строке даны числа N и M ($1 \le N, M \le 40$). В каждой из последующих N строк содержится по M чисел, обозначающих грузоподъемность соответствующей
ячейки. В (N+2)-ой строке находится число K ($1 \le K \le 2000$) – количество воганов. В (N+3)-ей строке содержатся K чисел, i-ое из которых – масса i-ого вогана. Все массы воганов и грузоподъемности ячеек – натуральные числа, не превышающие 100.

Выходные данные
Требуется вывести одно число – максимально возможное количество участников экспедиции.

Пример:
Входные данные
3 2
5 10
7 5
5 5
6
9 5 3 5 12 10

Выходные данные
4

Решение: Участнику позволяется неограниченное количество раз загружать на сервер свой программный код и запускать автоматическое тестирование программы на случайных примерах.

Ответ: Программный код, загруженный на сервер олимпиады. Тестирование кода на работоспособность проводится автоматически на случайных примерах.