10 класс

Вариант 1

1. (6 баллов) Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью V_0, второй шарик одновременно с запуском первого подброшен вверх с начальной скоростью u с высоты H. В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Определите время полета первого шарика от столкновения до падения на Землю. Считайте, что

$$V_0 > \sqrt{gH} > u\,,$$

где g – ускорение свободного падения.

Возможное решение. Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}$$

$$h_1 = H - u\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}.$$

Здесь h_1 – высота, на которой столкнулись шарики, τ_1 – время полета шариков до столкновения, g – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H\frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{V_0 + u}\right)^2$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g\tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V_{21} = -u - g\tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекция скорости первого шарика после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяется как

$$V'_{11} = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V_{11}'' = \sqrt{u^2 + 2gH}\,.$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V_{11}'' = V_{11}' + g\tau_1'\,.$$

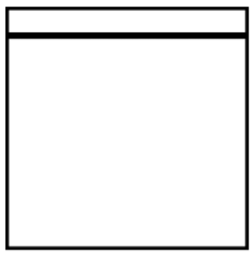
Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau_1' = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u}\,.$$

Ответ: $\tau_1' = \frac{\sqrt{u^2+2gH}-u}{g} - \frac{H}{V_0+u}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для высоты столкновения шариков	**2**
Записано выражение для скорости первого шарика после столкновения	**2**
Записано выражение для расчета времени полета	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	**1**
Всего баллов	**6**



2. (4 балла) Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет a = 1 м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен водой массой M = 1000 кг. Какую массу гелия нужно закачать в пространство над поршнем, чтобы поршень сдвинулся на расстояние Δh = 1 мм? Температуры гелия и воды одинаковы, постоянны и равны t = 27 °C. Молярная масса гелия μ = 4 г/моль, значение универсальной газовой постоянной R = 8,31 Дж/(К·моль). Сжимаемость воды (относительное изменение объема при изотермическом увеличении давления) составляет $\varepsilon = 5\cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$.

Возможное решение. При движении поршня относительное изменение объема воды составляет

$$\delta = \frac{a^2\Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a}\,.$$

Начальное давление воды на верхнюю крышку отсутствует, по окончании заполнения гелием пространства над поршнем давление там составит

$$p = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\Delta h}{a\varepsilon}\,.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для массы гелия получим:

$$m = \frac{\mu p V'}{RT} = \frac{\mu a (\Delta h)^2}{\varepsilon RT} \approx 3{,}2 \text{ г}.$$

Ответ: $m = \frac{\mu a (\Delta h)^2}{\varepsilon RT} \approx 3{,}2$ г.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Получено выражение для относительного изменения объема	**1**
Получено выражение для давления	**1**
Получен ответ в общем виде	**1**
Получен окончательный ответ в виде числа	**1**
Всего баллов	**4**

3. (6 баллов) В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой M, находится газ. Газ нагревают, при этом поршень двигается из состояния покоя равноускоренно с ускорением a. Найдите количество теплоты, сообщенное газу за промежуток времени τ. Внутренняя энергия одного моля газа пропорциональна абсолютной температуре $U = cT$. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

Возможное решение. Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c \Delta T.$$

Здесь p – давление газа, V – его объем, ν – количество вещества газа.

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R \Delta T.$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2}.$$

Значит,

$$\nu \Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R}.$$

В окончательной форме получаем

$$Q = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{cM(a\tau)^2}{2R} = \frac{M(a\tau)^2}{2}\left(1 + \frac{c}{R}\right).$$

Ответ: $Q = \frac{M(a\tau)^2}{2}\left(1 + \frac{c}{R}\right)$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для первого начала термодинамики	**1**
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	**1**
Записана теорема об изменении кинетической энергии	**2**
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**

4. (4 балла) При движении в воздухе на мяч действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости. Непосредственно перед ударом волейболиста мяч летел горизонтально со скоростью V_1 и с ускорением a_1. После удара мяч полетел вертикально вверх с скоростью V_2. Определите ускорение мяча непосредственно после удара.

Возможное решение. Запишем уравнение связи ускорения мяча и его скорости в горизонтальном движении:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{kV_1^2}{m}.$$

Здесь F_1 – сила сопротивления, m – масса мяча, k – коэффициент пропорциональности. После удара мяч полетел вверх, на него действуют силы тяжести и сопротивления, направленные вниз. Его ускорение при этом будет равно

$$a_2 = \frac{kV_2^2 + mg}{m} = \frac{\frac{ma_1}{V_1^2}V_2^2 + mg}{m} = a_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + g.$$

Ответ: $a_2 = a_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + g$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для ускорения в горизонтальном полете	**1**
Записано выражение для ускорения в вертикальном полете	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**2**
Всего баллов	**4**

5. (6 баллов) В холодильной машине, работающей по обратному циклу Карно, в качестве холодильника используется вода при $T_х$ = 273 К, а в качестве нагревателя – вода при $T_н$ = 373 К. Сколько воды можно заморозить в холодильнике, если превратить в пар m = 200 г воды в нагревателе? Удельная теплота плавления льда λ = 3,35·10^5 Дж/кг, удельная теплота парообразования воды r = 2,26 МДж/кг.

Возможное решение. Чтобы испарить воду, надо затратить количество теплоты

$$Q_1 = rm\,.$$

При замерзании выделяется количество теплоты.

$$Q_2 = \lambda m'\,.$$

Холодильная машина работает по циклу Карно, поэтому

$$\frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_х}{T_г}.$$

Тогда

$$m' = \frac{T_х m r}{T_г \lambda} = 0{,}988 \text{ кг}\,.$$

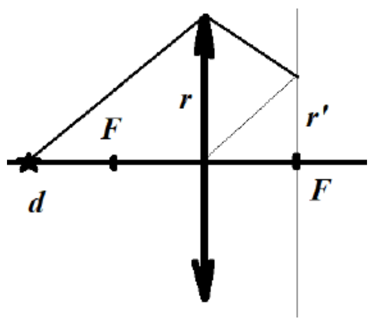
Ответ: $m' = \frac{T_х m r}{T_г \lambda} = 0{,}988$ кг .

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записаны выражения для количеств теплоты (по 1 баллу за каждое)	**2**
Записано выражение для связи количеств теплоты	**2**
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**

6. (4 балла) За собирающей тонкой линзой с фокусным расстоянием F и диаметром D в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии $d > F$ от линзы помещен точечный источник света. Определите диаметр светового пятна на экране.

Возможное решение. Рассмотрим чертеж. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что



$$D' = \frac{FD}{d}\,.$$

Ответ: $D' = \frac{FD}{d}$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Построен чертеж	**1**
Рассмотрены подобные треугольники	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**4**

10 класс

Вариант 2

1. (6 баллов) Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью V_0, второй шарик одновременно с запуском первого брошен вниз с начальной скоростью u с высоты H. В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Определите, на какой высоте будет находиться второй шарик в тот момент времени, когда первый шарик упадет на Землю? Считайте, что

$$V_0 > \sqrt{gH} > u\,,$$

где g – ускорение свободного падения.

Возможное решение. Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}$$

$$h_1 = H - u\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}.$$

Здесь h_1 – высота, на которой столкнулись шарики, τ_1 – время полета шариков до столкновения, g – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H\frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{V_0 + u}\right)^2$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g\tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V_{21} = -u - g\tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекции их скоростей после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяются как

$$V'_{11} = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V'_{21} = V_{11} = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V_{11}'' = \sqrt{u^2 + 2gH}\,.$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V_{11}'' = V_{11}' + g\tau_1'\,.$$

Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau_1' = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u}\,.$$

Второй шарик через это время окажется на высоте

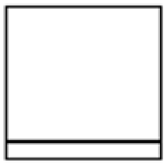
$$h_1' = h_1 + V_{21}'\tau_1' - \frac{g\tau_1'^2}{2} = \frac{(V_0 + u)\left(\sqrt{u^2 + 2gH} - u\right)}{g} - H\left(1 - \frac{gH}{2(V_0 + u)^2}\right).$$

Ответ: $h_1' = \frac{(V_0+u)\left(\sqrt{u^2+2gH}-u\right)}{g} - H\left(1 - \frac{gH}{2(V_0+u)^2}\right)$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для высоты столкновения шариков	**1**
Записано выражение для скоростей шариков после столкновения	**2**
Записано выражение для расчета времени полета	**1**
Записано выражение для расчета для высоты второго шарика	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	**1**
Всего баллов	**6**

2. (4 балла) Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет a = 1 м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен водой массой M = 1000 кг. Какую массу неона нужно закачать в пространство под поршнем, чтобы поршень сдвинулся на расстояние Δh = 0,5 мм? Температуры неона и воды одинаковы, постоянны и равны t = 32 °С. Молярная масса неона μ = 20 г/моль, значения универсальной газовой постоянной R = 8,31 Дж/(К·моль), ускорения свободного падения g = 10 м/с^2. Сжимаемость воды (относительное изменение объема при изотермическом увеличении давления) составляет $\varepsilon = 5\cdot10^{-10}$ Па$^{-1}$.



Возможное решение. При движении поршня относительное изменение объема составляет

$$\delta = \frac{a^2 \Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a}.$$

Начальное давление воды на дно равно

$$p' = \frac{Mg}{a^2}.$$

По окончании заполнения неоном пространства под поршнем давление там составит

$$p = p' + \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{Mg}{a^2} + \frac{\Delta h}{a\varepsilon}.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для массы неона получим:

$$m = \frac{\mu p V'}{RT} = \frac{\mu a \Delta h}{RT}\left(\frac{Mg}{a} + \frac{\Delta h}{\varepsilon}\right) \approx 4 \text{ г}.$$

Ответ: $m = \frac{\mu a \Delta h}{RT}\left(\frac{Mg}{a} + \frac{\Delta h}{\varepsilon}\right) \approx 4$ г.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Получено выражение для относительного изменения объема	**1**
Получено выражение для давления	**1**
Получен ответ в общем виде	**1**
Получен окончательный ответ в виде числа	**1**
Всего баллов	**4**

3. (6 баллов) В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, находится идеальный газ. Газ нагревают, при этом поршень двигается из состояния покоя равноускоренно с ускорением a. Количество теплоты, сообщенное газу за промежуток времени τ, равно Q. Определите массу поршня. Молярная теплоемкость газа в процессе при постоянном объеме равна $c_{\mu V}$. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

Возможное решение. Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c_{\mu V} \Delta T$$

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R \Delta T$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2}.$$

Значит,

$$\nu\Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R}.$$

В окончательной форме получаем

$$Q = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{c_{\mu V} M(a\tau)^2}{2R} = \frac{M(a\tau)^2}{2}\left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R}\right)$$

$$M = \frac{2Q}{(a\tau)^2\left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R}\right)}.$$

Ответ: $M = \frac{2Q}{(a\tau)^2\left(1+\frac{c_{\mu V}}{R}\right)}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для первого начала термодинамики	**1**
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	**1**
Записана теорема об изменении кинетической энергии	**2**
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**

4. (4 балла) При движении в воздухе на мяч действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости. Непосредственно перед ударом волейболиста мяч летел горизонтально со скоростью V_1. После удара мяч полетел вертикально вверх с скоростью V_2 и ускорением a_2. Определите ускорение мяча непосредственно перед ударом.

Возможное решение. Запишем уравнение связи ускорения мяча и его скорости в горизонтальном движении:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{kV_1^2}{m}.$$

Здесь F_1 – сила сопротивления, m – масса мяча, k – коэффициент пропорциональности. После удара мяч полетел вверх, на него действуют силы тяжести и сопротивления, направленные вниз. Его ускорение при этом будет равно

$$a_2 = \frac{kV_2^2 + mg}{m} = \frac{\frac{ma_1}{V_1^2}V_2^2 + mg}{m} = a_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + g\,.$$

Для ускорения a_1 получаем

$$a_1 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 (a_2 - g)\,.$$

Ответ: $a_1 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 (a_2 - g)\,.$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для ускорения в горизонтальном полете	**1**
Записано выражение для ускорения в вертикальном полете	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**2**
Всего баллов	**4**

5. (6 баллов) В холодильной машине, работающей по обратному циклу Карно, в качестве холодильника используется вода при $T_х$ = 273 К, а в качестве нагревателя – вода при $T_н$ = 373 К. Сколько воды нужно превратить в пар в нагревателе, чтобы заморозить m = 2 кг воды в холодильнике? Удельная теплота плавления льда λ = 3,35·10^5 Дж/кг, удельная теплота парообразования воды r = 2,26 МДж/кг.

Возможное решение. Чтобы испарить воду, надо затратить количество теплоты

$$Q_1 = rm'\,.$$

При замерзании выделяется количество теплоты.

$$Q_2 = \lambda m\,.$$

Холодильная машина работает по циклу Карно, поэтому

$$\frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_х}{T_г}.$$

Тогда

$$m' = \frac{T_г \lambda m}{T_х r} = 0{,}405 \text{ кг}\,.$$

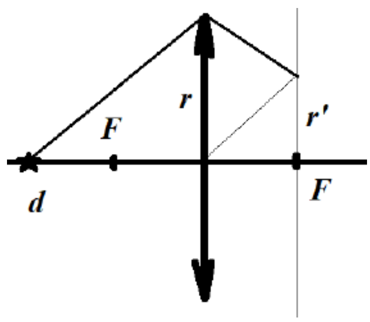
Ответ: $m' = \frac{T_г \lambda m}{T_х r} = 0{,}405$ кг .

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записаны выражения для количеств теплоты (по 1 баллу за каждое)	**2**
Записано выражение для связи количеств теплоты	**2**
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**

6. (4 балла) За собирающей тонкой линзой диаметром D в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии d от линзы большем фокусного помещен точечный источник света. Диаметр светового пятна на экране равен D'. Определите фокусное расстояние линзы.

Возможное решение. Рассмотрим чертеж. Учтем, что $D = 2r$, $D' = 2r'$. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что



$$D' = \frac{FD}{d}.$$

Тогда

$$F = \frac{D'd}{D}.$$

Ответ: $F = \frac{D'd}{D}$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Построен чертеж	**1**
Рассмотрены подобные треугольники	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**4**

10 класс

Вариант 3

1. (6 баллов) Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью V_0, второй шарик одновременно с запуском первого брошен вниз с начальной скоростью u с высоты H. В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Определите, какую скорость будет иметь второй шарик в тот момент времени, когда первый шарик упадет на Землю? Считайте, что

$$V_0 > \sqrt{gH} > u\,,$$

где g – ускорение свободного падения.

Возможное решение. Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}$$

$$h_1 = H - u\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}.$$

Здесь h_1 – высота, на которой столкнулись шарики, τ_1 – время полета шариков до столкновения, g – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H\frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{V_0 + u}\right)^2$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g\tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V_{21} = u - g\tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекции их скоростей после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяются как

$$V'_{11} = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V'_{21} = V_{11} = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V''_{11} = \sqrt{u^2 + 2gH}\,.$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V''_{11} = V'_{11} + g\tau'_1\,.$$

Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau'_1 = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u}\,.$$

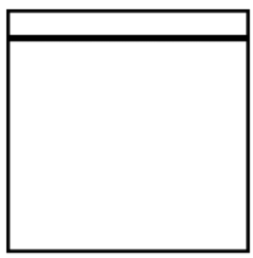
Скорость второго шарика в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$V_{22} = V'_{21} - g\tau'_1 = V_0 + u - \sqrt{u^2 + 2gH}\,.$$

Ответ: $V_{22} = V_0 + u - \sqrt{u^2 + 2gH}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для высоты столкновения шариков	**1**
Записано выражение для скоростей шариков после столкновения	**2**
Записано выражение для расчета времени полета	**1**
Записано выражение для расчета скорости второго шарика	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	**1**
Всего баллов	**6**



2. (4 балла) Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет a = 0,9 м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен метиловым спиртом. Какое количество вещества идеального газа нужно закачать в пространство над поршнем, чтобы поршень сдвинулся на расстояние Δh = 0,9 мм? Температуры газа и спирта одинаковы, постоянны и равны t = 17 °C. Значение универсальной газовой постоянной R = 8,31 Дж/(К·моль). Сжимаемость спирта (относительное изменение объема при изотермическом увеличении давления) составляет $\varepsilon = 8\cdot10^{-10}$ Па$^{-1}$.

Возможное решение. При движении поршня относительное изменение объема составляет

$$\delta = \frac{a^2 \Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a}.$$

Начальное давление спирта на верхнюю крышку отсутствует, по окончании заполнения газом пространства над поршнем давление там составит

$$p = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\Delta h}{a\varepsilon}.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для количества вещества получим:

$$\nu = \frac{pV'}{RT} = \frac{a(\Delta h)^2}{\varepsilon RT} \approx 0{,}3 \text{ моль}.$$

Ответ: $\nu = \frac{a(\Delta h)^2}{\varepsilon RT} \approx 0{,}3$ моль .

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Получено выражение для относительного изменения объема	**1**
Получено выражение для давления	**1**
Получен ответ в общем виде	**1**
Получен окончательный ответ в виде числа	**1**
Всего баллов	**4**

3. (6 баллов) В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой M, находится газ. Газ нагревают, при этом поршень движется из состояния покоя равноускоренно. Количество теплоты, сообщенное газу за промежуток времени τ, равно Q. Определите ускорение поршня. Внутренняя энергия одного моля газа равна $U = cT$. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

Решение. Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c \Delta T.$$

Здесь p – давление газа, V – его объем, ν – количество вещества газа.

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R \Delta T.$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2}.$$

Значит,

$$\nu\Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R}.$$

В окончательной форме получаем

$$a = \sqrt{\frac{2Q}{M\tau^2\left(1+\frac{c}{R}\right)}}.$$

Ответ: $a = \sqrt{\frac{2Q}{M\tau^2\left(1+\frac{c}{R}\right)}}$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для первого начала термодинамики	**1**
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	**1**
Записана теорема об изменении кинетической энергии	**2**
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**

4. (4 балла) При движении в воздухе на мяч действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости. Непосредственно перед ударом волейболиста мяч летел горизонтально, имея ускорение a_1. После удара мяч полетел вертикально вверх с скоростью V_2 и ускорением a_2. Определите скорость мяча непосредственно перед ударом.

Возможное решение. Запишем уравнение связи ускорения мяча и его скорости в горизонтальном движении:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{kV_1^2}{m}.$$

Здесь F_1 – сила сопротивления, m – масса мяча, k – коэффициент пропорциональности. После удара мяч полетел вверх, на него действуют силы тяжести и сопротивления, направленные вниз. Его ускорение при этом будет равно

$$a_2 = \frac{kV_2^2 + mg}{m} = \frac{\frac{ma_1}{V_1^2}V_2^2 + mg}{m} = a_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + g.$$

Окончательно получаем

$$V_1 = V_2\sqrt{\frac{a_1}{a_2 - g}}.$$

Ответ: $V_1 = V_2\sqrt{\frac{a_1}{a_2-g}}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для ускорения в горизонтальном полете	**1**
Записано выражение для ускорения в вертикальном полете	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**2**
Всего баллов	**4**

5. (6 баллов) Две одинаковы проводящие сферы находятся на большом расстоянии друг от друга и имеют положительные заряды Q_1 и Q_2. Незаряженный металлический шарик на непроводящем подвесе подносят к первой сфере и касаются её. Затем шарик подносят ко второй сфере и касаются её. После этого заряд шарика оказался равным q_2. Найдите заряд второй сферы после всех манипуляций.

Возможное решение. Пусть электроемкости сфер равны C_1, а электроемкость шарика равна C. После соприкосновения шарика с первой сферой его заряд станет равным

$$q_1 = \frac{Q_1}{1+\frac{C_1}{C}},$$

Из закона сохранения заряда для соприкосновения шарика со второй сферой получим:

$$q_1 + Q_2 = q_2 + Q_2'.$$

Потенциалы второй сферы и шарика при соприкосновении равны, поэтому

$$Cq_2 = C_1 Q_2'.$$

Тогда можем записать:

$$q_1 = \frac{Q_1}{1+\frac{Q_2'}{q_2}}.$$

Получим уравнение:

$$Q_2'^2 - (Q_2 - 2q_2)Q_2' - q_2(Q_1 + Q_2 - q_2) = 0$$

Решение этого уравнения:

$$Q_2' = \frac{Q_2}{2} - q_2 \pm \sqrt{\frac{Q_2^2}{4} + Q_1 q_2}.$$

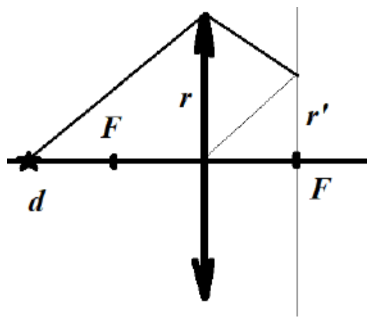
Ответ: $Q_2' = \frac{Q_2}{2} - q_2 \pm \sqrt{\frac{Q_2^2}{4} + Q_1 q_2}$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для заряда q_1	**1**
Записано выражение для закона сохранения заряда	**1**
Записано выражение для равенства потенциалов при соприкосновении шарика и сферы	**1**
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**3**
Всего баллов	**6**

6. (4 балла) За собирающей тонкой линзой с фокусным расстоянием F в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии $d > F$ от линзы помещен точечный источник света. Радиус светового пятна на экране равен D'. Определите диаметр линзы.

Возможное решение. Рассмотрим чертеж. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что



$$D' = \frac{FD}{d}.$$

Тогда

$$D = \frac{D'd}{F}.$$

Ответ: $D = \frac{D'd}{F}$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Построен чертеж	**1**
Рассмотрены подобные треугольники	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**4**

10 класс

Вариант 4

1. (6 баллов) Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью V_0 = 7 м/с, второй шарик одновременно с запуском первого брошен вниз с начальной скоростью u = 1 м/с с высоты H = 4 м. В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Шарики продолжают движение. При отскоке первого шарика от поверхности Земли его механическая энергия уменьшается в $k = 1{,}21$ раза. Определите время полета первого шарика от отскока от поверхности Земли до второго соударения с другим шариком. Считайте, что значение ускорения свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение. При всех расчетах примем, что вертикальная ось координат направлена вверх. Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}$$

$$h_1 = H - u\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}.$$

Здесь h_1 – высота, на которой столкнулись шарики, τ_1 – время полета шариков до столкновения, g – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H\frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{V_0 + u}\right)^2 = 2{,}25 \text{ м}.$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g\tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V_{21} = -u - g\tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекции их скоростей после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяются как

$$V'_{11} = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V'_{21} = V_{11} \ = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u} = 2 \text{ м/с}.$$

Заметим, что дальнейшие преобразования, проводимые в общем виде, требуют излишне трудоемких операций, поэтому будем поводить численные расчеты.

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V''_{11} = \sqrt{u^2 + 2gH} = 9 \text{ м/с}.$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V''_{11} = V'_{11} + g\tau'_1 .$$

Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau'_1 = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u} \approx 0{,}3 \text{ с}.$$

Проекция скорости второго шарика в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$V_{22} = V'_{21} - g\tau'_1 = V_0 + u - \sqrt{u^2 + 2gH} = -1 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Высота, на которой будет находиться второй шарик в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$h'_1 = h_1 + V'_{21}\tau'_1 - \frac{g\tau_1'^2}{2} \approx 2{,}65 \text{ м} .$$

Скорость первого шарика сразу после отскока будет равна

$$V_{12} = \frac{V''_{11}}{\sqrt{k}} \approx 8{,}18 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Искомое время полета первого шарика от отскока от поверхности Земли до второго соударения с другим шариком будет равно

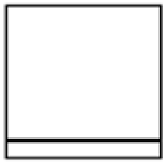
$$\tau_2 = \frac{h'_1}{V_{12} + |V_{22}|} \approx 0{,}29 \text{ с} .$$

Ответ: $\tau_2 \approx 0{,}29$ с .

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для высоты столкновения шариков	**1**
Записано выражение для скоростей шариков после столкновения	**2**

Записано выражение для расчета времени полета	**1**
Записаны выражения для расчета начальных высот и скоростей для второго столкновения	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	**1**
Всего баллов	**6**



2. (4 балла) Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет a = 1,2 м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен метиловым спиртом. Какое количество вещества идеального газа нужно закачать в пространство под поршнем, чтобы поршень сдвинулся на расстояние Δh = 0,8 мм? Температуры газа и спирта одинаковы, постоянны и равны t = 27 °С. Значения универсальной газовой постоянной R = 8,31 Дж/(К·моль), ускорения свободного падения g = 10 м/с^2 плотности спирта ρ = 810 кг/м^3. Сжимаемость спирта (относительное изменение объема при изотермическом изменении давления) составляет ε = 8·10^{-10} Па$^{-1}$.

Возможное решение. При движении поршня относительное изменение объема составляет

$$\delta = \frac{a^2 \Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a}\,.$$

Начальное давление воды на дно равно

$$p' = \rho g a\,.$$

По окончании заполнения неоном пространства под поршнем давление там составит

$$p = p' + \frac{\delta}{\varepsilon} = \rho g a + \frac{\Delta h}{a\varepsilon}\,.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для количества вещества идеального газа получим:

$$\nu = \frac{pV'}{RT} = \frac{a^3 \Delta h}{RT}\left(\rho g + \frac{\Delta h}{\varepsilon a^2}\right) \approx 0{,}39 \text{ моль}\,.$$

Ответ: $\nu = \frac{a^3 \Delta h}{RT}\left(\rho g + \frac{\Delta h}{\varepsilon a^2}\right) \approx 0{,}39$ моль .

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Получено выражение для относительного изменения объема	**1**
Получено выражение для давления	**1**

Получен ответ в общем виде	**1**
Получен окончательный ответ в виде числа	**1**
Всего баллов	**4**

3. (6 баллов) В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой M, находится идеальный газ. Газ нагревают, при этом поршень движется из состояния покоя равноускоренно с ускорением a. Количество теплоты, сообщенное газу, равно Q. Определите время, за которое газу была сообщена теплота. Молярная теплоемкость газа в процессе при постоянном объеме равна $c_{\mu V}$. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

Возможное решение. Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c_{\mu V}\Delta T .$$

Здесь p – давление газа, V – его объем, ν – количество вещества газа.

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R\Delta T .$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2}.$$

Значит,

$$\nu\Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R}.$$

В окончательной форме получаем

$$\tau = \sqrt{\frac{2Q}{Ma^2\left(1+\frac{c_{\mu V}}{R}\right)}}.$$

Ответ: $\tau = \sqrt{\frac{2Q}{Ma^2\left(1+\frac{c_{\mu V}}{R}\right)}}$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для первого начала термодинамики	**1**
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	**1**
Записана теорема об изменении кинетической энергии	**2**

Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**

4. (4 балла) При движении в воздухе на мяч действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости. Непосредственно перед ударом волейболиста мяч летел горизонтально со скоростью V_1, имея ускорение a_1. После удара мяч полетел вертикально вверх с ускорением a_2. Определите скорость мяча непосредственно после удара.

Возможное решение. Запишем уравнение связи ускорения мяча и его скорости в горизонтальном движении:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{kV_1^2}{m}.$$

Здесь F_1 – сила сопротивления, m – масса мяча, k – коэффициент пропорциональности. После удара мяч полетел вверх, на него действуют силы тяжести и сопротивления, направленные вниз. Его ускорение при этом будет равно

$$a_2 = \frac{kV_2^2 + mg}{m} = \frac{\frac{ma_1}{V_1^2}V_2^2 + mg}{m} = a_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + g.$$

Из этого выражения получаем:

$$V_2 = V_1\sqrt{\frac{a_2 - g}{a_1}}.$$

Ответ: $V_2 = V_1\sqrt{\frac{a_2-g}{a_1}}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для ускорения в горизонтальном полете	**1**
Записано выражение для ускорения в вертикальном полете	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**2**
Всего баллов	**4**

5. (6 баллов) Проводящая сфера радиусом R имеет заряд Q. Определите давление на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.

<u>Указание.</u> Площадь сферы равна $4\pi R^2$.

Возможное решение. Выделим на поверхности сферы малый элемент площадью ΔS. Заряд этого элемента равен

$$\Delta Q = \frac{Q\Delta S}{4\pi R^2}.$$

Поскольку элемент малый, его кривизной можно пренебречь, считая его участком плоскости. Напряженность электрического поля, создаваемая зарядом этого элемента, равна

$$E_1 = \frac{\Delta Q}{2\varepsilon_0 \Delta S} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля, создаваемая вблизи поверхности сферы всем зарядом сферы, равна

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Значит, вклад поля всех зарядов сферы за вычетом заряда ΔQ в суммарную напряженность поля равен

$$E_2 = E_1 = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0}.$$

Сила, с которой поле всех зарядов сферы за вычетом заряда ΔQ действует на заряд ΔQ, равна

$$F = E_2 \Delta Q = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{Q\Delta S}{4\pi R^2},$$

а давление на малый элемент

$$p = \frac{Q^2}{32\varepsilon_0 \pi^2 R^4}.$$

В силу сферической симметрии давление во всех точках сферы одинаково. Сила взаимодействия направлена от центра сферы.

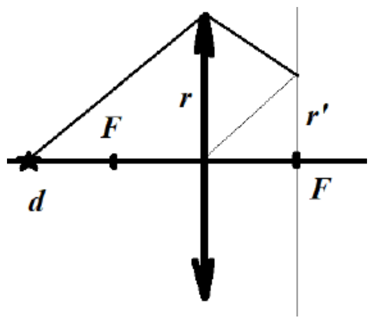
Ответ: $p = \frac{Q^2}{32\varepsilon_0 \pi^2 R^4}$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Определен заряд элемента сферы	**1**
Записаны выражения для напряженностей E_1 и E_2	**2**
Записано выражение для силы взаимодействия	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**6**

6. (4 балла) За собирающей тонкой линзой с фокусным расстоянием F и диаметром D в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии большем фокусного от линзы помещен точечный источник света. Диаметр светового пятна на экране равен D'. Определите расстояние от фокуса линзы до источника света.

Возможное решение. Рассмотрим чертеж. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что



$$D' = \frac{FD}{d}.$$

Откуда

$$d' = d - F = F\left(\frac{D}{D'} - 1\right).$$

Ответ: $d' = d - F = F\left(\frac{D}{D'} - 1\right)$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Построен чертеж	**1**
Рассмотрены подобные треугольники	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**4**

Физика. 10 класс.

Вариант 5

1. (6 баллов) Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью V_0 = 8 м/с, второй шарик одновременно с запуском первого брошен вниз с начальной скоростью u = 2 м/с с высоты H = 5 м. В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Шарики продолжают движение. При отскоке первого шарика от поверхности Земли его механическая энергия уменьшается в k = 1,21 раза. Определите высоту, на которой произошло второе соударение шариков. Считайте, что значение ускорения свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение. При всех расчетах примем, что вертикальная ось координат направлена вверх. Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}$$

$$h_1 = H - u\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}.$$

Здесь h_1 – высота, на которой столкнулись шарики, τ_1 – время полета шариков до столкновения, g – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H\frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{V_0 + u}\right)^2 = 2{,}75 \text{ м}.$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g\tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V_{21} = -u - g\tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекции их скоростей после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяются как

$$V'_{11} = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V'_{21} = V_{11} = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u} = 3 \text{ м/с}.$$

Заметим, что дальнейшие преобразования, проводимые в общем виде, требуют излишне трудоемких операций, поэтому будем поводить численные расчеты.

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V_{11}'' = \sqrt{u^2 + 2gH} \approx 10{,}2 \text{ м/с}.$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V_{11}'' = V_{11}' + g\tau_1' .$$

Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau_1' = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u} \approx 0{,}32 \text{ с}.$$

Проекция скорости второго шарика в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$V_{22} = V_{21}' - g\tau_1' = V_0 + u - \sqrt{u^2 + 2gH} \approx -0{,}2 \frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

Высота, на которой будет находиться второй шарик в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$h_1' = h_1 + V_{21}'\tau_1' - \frac{g\tau_1'^2}{2} \approx 3{,}2 \text{ м} .$$

Скорость первого шарика сразу после отскока будет равна

$$V_{12} = \frac{V_{11}''}{\sqrt{k}} \approx 9{,}27 \ \frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

Искомое время полета первого шарика от отскока от поверхности Земли до второго соударения с другим шариком будет равно

$$\tau_2 = \frac{h_1'}{V_{12} + |V_{22}|} \approx 0{,}34 \text{ с} .$$

За это время первый шарик поднимется на высоту

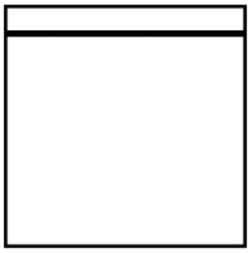
$$h_2 = V_{12}\tau_2 - \frac{g\tau_2^2}{2} \approx 2{,}58 \text{ м} .$$

Ответ: $h_2 \approx 2{,}58$ м .

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для высоты столкновения шариков	**1**

Записано выражение для скоростей шариков после столкновения	**1**
Записано выражение для расчета времени полета	**1**
Записаны выражения для расчета начальных высот и скоростей для второго столкновения	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**



2. (4 балла) Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет a = 2 м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен водой. В пространство над поршнем закачивают аргон, в результате поршень сдвинулся на расстояние Δh = 1,5 мм. Какова плотность аргона, находящегося в пространстве между верхней стенкой бака и поршнем? Температуры аргона и воды одинаковы, постоянны и равны t = 27 °C. Молярная масса аргона μ = 40 г/моль, значение универсальной газовой постоянной R = 8,31 Дж/(К·моль). Сжимаемость воды (относительное изменение объема при изотермическом увеличении давления) составляет $\varepsilon = 5\cdot10^{-10}$ Па$^{-1}$. Считайте аргон идеальным газом.

Возможное решение. При движении поршня относительное изменение объема воды составляет

$$\delta = \frac{a^2\Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a}.$$

Начальное давление воды на верхнюю крышку отсутствует, по окончании заполнения аргоном пространства над поршнем давление там составит

$$p = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\Delta h}{a\varepsilon}.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для массы гелия получим:

$$m = \frac{\mu p V'}{RT} = \frac{\mu a(\Delta h)^2}{\varepsilon RT}.$$

Плотность аргона составит

$$\rho = \frac{m}{a^2\Delta h} = \frac{\mu\Delta h}{a\varepsilon RT} \approx 24\ \text{кг/м}^3.$$

Ответ: $\rho = \frac{\mu\Delta h}{a\varepsilon RT} \approx 24\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Получено выражение для относительного изменения объема	**1**
Получено выражение для давления	**1**
Получен ответ в общем виде	**1**
Получен окончательный ответ в виде числа	**1**
Всего баллов	**4**

3. (6 баллов) В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой M, находится газ. Газ нагревают в течение времени τ, при этом поршень двигается из состояния покоя равноускоренно с ускорением a. Найдите среднюю мощность нагревателя. Внутренняя энергия одного моля газа равна $U = cT$. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

Возможное решение. Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c\Delta T\ .$$

Здесь p – давление газа, V – его объем, ν – количество вещества газа.

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R\Delta T\ .$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2}.$$

Значит,

$$\nu\Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R}.$$

Количество переданной теплоты:

$$Q = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{cM(a\tau)^2}{2R} = \frac{M(a\tau)^2}{2}\left(1 + \frac{c}{R}\right).$$

В окончательной форме получаем

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{Ma^2\tau}{2}\left(1 + \frac{c}{R}\right)$$

Ответ: $P = \frac{Ma^2\tau}{2}\left(1 + \frac{c}{R}\right).$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл

Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для первого начала термодинамики	**1**
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	**1**
Записана теорема об изменении кинетической энергии	**2**
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**

4. (4 балла) При движении в воздухе на мяч действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости. Непосредственно перед ударом волейболиста мяч летел горизонтально, имея ускорение a_1. После удара мяч полетел вертикально вверх с ускорением a_2. Определите отношение скоростей мяча после и до удара.

Возможное решение. Запишем уравнение связи ускорения мяча и его скорости в горизонтальном движении:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{kV_1^2}{m}.$$

Здесь F_1 – сила сопротивления, m – масса мяча, k – коэффициент пропорциональности. После удара мяч полетел вверх, на него действуют силы тяжести и сопротивления, направленные вниз. Его ускорение при этом будет равно

$$a_2 = \frac{kV_2^2 + mg}{m} = \frac{\frac{ma_1}{V_1^2}V_2^2 + mg}{m} = a_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + g.$$

Для отношения скоростей получаем

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{a_2 - g}{a_1}}.$$

Ответ: $\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{a_2-g}{a_1}}$

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для ускорения в горизонтальном полете	**1**
Записано выражение для ускорения в вертикальном полете	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**2**
Всего баллов	**4**

5. (6 баллов) Проводящая сфера имеет заряд Q. Давление на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов, равно p. Определите радиус сферы.

<u>Указание.</u> Площадь сферы равна $4\pi R^2$.

Возможное решение. Выделим на поверхности сферы малый элемент площадью ΔS. Заряд этого элемента равен

$$\Delta Q = \frac{Q\Delta S}{4\pi R^2}.$$

Поскольку элемент малый, его кривизной можно пренебречь, считая его участком плоскости. Напряженность электрического поля, создаваемая зарядом этого элемента, равна

$$E_1 = \frac{\Delta Q}{2\varepsilon_0 \Delta S} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля, создаваемая вблизи поверхности сферы всем зарядом сферы, равна

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Значит, вклад поля всех зарядов сферы за вычетом заряда ΔQ в суммарную напряженность поля равен

$$E_2 = E_1 = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0}.$$

Сила, с которой поле всех зарядов сферы за вычетом заряда ΔQ действует на заряд ΔQ, равна

$$F = E_2 \Delta Q = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{Q\Delta S}{4\pi R^2},$$

а давление на малый элемент

$$p = \frac{Q^2}{32\varepsilon_0 \pi^2 R^4}.$$

Радиус сферы равен

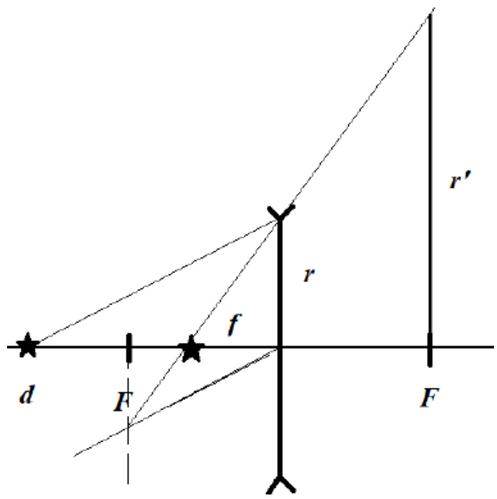
$$R = \sqrt[4]{\frac{Q^2}{32\varepsilon_0 \pi^2 p}}.$$

Ответ: $R = \sqrt[4]{\frac{Q^2}{32\varepsilon_0 \pi^2 p}}$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Определен заряд элемента сферы	**1**
Записаны выражения для напряженностей E_1 и E_2	**2**
Записаны выражение для силы взаимодействия и давления	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**6**

6. (4 балла) За рассеивающей тонкой линзой с фокусным расстоянием F и диаметром D в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии $d > F$ от линзы помещен точечный источник света. Определите диаметр светового пятна на экране.



Возможное решение. Рассмотрим чертеж. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что

$$\frac{f}{r} = \frac{F+f}{r'}.$$

Используя уравнение для тонкой линзы, получим:

$$D' = D\left(\frac{F}{d} + 2\right).$$

Ответ: $D' = D\left(\frac{F}{d} + 2\right)$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Построен чертеж	**1**
Рассмотрены подобные треугольники	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**4**

Физика. 10 класс.

Вариант 6

1. (6 баллов) Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью V_0 = 9 м/с, второй шарик одновременно с запуском первого брошен вниз с начальной скоростью u = 3 м/с с высоты H = 8 м. В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Шарики продолжают движение. При отскоке первого шарика от поверхности Земли его механическая энергия уменьшается в $k = 1{,}69$ раза. Определите скорость первого шарика непосредственно перед вторым соударением с другим шариком. Считайте, что значение ускорения свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение. При всех расчетах примем, что вертикальная ось координат направлена вверх. Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}$$

$$h_1 = H - u\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}.$$

Здесь h_1 – высота, на которой столкнулись шарики, τ_1 – время полета шариков до столкновения, g – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H\frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{V_0 + u}\right)^2 = 3{,}78 \text{ м}.$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g\tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V_{21} = -u - g\tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекции их скоростей после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяются как

$$V'_{11} = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V'_{21} = V_{11} = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u} \approx 2{,}33 \text{ м/с}.$$

Заметим, что дальнейшие преобразования, проводимые в общем виде, требуют излишне трудоемких операций, поэтому будем поводить численные расчеты.

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V_{11}'' = \sqrt{u^2 + 2gH} = 13 \text{ м/с}.$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V_{11}'' = V_{11}' + g\tau_1' .$$

Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau_1' = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u} \approx 0{,}33 \text{ с}.$$

Проекция скорости второго шарика в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$V_{22} = V_{21}' - g\tau_1' = V_0 + u - \sqrt{u^2 + 2gH} = -1 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Высота, на которой будет находиться второй шарик в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$h_1' = h_1 + V_{21}'\tau_1' - \frac{g\tau_1'^2}{2} = 4 \text{ м} .$$

Скорость первого шарика сразу после отскока будет равна

$$V_{12} = \frac{V_{11}''}{\sqrt{k}} = 10 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Искомое время полета первого шарика от отскока от поверхности Земли до второго соударения с другим шариком будет равно

$$\tau_2 = \frac{h_1'}{V_{12} + |V_{22}|} \approx 0{,}36 \text{ с} .$$

Перед вторым соударением скорость первого шарика будет равна

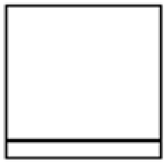
$$V_{12}' = V_{12} - g\tau_2 \approx 6{,}36 \text{ м/с} .$$

Ответ: $V_{12}' \approx 6{,}36$ м/с .

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для высоты столкновения шариков	**1**

Записано выражение для скоростей шариков после столкновения	**1**
Записано выражение для расчета времени полета	**1**
Записаны выражения для расчета начальных высот и скоростей для второго столкновения	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**



2. (4 балла) Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет a = 2 м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен водой массой M = 8000 кг. В пространство под поршнем закачивают криптон, при этом поршень сдвинулся на расстояние Δh = 1 мм. Определите плотность криптона. Температуры криптона и воды одинаковы, постоянны и равны t = 17 °C. Молярная масса криптона μ = 84 г/моль, значения универсальной газовой постоянной R = 8,31 Дж/(К·моль), ускорения свободного падения g = 10 м/с^2. Сжимаемость воды (относительное изменение объема при изотермическом увеличении давления) составляет $\varepsilon = 5\cdot10^{-10}$ Па$^{-1}$. Считайте криптон идеальным газом.

Возможное решение. При движении поршня относительное изменение объема составляет

$$\delta = \frac{a^2\Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a}.$$

Начальное давление воды на дно равно

$$p' = \frac{Mg}{a^2}.$$

По окончании заполнения неоном пространства под поршнем давление там составит

$$p = p' + \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{Mg}{a^2} + \frac{\Delta h}{a\varepsilon}.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для массы криптона получим:

$$m = \frac{\mu p V'}{RT} = \frac{\mu a \Delta h}{RT}\left(\frac{Mg}{a} + \frac{\Delta h}{\varepsilon}\right).$$

Плотность криптона

$$\rho = \frac{m}{a^2\Delta h} = \frac{\mu}{aRT}\left(\frac{Mg}{a} + \frac{\Delta h}{\varepsilon}\right) \approx 43\ \text{кг/м}^3.$$

Ответ: $\rho = \frac{\mu}{aRT}\left(\frac{Mg}{a} + \frac{\Delta h}{\varepsilon}\right) \approx 43\ \text{кг/м}^3$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Получено выражение для относительного изменения объема	**1**
Получено выражение для давления	**1**
Получен ответ в общем виде	**1**
Получен окончательный ответ в виде числа	**1**
Всего баллов	**4**

3. (6 баллов) В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой M, находится газ. Газ нагревают в течение времени τ, при этом поршень двигается из состояния покоя равноускоренно с ускорением a. Внутренняя энергия одного моля газа пропорциональна абсолютной температуре газа. Определите коэффициент пропорциональности, если средняя мощность нагревателя равна P. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

Возможное решение. Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c\Delta T\ .$$

Здесь p – давление газа, V – его объем, ν – количество вещества газа.

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R\Delta T\ .$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2}.$$

Значит,

$$\nu\Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R}.$$

Количество переданной теплоты:

$$Q = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{cM(a\tau)^2}{2R} = \frac{M(a\tau)^2}{2}\left(1 + \frac{c}{R}\right).$$

Мощность нагревателя определяется как

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{Ma^2\tau}{2}\left(1 + \frac{c}{R}\right).$$

Для коэффициента пропорциональности получаем:

$$c = R\left(\frac{2P}{Ma^2\tau} - 1\right).$$

Ответ: $c = R\left(\frac{2P}{Ma^2\tau} - 1\right)$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для первого начала термодинамики	**1**
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	**1**
Записана теорема об изменении кинетической энергии	**2**
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**

4. (4 балла) Два маленьких шарика испытывают абсолютно упругое столкновение. Масса первого шарика m. После столкновения первый шар потерял долю η своей кинетической энергии. Определите массу второго шара.

Возможное решение. Покажем, что при заданных условиях и не указанных дополнительных условиях решение существует только в случае, когда второй шарик покоился. При абсолютно упругом соударении суммарная кинетическая энергия шаров не изменяется. Тогда в лабораторной системе отсчета выполняется условие:

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2'.$$

Это можно записать как

$$\frac{\eta m V_1^2}{2} = \frac{M V_2'^2}{2} - \frac{M V_2^2}{2} \qquad (*)$$

Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся со скоростью второго шарика до соударения. В этой системе отсчета

$$\frac{m(V_1 - V_2)^2}{2} = \frac{m(V_1' - V_2)^2}{2} + \frac{M(V_2' - V_2)^2}{2}.$$

Выполнив преобразования, получим:

$$mV_1^2 - mV_1'^2 - MV_2'^2 = 2V_2(MV_2' + mV_1' - MV_2 - mV_1).$$

Выражение в скобках равно нулю, так как это разность суммарных импульсов шариков до и после соударения. Тогда

$$\eta m V_1^2 = M V_2'^2.$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (*), делаем вывод, что при заданных условиях решение существует только в случае, когда второй шарик покоился.

Кинетическая энергия первого шарика после удара равна

$$K_1' = \frac{mV_1^2}{2}(1-\eta)\,.$$

Его скорость после соударения равна

$$V_1' = V_1\sqrt{1-\eta}\,.$$

Из закона сохранения импульса

$$M = \frac{m(V_1 \pm V_1')}{V_2} = \frac{mV_1\left(1 \pm \sqrt{1-\eta}\right)}{V_2}\,.$$

Знак в выражении зависит от направления движения первого шарика после соударения. Кинетическая энергия второго шарика после соударения

$$K_2' = \eta m V_1^2\,.$$

Из этого следует, что

$$M = \frac{m\left(1 \pm \sqrt{1-\eta}\right)^2}{\eta}\,.$$

Ответ: $M = \frac{m\left(1\pm\sqrt{1-\eta}\right)^2}{\eta}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для равенства кинетических энергий до и после соударения	**1**
Показана необходимость нулевой скорости второго шарика до соударения	**1**
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**4**

5. (6 баллов) Проводящая сфера имеет радиус R. Давление на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов, равно p. Определите заряд сферы.

<u>Указание.</u> Площадь сферы равна $4\pi R^2$.

Возможное решение. Выделим на поверхности сферы малый элемент площадью ΔS. Заряд этого элемента равен

$$\Delta Q = \frac{Q\Delta S}{4\pi R^2}\,.$$

Поскольку элемент малый, его кривизной можно пренебречь, считая его участком плоскости. Напряженность электрического поля, создаваемая зарядом этого элемента, равна

$$E_1 = \frac{\Delta Q}{2\varepsilon_0 \Delta S} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля, создаваемая вблизи поверхности сферы всем зарядом сферы, равна

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Значит, вклад поля всех зарядов сферы за вычетом заряда ΔQ в суммарную напряженность поля равен

$$E_2 = E_1 = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0}.$$

Сила, с которой поле всех зарядов сферы за вычетом заряда ΔQ действует на заряд ΔQ, равна

$$F = E_2 \Delta Q = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \Delta S}{4\pi R^2},$$

а давление на малый элемент

$$p = \frac{Q^2}{32\varepsilon_0 \pi^2 R^4}.$$

Заряд сферы равен

$$Q = 4\pi R^2 \sqrt{2\varepsilon_0 p}.$$

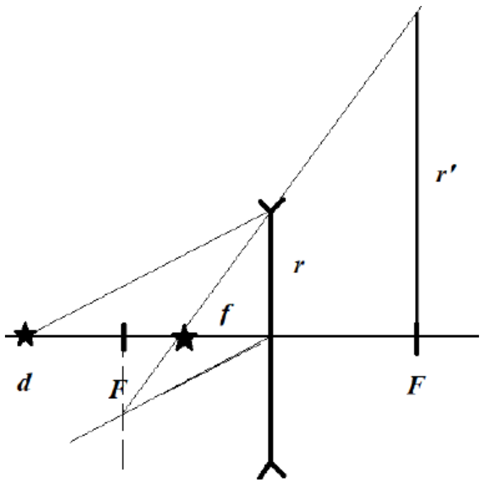
Ответ: $Q = 4\pi R^2 \sqrt{2\varepsilon_0 p}.$

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для заряда элемента сферы	**1**
Записаны выражения для напряженностей E_1 и E_2	**2**
Записаны выражение для силы взаимодействия и давления	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**6**

6. (4 балла) За рассеивающей тонкой линзой диаметром D в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии d от линзы большем фокусного помещен точечный источник света. Диаметр светового пятна на экране равен D'. Определите фокусное расстояние линзы.

Возможное решение. Рассмотрим чертеж. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что



$$\frac{f}{r} = \frac{F + f}{r'}.$$

Используя уравнение для тонкой линзы, получим:

$$F = \frac{d(D' - 2D)}{D}.$$

Ответ: $F = \frac{d(D'-2D)}{D}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Построен чертеж	**1**
Рассмотрены подобные треугольники	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**4**

10 класс

Вариант 7

1. (6 баллов) Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью V_0 = 10 м/с, второй шарик одновременно с запуском первого брошен вниз с начальной скоростью u = 4 м/с с высоты H = 9 м. В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Шарики продолжают движение. При отскоке первого шарика от поверхности Земли его механическая энергия уменьшается в $k = 1{,}96$ раза. Определите скорость второго шарика непосредственно перед вторым соударением с первым шариком. Считайте, что значение ускорения свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение. При всех расчетах примем, что вертикальная ось координат направлена вверх. Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}$$

$$h_1 = H - u\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}.$$

Здесь h_1 – высота, на которой столкнулись шарики, τ_1 – время полета шариков до столкновения, g – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H\frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{V_0 + u}\right)^2 = 4{,}36 \text{ м}.$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g\tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V_{21} = -u - g\tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекции их скоростей после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяются как

$$V'_{11} = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V'_{21} = V_{11} = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u} \approx 3{,}57 \text{ м/с}.$$

Заметим, что дальнейшие преобразования, проводимые в общем виде, требуют излишне трудоемких операций, поэтому будем поводить численные расчеты.

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V''_{11} = \sqrt{u^2 + 2gH} = 14 \text{ м/с}.$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V''_{11} = V'_{11} + g\tau'_1 .$$

Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau'_1 = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u} \approx 0{,}36 \text{ с}.$$

Проекция скорости второго шарика в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$V_{22} = V'_{21} - g\tau'_1 = V_0 + u - \sqrt{u^2 + 2gH} = 0 .$$

Высота, на которой будет находиться второй шарик в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$h'_1 = h_1 + V'_{21}\tau'_1 - \frac{g\tau'^2_1}{2} = 5 \text{ м} .$$

Скорость первого шарика сразу после отскока будет равна

$$V_{12} = \frac{V''_{11}}{\sqrt{k}} = 10 \ \frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

Искомое время полета первого шарика от отскока от поверхности Земли до второго соударения с другим шариком будет равно

$$\tau_2 = \frac{h'_1}{V_{12} + |V_{22}|} = 0{,}5 \text{ с} .$$

Перед вторым соударением скорость второго шарика будет равна

$$V'_{22} = V_{22} + g\tau_2 \approx 6{,}03 \text{ м/с} .$$

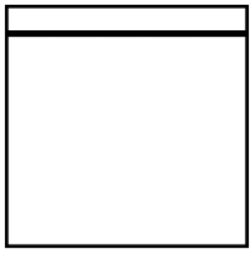
Ответ: $V'_{12} \approx 6{,}03 \text{ м/с}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для высоты столкновения шариков	**1**

Записано выражение для скоростей шариков после столкновения	**1**
Записано выражение для расчета времени полета	**1**
Записаны выражения для расчета начальных высот и скоростей для второго столкновения	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**

2. (4 балла) Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет a = 1,2 м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен глицерином. Затем в пространство над поршнем закачивают ν = 0,5 моль идеального газа. На какое расстояние сместился поршень? Температуры газа и глицерина одинаковы, постоянны и равны t = 17 °С. Значение универсальной газовой постоянной R = 8,31 Дж/(К·моль). Сжимаемость глицерина (относительное изменение объема при изотермическом увеличении давления) составляет $\varepsilon = 2{,}2\cdot10^{-10}$ Па$^{-1}$.



Возможное решение. При движении поршня относительное изменение объема составляет

$$\delta = \frac{a^2\Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a}\,.$$

Начальное давление глицерина на верхнюю крышку отсутствует, по окончании заполнения газом пространства над поршнем давление там составит

$$p = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\Delta h}{a\varepsilon}\,.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для количества вещества получим:

$$\nu = \frac{pV'}{RT} = \frac{a(\Delta h)^2}{\varepsilon RT} \approx 0{,}3\ \text{моль}\,.$$

Поршень сдвинется на расстояние

$$\Delta h = \sqrt{\frac{\nu\varepsilon RT}{a}} \approx 0{,}225\ \text{мм}\,.$$

Ответ: $\Delta h = \sqrt{\frac{\nu\varepsilon RT}{a}} \approx 0{,}225\ \text{мм}\,.$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Получено выражение для относительного изменения объема	**1**
Получено выражение для давления	**1**
Получен ответ в общем виде	**1**
Получен окончательный ответ в виде числа	**1**
Всего баллов	**4**

3. (6 баллов) В вертикальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой M, находится газ. Газ нагревают, при этом поршень двигается из состояния покоя равноускоренно с ускорением a. За время нагрева поршень выходит из сосуда, а затем продолжает движение вертикально вверх в свободном пространстве. Средняя мощность нагревателя равна P. Определите время подъема поршня до максимальной высоты над краем сосуда. Внутренняя энергия одного моля газа равна $U = cT$. Ускорение свободного падения g. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

Возможное решение. Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c\Delta T\ .$$

Здесь p – давление газа, V – его объем, ν – количество вещества газа.

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R\Delta T\ .$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2}\,.$$

Значит,

$$\nu\Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R}\,.$$

Количество переданной теплоты:

$$Q = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{cM(a\tau)^2}{2R} = \frac{M(a\tau)^2}{2}\left(1 + \frac{c}{R}\right).$$

За время движения в цилиндре поршень приобрел скорость

$$V = a\tau\ .$$

Тогда

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{MaV}{2}\left(1 + \frac{c}{R}\right).$$

Учитывая, что

$$H = \frac{V^2}{2g},$$

в окончательной форме получаем

$$H = \frac{2P^2}{M^2 a^2 g \left(1 + \frac{c}{R}\right)^2}.$$

Ответ: $H = \frac{2P^2}{M^2 a^2 g \left(1 + \frac{c}{R}\right)^2}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для первого начала термодинамики	**1**
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	**1**
Записана теорема об изменении кинетической энергии	**1**
Получено выражение для связи мощности и скорости поршня	
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**

4. (4 балла) Два маленьких шарика испытывают абсолютно упругое столкновение. После столкновения первый шар потерял долю η своей кинетической энергии. Масса второго шарика M. Определите массу первого шара.

Возможное решение. Покажем, что при заданных условиях и не указанных дополнительных условиях решение существует только в случае, когда второй шарик покоился. При абсолютно упругом соударении суммарная кинетическая энергия шаров не изменяется. Тогда в лабораторной системе отсчета выполняется условие:

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2'.$$

Это можно записать как

$$\frac{\eta m V_1^2}{2} = \frac{M V_2'^2}{2} - \frac{M V_2^2}{2} \qquad (*)$$

Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся со скоростью второго шарика до соударения. В этой системе отсчета

$$\frac{m(V_1 - V_2)^2}{2} = \frac{m(V_1' - V_2)^2}{2} + \frac{M(V_2' - V_2)^2}{2}.$$

Выполнив преобразования, получим:

$$mV_1^2 - mV_1'^2 - MV_2'^2 = 2V_2(MV_2' + mV_1' - MV_2 - mV_1)\,.$$

Выражение в скобках равно нулю, так как это разность суммарных импульсов шариков до и после соударения. Тогда

$$\eta m V_1^2 = MV_2'^2\,.$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (*), делаем вывод, что при заданных условиях решение существует только в случае, когда второй шарик покоился.

Кинетическая энергия первого шарика после удара равна

$$K_1' = \frac{mV_1^2}{2}(1-\eta)\,.$$

Его скорость после соударения равна

$$V_1' = V_1\sqrt{1-\eta}\,.$$

Из закона сохранения импульса

$$M = \frac{m(V_1 \pm V_1')}{V_2} = \frac{mV_1\left(1 \pm \sqrt{1-\eta}\right)}{V_2}\,.$$

Знак в выражении зависит от направления движения первого шарика после соударения. Кинетическая энергия второго шарика после соударения

$$K_2' = \eta m V_1^2\,.$$

Из этого следует, что

$$m = \frac{M\eta}{\left(1 \pm \sqrt{1-\eta}\right)^2}$$

Ответ: $m = \frac{M\eta}{\left(1\pm\sqrt{1-\eta}\right)^2}$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для равенства кинетических энергий до и после соударения	**1**
Показана необходимость нулевой скорости второго шарика до соударения	**1**
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**4**

5. (6 баллов) Два одинаковых воздушных конденсатора ёмкостью C каждый заряжены до напряжения U. Один из них в заряженном состоянии погружают в диэлектрическую жидкость с проницаемостью ε, после чего конденсаторы соединяют параллельно. Определите количество теплоты, выделившееся при соединении конденсаторов.

Возможное решение. При погружении первого конденсатора в жидкость его заряд не изменяется, а емкость возрастает в ε раз. Напряжение на конденсаторе уменьшается в ε раз. При параллельном соединении конденсаторов напряжения на них становятся равными друг другу за счет перетекания заряда с одного конденсатора на другой при сохранении суммарного заряда конденсаторов. Энергия системы конденсаторов до соединения равна

$$W_1 = \frac{CU^2}{2\varepsilon} + \frac{CU^2}{2} = \frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon}.$$

Напряжение на соединенных параллельно конденсаторах равно

$$U' = \frac{2U}{\varepsilon + 1}.$$

Энергия соединенных параллельно конденсаторов равна

$$W_2 = \frac{2CU^2\varepsilon}{(\varepsilon + 1)^2} + \frac{2CU^2}{(\varepsilon + 1)^2} = \frac{2CU^2}{\varepsilon + 1}.$$

Количество выделившейся теплоты:

$$Q = \Delta W = \frac{CU^2(\varepsilon - 1)^2}{2\varepsilon(\varepsilon + 1)}.$$

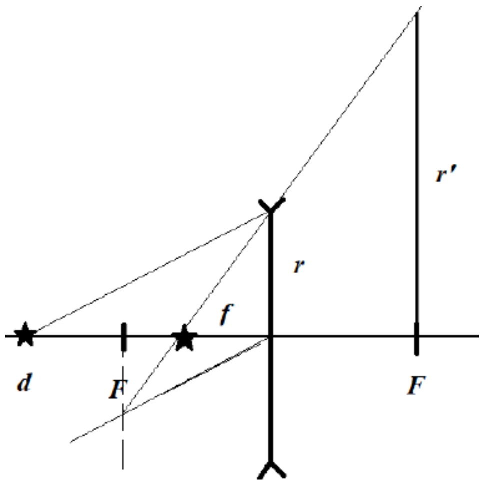
Ответ: $Q = \frac{CU^2(\varepsilon-1)^2}{2\varepsilon(\varepsilon+1)}$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для энергии системы до соединения	**2**
Записано выражение для энергии системы после соединения	**2**
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**

6. (4 балла) За рассеивающей тонкой линзой с фокусным расстоянием F в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии $d > F$ от линзы помещен точечный источник света. Диаметр светового пятна на экране равен D'. Определите диаметр линзы.

Возможное решение. Рассмотрим чертеж. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что



$$\frac{f}{r} = \frac{F+f}{r'}.$$

Используя уравнение для тонкой линзы, получим:

$$D = \frac{D'd}{F+2d}.$$

Ответ: $D = \frac{D\prime d}{F+2d}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Построен чертеж	**1**
Рассмотрены подобные треугольники	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**4**

10 класс

Вариант 8

1. (6 баллов) Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью V_0 = 11 м/с, второй шарик одновременно с запуском первого брошен вниз с начальной скоростью u = 1 м/с с высоты H = 10 м. В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Шарики продолжают движение. При отскоке первого шарика от поверхности Земли его механическая энергия уменьшается в k = 1,96 раза. Определите максимальную высоту подъема второго шарика после второго соударения с первым шариком. Считайте, что значение ускорения свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение. При всех расчетах примем, что вертикальная ось координат направлена вверх. Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}$$

$$h_1 = H - u\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}.$$

Здесь h_1 – высота, на которой столкнулись шарики, τ_1 – время полета шариков до столкновения, g – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H\frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{V_0 + u}\right)^2 = 5{,}69 \text{ м}.$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g\tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V_{21} = -u - g\tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекции их скоростей после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяются как

$$V'_{11} = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V'_{21} = V_{11} = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u} \approx 2{,}67 \text{ м/с}.$$

Заметим, что дальнейшие преобразования, проводимые в общем виде, требуют излишне трудоемких операций, поэтому будем поводить численные расчеты.

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V''_{11} = \sqrt{u^2 + 2gH} \approx 14{,}18 \text{ м/с}.$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V''_{11} = V'_{11} + g\tau'_1 .$$

Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau'_1 = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u} \approx 0{,}48 \text{ с}.$$

Проекция скорости второго шарика в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$V_{22} = V'_{21} - g\tau'_1 = V_0 + u - \sqrt{u^2 + 2gH} = -2{,}18 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Высота, на которой будет находиться второй шарик в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$h'_1 = h_1 + V'_{21}\tau'_1 - \frac{g\tau_1'^2}{2} \approx 5{,}82 \text{ м} .$$

Скорость первого шарика сразу после отскока будет равна

$$V_{12} = \frac{V''_{11}}{\sqrt{k}} \approx 10{,}13 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Время полета первого шарика от отскока от поверхности Земли до второго соударения с другим шариком будет равно

$$\tau_2 = \frac{h'_1}{V_{12} + |V_{22}|} \approx 0{,}47 \text{ с} .$$

Скорость первого шарика перед вторым столкновением и скорость второго шарика после столкновения будут равны

$$V'_{12} = V_{12} - g\tau_2 = V_{12} - \frac{gh'_1}{V_{12} + |V_{22}|} \approx 5{,}4 \text{ м/с} .$$

Высота второго соударения шариков будет равна

$$h_2 = h'_1 \frac{V_{12}}{V_{12} + |V_{22}|} - \frac{g}{2}\left(\frac{h'_1}{V_{12} + |V_{22}|}\right)^2 \approx 3{,}67 \text{ м} .$$

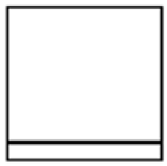
Максимальная высота подъема второго шарика будет равна

$$h_m = h_2 + \frac{V_{12}'^2}{2g} \approx 5{,}13 \text{ м} .$$

Ответ: $h_m = h_2 + \frac{V_{12}'^2}{2g} \approx 5{,}13$ м .

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для высоты столкновения шариков	**1**
Записано выражение для скоростей шариков после столкновения	**2**
Записано выражение для расчета времени полета	**1**
Записаны выражения для расчета начальных высот и скоростей для второго столкновения	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	**1**
Всего баллов	**6**



2. (4 балла) Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет a = 1 м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен минеральным индустриальным маслом. В пространство под поршнем закачивают ν = 0,6 молей идеального газа. При этом поршень сдвинулся на Δh = 1 мм. Какова была температура масла? Температуры газа и масла одинаковы и, постоянны в процессе заполнения пространства газом. Значения универсальной газовой постоянной R = 8,31 Дж/(К·моль), ускорения свободного падения g = 10 м/с^2 плотности масла ρ = 890 кг/м^3. Сжимаемость масла (относительное изменение объема при изотермическом изменении давления) составляет ε = 6,8·10^{-10} Па$^{-1}$.

Возможное решение. При движении поршня относительное изменение объема составляет

$$\delta = \frac{a^2 \Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a} .$$

Начальное давление воды на дно равно

$$p' = \rho g a .$$

По окончании заполнения неоном пространства под поршнем давление там составит

$$p = p' + \frac{\delta}{\varepsilon} = \rho g a + \frac{\Delta h}{a \varepsilon} .$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для получим:

$$T = \frac{pV'}{\nu R} = \frac{a^3 \Delta h}{\nu R}\left(\rho g + \frac{\Delta h}{\varepsilon a^2}\right) \approx 297 \text{ К}.$$

Ответ: $T = \frac{pV'}{\nu R} = \frac{a^3 \Delta h}{\nu R}\left(\rho g + \frac{\Delta h}{\varepsilon a^2}\right) \approx 297 \text{ К}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Получено выражение для относительного изменения объема	**1**
Получено выражение для давления	**1**
Получен ответ в общем виде	**1**
Получен окончательный ответ в виде числа	**1**
Всего баллов	**4**

3. (6 баллов) В вертикальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой M, находится идеальный газ. Газ нагревают, при этом поршень двигается из состояния покоя равноускоренно с ускорением a. За время нагрева поршень выходит из сосуда, а затем продолжает движение вертикально вверх в свободном пространстве. Средняя мощность нагревателя равна P. Определите максимальную высоту подъема поршня над краем сосуда. Молярная теплоемкость газа в процессе при постоянном объеме равна $c_{\mu V}$. Ускорение свободного падения g. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

Решение **Возможное решение.** Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c_{\mu V} \Delta T.$$

Здесь p – давление газа, V – его объем, ν – количество вещества газа.

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R \Delta T.$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2}.$$

Значит,

$$\nu \Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R}.$$

Количество переданной теплоты:

$$Q = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{cM(a\tau)^2}{2R} = \frac{M(a\tau)^2}{2}\left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R}\right).$$

За время движения в цилиндре поршень приобрел скорость

$$V = a\tau\ .$$

Тогда

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{MaV}{2}\left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R}\right).$$

Учитывая, что

$$V = g\tau'\ ,$$

в окончательной форме получаем

$$\tau' = \frac{2P}{Mag\left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R}\right)}.$$

Ответ: $\tau' = \frac{2P}{Mag\left(1+\frac{c_{\mu V}}{R}\right)}$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для первого начала термодинамики	**1**
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	**1**
Записана теорема об изменении кинетической энергии	**1**
Получено выражение для связи мощности и скорости поршня	
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**

4. (4 балла) Два маленьких шарика испытывают абсолютно упругое столкновение. После столкновения первый шар потерял долю η своей кинетической энергии. Определите отношение массы первого шара к массе второго шарика.

Возможное решение. Покажем, что при заданных условиях и не указанных дополнительных условиях решение существует только в случае, когда второй шарик покоился. При абсолютно упругом соударении суммарная кинетическая энергия шаров не изменяется. Тогда в лабораторной системе отсчета выполняется условие:

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2'\ .$$

Это можно записать как

$$\frac{\eta m V_1^2}{2} = \frac{MV_2'^2}{2} - \frac{MV_2^2}{2} \qquad (*)$$

Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся со скоростью второго шарика до соударения. В этой системе отсчета

$$\frac{m(V_1 - V_2)^2}{2} = \frac{m(V_1' - V_2)^2}{2} + \frac{M(V_2' - V_2)^2}{2}\,.$$

Выполнив преобразования, получим:

$$mV_1^2 - mV_1'^2 - MV_2'^2 = 2V_2(MV_2' + mV_1' - MV_2 - mV_1)\,.$$

Выражение в скобках равно нулю, так как это разность суммарных импульсов шариков до и после соударения. Тогда

$$\eta m V_1^2 = MV_2'^2\,.$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (*), делаем вывод, что при заданных условиях решение существует только в случае, когда второй шарик покоился.

Кинетическая энергия первого шарика после удара равна

$$K_1' = \frac{mV_1^2}{2}(1-\eta)\,.$$

Его скорость после соударения равна

$$V_1' = V_1\sqrt{1-\eta}\,.$$

Из закона сохранения импульса

$$M = \frac{m(V_1 \pm V_1')}{V_2} = \frac{mV_1\left(1 \pm \sqrt{1-\eta}\right)}{V_2}\,.$$

Знак в выражении зависит от направления движения первого шарика после соударения. Кинетическая энергия второго шарика после соударения

$$K_2' = \eta m V_1^2\,.$$

Из этого следует, что

$$k = \frac{\eta}{\left(1+\sqrt{1-\eta}\right)^2}$$

Ответ: $k = \frac{\eta}{\left(1+\sqrt{1-\eta}\right)^2}$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для равенства кинетических энергий до и после соударения	**1**
Показана необходимость нулевой скорости второго шарика до соударения	**1**

Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**4**

5. (6 баллов) Два одинаковых воздушных конденсатора заряжены до напряжения U каждый. Один из них в заряженном состоянии погружают в диэлектрическую жидкость с проницаемостью ε, после чего конденсаторы соединяют параллельно. Количество теплоты, выделившееся при соединении конденсаторов, равно Q. Определите емкость конденсаторов.

Возможное решение. При погружении первого конденсатора в жидкость его заряд не изменяется, а емкость возрастает в ε раз. Напряжение на конденсаторе уменьшается в ε раз. При параллельном соединении конденсаторов напряжения на них становятся равными друг другу за счет перетекания заряда с одного конденсатора на другой при сохранении суммарного заряда конденсаторов. Энергия системы конденсаторов до соединения равна

$$W_1 = \frac{CU^2}{2\varepsilon} + \frac{CU^2}{2} = \frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon}.$$

Напряжение на соединенных параллельно конденсаторах равно

$$U' = \frac{2U}{\varepsilon + 1}.$$

Энергия соединенных параллельно конденсаторов равна

$$W_2 = \frac{2CU^2\varepsilon}{(\varepsilon + 1)^2} + \frac{2CU^2}{(\varepsilon + 1)^2} = \frac{2CU^2}{\varepsilon + 1}.$$

Количество выделившейся теплоты:

$$Q = \Delta W = \frac{CU^2(\varepsilon - 1)^2}{2\varepsilon(\varepsilon + 1)}.$$

Из этого выражения получаем

$$C = \frac{2\varepsilon(\varepsilon + 1)Q}{U^2(\varepsilon - 1)^2}$$

Ответ: $C = \frac{2\varepsilon(\varepsilon+1)Q}{U^2(\varepsilon-1)^2}$

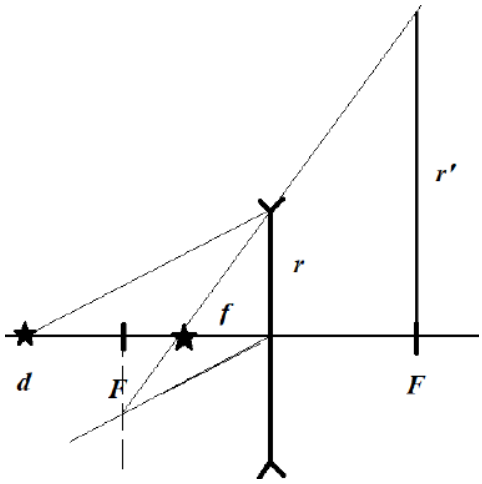
Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для энергии системы до соединения	**2**
Записано выражение для энергии системы после соединения	**2**
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**

Всего баллов	6

6. (4 балла) За рассеивающей тонкой линзой с фокусным расстоянием F и диаметром D в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии большем фокусного от линзы помещен точечный источник света. диаметр светового пятна на экране равен D'. Определите расстояние от линзы до источника света.

Возможное решение. Рассмотрим чертеж. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что



$$\frac{f}{r} = \frac{F+f}{r'}.$$

Используя уравнение для тонкой линзы, получим:

$$d = \frac{DF}{D' - 2D}.$$

Ответ: $d = \frac{DF}{D\prime - 2D}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Построен чертеж	**1**
Рассмотрены подобные треугольники	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**4**