Математика. Вариант-11
9 класс

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^6 - 22x^2 + \sqrt{21} = 0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $x^6 - 21x^2 - x^2 + \sqrt{21} = 0$.

тогда

$$x^2\left(x^4 - 21\right) - \left(x^2 - \sqrt{21}\right) = 0,$$

$$x^2\left(x^2 - \sqrt{21}\right)\left(x^2 + \sqrt{21}\right) - \left(x^2 - \sqrt{21}\right) = 0,$$

$$\left(x^2 - \sqrt{21}\right)\left(x^4 + x^2\sqrt{21} - 1\right) = 0,$$

$x^2 - \sqrt{21} = 0,$ или $x^4 + x^2\sqrt{21} - 1 = 0,$

$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{21}$; $\qquad x^2 = \dfrac{-\sqrt{21}+5}{2}$,

т.к. $-\dfrac{\sqrt{21}+5}{2} < 0$, уравнение $x^2 + \dfrac{\sqrt{21}+5}{2} = 0$ действительных корней не имеет, тогда

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{21}+5}{2}}.$$

Ответ. $\left\{\pm\sqrt[4]{21}; \pm\sqrt{\dfrac{-\sqrt{21}+5}{2}}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Упростить выражение $2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{222\ldots2}_{2021}$.

Решение. Перепишем сумму $2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{222\ldots2}_{2021}$ в виде

$$2\cdot1 + 2\cdot11 + 2\cdot111 + \ldots + 2\cdot\underbrace{111\ldots1}_{2021} = 2\cdot\frac{10-1}{9} + 2\cdot\frac{10^2-1}{9} + 2\cdot\frac{10^3-1}{9} + \ldots + 2\cdot\frac{10^{2021}-1}{9} =$$

и применим формулу геометрической прогрессии:

$$= \frac{2\cdot(10+10^2+10^3+\ldots+10^{2021}) - 2\cdot2021}{9} = \frac{2\cdot\dfrac{10\cdot\left(10^{2021}-1\right)}{9} - 2\cdot2021}{9} =$$

$$= \frac{20\cdot\left(10^{2021}-1\right)}{81} - \frac{2\cdot2021}{9} = \frac{2\cdot10^{2022}-36398}{81} = \frac{20\cdot10^{2021}-36398}{81}$$

Ответ. $\dfrac{20\cdot\left(10^{2021}-1\right)}{81} - \dfrac{2\cdot2021}{9} = \dfrac{2\cdot10^{2022}-36398}{81} = \dfrac{20\cdot10^{2021}-36398}{81}$.

Задание 3. (15 баллов) Точка A лежит на стороне LM треугольника KLM с углом 120^0 при вершине K. В треугольники AKL и AKM вписаны окружности с центрами F и

O соответственно. Найти радиус окружности, описанной около треугольника FKO, если $AO = 2$, $AF = 7$.

Решение.

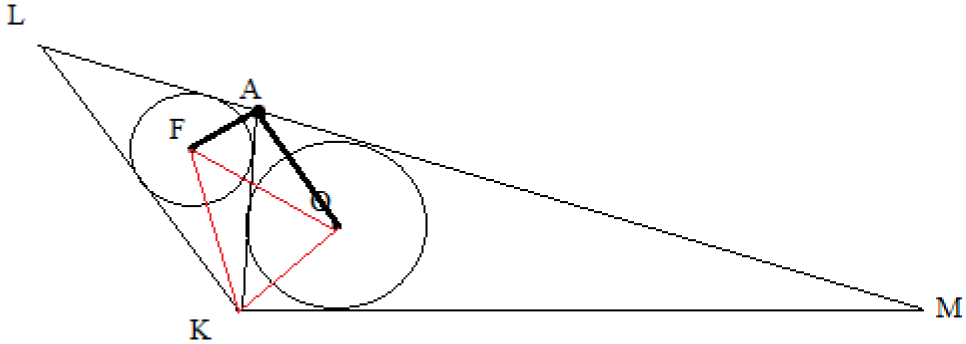

Рис. 1

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому лучи AF и AO являются биссектрисами $\angle LAK$ и $\angle MAK$ соответственно.

Угол между биссектрисами смежных углов является прямым, по следствию из теоремы о смежных углах $\Rightarrow \angle FAO = 90^0 \Rightarrow \Delta FAO$ – прямоугольный.

По теореме Пифагора найдем FO: $FO = \sqrt{AF^2 + AO^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$.

Лучи KF и KO являются биссектрисами $\angle LKA$ и $\angle MKA$ соответственно по теореме о свойстве двух касательных к окружности, тогда имеем

$$\angle FKO = \angle FKA + \angle OKA = \frac{1}{2}\angle LKA + \frac{1}{2}\angle MKA = \frac{1}{2}\angle LKM = \frac{1}{2}\cdot 120^0 = 60^0.$$

По теореме синусов для ΔFKO: $\dfrac{FO}{\sin\angle FKO} = \dfrac{FK}{\sin\angle FOK} = \dfrac{KO}{\sin\angle KFO} = 2R$.

Подставим известные данные: $\dfrac{\sqrt{53}}{\sin 60^0} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{53}}{2\sin 60^0} = \dfrac{\sqrt{53}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\dfrac{53}{3}} = \dfrac{\sqrt{159}}{3}$.

Замечание. *Вместо теоремы синусов может быть использована теорема о вписанных и центральных углах.*

Ответ. $R = \dfrac{\sqrt{159}}{3}$.

Задание 4. (20 баллов) В последовательности натуральных чисел каждое следующее, начиная с третьего, равно модулю разности двух предыдущих. Определить, какое наибольшее количество элементов может содержать такая последовательность, если значение каждого их них не превосходит 2022.

Решение.

Чтобы длина последовательности была наибольшей, необходимо чтобы наибольшие элементы стояли в начале последовательности. Рассмотрим варианты:

1) n, $n-1$, 1, $n-1$, $n-2$, $n-3$, 1, $n-4$, $n-5$, 1,…, 2, 1, 1;
2) n, 1, $n-1$, $n-2$, 1, $n-3$, $n-4$, 1,…, 2, 1, 1.
3) 1, n, $n-1$, 1, $n-2$, 1, $n-3$, $n-4$, 1,…, 2, 1, 1.
4) $n-1$, n, 1, $n-1$, $n-2$, 1, $n-3$, $n-4$, 1,…, 2, 1, 1.

Т.о. длина последовательности, удовлетворяющей условию задания, будет наибольшей, если в ней наибольший член – второй, а первый на 1 меньше. Эта последовательность будет иметь вид:

$$n-1,\ n,\ 1,\ n-1,\ n-2,\ 1,\ n-3,\ n-4,\ 1,\dots,\ 2,\ 1,\ 1.$$

Для $1 < n \le 4$ длину такой последовательности можно определить прямым счетом ($l_2 = 4$, $l_3 = 6$, $l_4 = 7$), а для больших n докажем, что $l_{n+2} = l_n + 3$.

Составим последовательность с наибольшим членом $n+2$:

$n+1$, $n+2$, 1, $n+1$, n, 1, $n-1$, $n-2$, 1, $n-3$, $n-4$, 1, …, 2, 1, 1.

Т.е. длина такой последовательности составит:

$$l_n = \frac{3n}{2} + 1 = \frac{3n+2}{2} \text{ для четных } n,$$

$$l_n = \frac{3(n-1)}{2} + 3 = \frac{3n+3}{2} \text{ для нечетных } n.$$

Тогда, при $n = 2022$

$$l_{2022} = \frac{3 \cdot 2022 + 2}{2} = 3034.$$

Ответ. 3034.

Задание 5. (20 баллов) В центре круглого поля стоит домик геологов. От него отходят 6 прямых дорог, разделяющих поле на 6 равных секторов. Два геолога отправляются в путешествие из своего домика со скоростью 5 км/ч по произвольно выбранной каждым из них дороге. Определить с какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 8 км.

Решение.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по соседним дорогам (рис. 4).

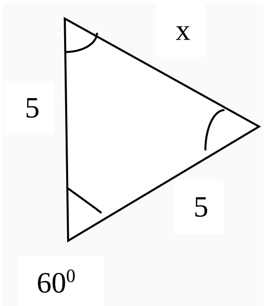

Рис. 4

Т.к. треугольник равносторонний, то $x = 5$, что меньше 8.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по дорогам, расположенным через одну (рис 5).

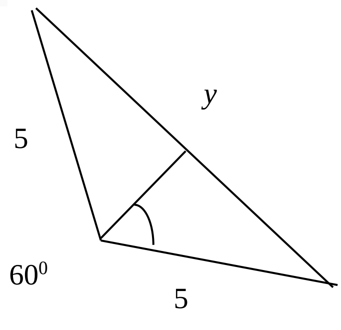

Рис. 5

$\frac{y}{2} = 5\sin 60° = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $y = 5\sqrt{3}$, что больше 8.

Т.о., расстояние будет больше 8 км, если геологи не выберут одинаковые или соседние дороги.

Возможные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 6 дорог, второй геолог тоже, т.е. $n = 6 \cdot 6 = 36$

Благоприятные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 6 дорог, второй геолог – только 3 (не ту же и не соседние дороги), т.е. $n = 6 \cdot 3 = 18$.

Тогда, $P = \dfrac{18}{36} = 0{,}5$.

Ответ. 0,5.

Задание 6. (30 баллов) Три компрессорные станции расположены не на одной прямой, но соединены прямолинейными дорогами. Расстояние от первой станции до третьей через вторую вчетверо длиннее прямолинейного пути между ними; расстояние от первой станции до второй через третью на a км длиннее прямолинейного пути; расстояние от второй станции до третьей через первую равно 85 км. Определить все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение компрессорных станций. Вычислить расстояния между компрессорными станциями при $a = 5$.

Решение.

Обозначим за x – расстояние между первой и второй компрессорными станциями, y – расстояние между второй и третьей, а z – расстояние между первой и третьей (рис. 6).

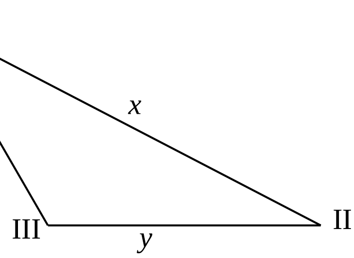

Рис.6

В соответствии с условиям задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 4z, \\ z + y = x + a, \\ x + z = 85. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выразим z: $z = 85 - x$, получим систему

$$\begin{cases} x + y = 4(85 - x), \\ 85 - x + y = x + a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + y = 340, \\ 2x - y = 85 - a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + y = 340, \\ 7x = 425 - a. \end{cases}$$

Тогда, $x = \dfrac{425 - a}{7}$, $y = \dfrac{255 + 5a}{7}$ $z = \dfrac{170 + a}{7}$.

Определим все значения a, для которых были бы возможным найденные значения x, y и z. Используя неравенство треугольника (любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон), то составим систему неравенств для оценки значения параметра a:

$$\begin{cases} x < y + z, \\ y < x + z, \\ z < x + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{425-a}{7} < \dfrac{255+5a}{7} + \dfrac{170+a}{7}, \\ \dfrac{255+5a}{7} < \dfrac{425-a}{7} + \dfrac{170+a}{7}, \\ \dfrac{170+a}{7} < \dfrac{425-a}{7} + \dfrac{255+5a}{7}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $0 < a < 68$.

Вычислим при $a = 5$ расстояния между компрессорными станциями: $x = \dfrac{425-5}{7} = 60$ км, $y = \dfrac{255+25}{7} = 40$ км, $z = \dfrac{170+5}{7} = 25$ км.

Ответ. $0 < a < 68$; 60 км, 40 км, 25 км.

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^6-22x^2-\sqrt{21}=0$.
Решение.
Перепишем уравнение в виде $x^6-21x^2-x^2-\sqrt{21}=0$.
тогда
$x^2\left(x^4-21\right)-\left(x^2+\sqrt{21}\right)=0,$
$x^2\left(x^2-\sqrt{21}\right)\left(x^2+\sqrt{21}\right)-\left(x^2+\sqrt{21}\right)=0,$
$\left(x^2+\sqrt{21}\right)\left(x^4-x^2\sqrt{21}-1\right)=0,$
$x^2+\sqrt{21}\neq 0$ при любом x.
$x^4-x^2\sqrt{21}-1=0,$
$x^2=\dfrac{\sqrt{21}+5}{2}$, т.к. $\dfrac{\sqrt{21}-5}{2}<0$, уравнение $x^2-\dfrac{\sqrt{21}-5}{2}=0$ действительных корней не имеет, тогда

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{21}+5}{2}}.$$

Ответ. $\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{21}+5}{2}}$.

Задание 2. (10 баллов) Упростить выражение $3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{2021}$.

Решение. Перепишем сумму $3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{2021}$ в виде

$$3\cdot1+3\cdot11+3\cdot111+\ldots+3\cdot\underbrace{111\ldots1}_{2021}=3\cdot\frac{10-1}{9}+3\cdot\frac{10^2-1}{9}+3\cdot\frac{10^3-1}{9}+\ldots+3\cdot\frac{10^{2021}-1}{9}=$$

и применим формулу геометрической прогрессии:

$$=\frac{(10+10^2+10^3+\ldots+10^{2021})-2021}{3}=\frac{\frac{10\cdot\left(10^{2021}-1\right)}{9}-2021}{3}=$$

$$=\frac{10\cdot\left(10^{2021}-1\right)}{27}-\frac{2021}{3}=\frac{10^{2022}-18199}{27}.$$

Ответ. $\dfrac{10\cdot\left(10^{2021}-1\right)}{27}-\dfrac{2021}{3}=\dfrac{10^{2022}-18199}{27}$.

Задание 3. (15 баллов) Точка A лежит на стороне LM треугольника KLM с углом 60^0 при вершине K. В треугольники AKL и AKM вписаны окружности с центрами F и O соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника FKO, если $AO=7$, $AF=4$.
Решение.

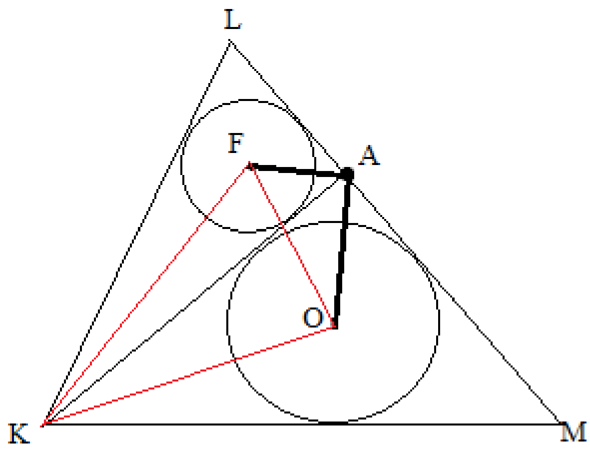

Рис. 1

Цент окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому лучи AF и AO являются биссектрисами $\angle LAK$ и $\angle MAK$ соответственно.

Угол между биссектрисами смежных углов является прямым, по следствию из теоремы о смежных углах $\Rightarrow \angle FAO = 90^0 \Rightarrow \Delta FAO$ - прямоугольный.

По теореме Пифагора найдем FO: $FO = \sqrt{AF^2 + AO^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$.

Лучи KF и KO являются биссектрисами $\angle LKA$ и $\angle MKA$ соответственно по теореме о свойстве двух касательных к окружности, тогда имеем

$$\angle FKO = \angle FKA + \angle OKA = \frac{1}{2}\angle LKA + \frac{1}{2}\angle MKA = \frac{1}{2}\angle LKM = \frac{1}{2}\cdot 60^0 = 30^0.$$

По теореме синусов для ΔFKO: $\dfrac{FO}{\sin\angle FKO} = \dfrac{FK}{\sin\angle FOK} = \dfrac{KO}{\sin\angle KFO} = 2R$.

Подставим известные данные: $\dfrac{\sqrt{65}}{\sin 30^0} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{65}}{2\sin 30^0} = \dfrac{\sqrt{65}}{2\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{65}$.

Замечание. *Вместо теоремы синусов может быть использована теорема о вписанных и центральных углах.*

Ответ. $R = \sqrt{65}$.

Задание 4. (20 баллов) В последовательности натуральных чисел каждое следующее, начиная с третьего, равно модулю разности двух предыдущих. Определить, какое наибольшее количество элементов может содержать такая последовательность, если значение каждого их них не превосходит 2021.

Решение.

Чтобы длина последовательности была наибольшей, необходимо чтобы наибольшие элементы стояли в начале последовательности. Рассмотрим варианты:

1) n, $n-1$, 1, $n-1$, $n-2$, $n-3$, 1, $n-4$, $n-5$, 1,…, 2, 1, 1;
2) n, 1, $n-1$, $n-2$, 1, $n-3$, $n-4$, 1,…, 2, 1, 1.
3) 1, n, $n-1$, 1, $n-2$, 1, $n-3$, $n-4$, 1,…, 2, 1, 1.
4) $n-1$, n, 1, $n-1$, $n-2$, 1, $n-3$, $n-4$, 1,…, 2, 1, 1.

Т.о., длина последовательности, удовлетворяющей условию задания, будет наибольшей, если в ней наибольший член – второй, а первый на 1 меньше. Тогда эта последовательность будет иметь вид:

$$n-1,\ n,\ 1,\ n-1,\ n-2,\ 1,\ n-3,\ n-4,\ 1,\ldots,\ 2,\ 1,\ 1.$$

Для $1 < n \le 4$ длину такой последовательности можно определить прямым счетом ($l_2 = 4$, $l_3 = 6$, $l_4 = 7$), а для больших n докажем, что $l_{n+2} = l_n + 3$. Составим последовательность с наибольшим членом $n+2$:

$$n+1,\ n+2,\ 1,\ n+1,\ n,\ 1,\ n-1,\ n-2,\ 1,\ n-3,\ n-4,\ 1,\ \ldots,\ 2,\ 1,\ 1.$$

Т.е. длина такой последовательности составит:

$$l_n = \frac{3n}{2} + 1 = \frac{3n+2}{2} \text{ для четных } n,$$

$$l_n = \frac{3(n-1)}{2} + 3 = \frac{3n+3}{2} \text{ для нечетных } n.$$

Тогда, при $n = 2021$

$$l_{2021} = \frac{3 \cdot 2021 + 3}{2} = 3033.$$

Ответ. 3033.

Задание 5. (20 баллов) В центре круглого поля стоит домик геологов. От него отходят 6 прямых дорог, разделяющих поле на 6 равных секторов. Два геолога отправляются в путешествие из своего домика со скоростью 4 км/ч по произвольно выбранной каждым из них дороге. Определить с какой вероятностью расстояние между ними через час составит не менее 6 км.

Решение.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по соседним дорогам (рис 4).

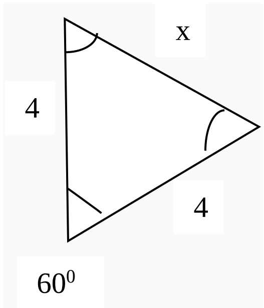

Рис. 4

Т.к. треугольник равносторонний, то $x = 4$, что меньше 6.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по дорогам, расположенным через одну (рис.5).

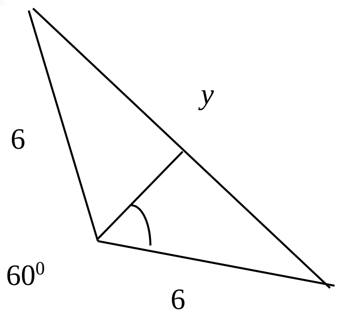

Рис.5

$$\frac{y}{2} = 4\sin 60^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},\ y = 4\sqrt{3}, \text{ что не меньше 6.}$$

Т.о., расстояние будет не меньше 6 км, если геологи не выберут одинаковые или соседние дороги.

Возможные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 6 дорог, второй геолог тоже, т.е. $n = 6 \cdot 6 = 36$

Благоприятные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 6 дорог, второй геолог – только 3 (не ту же и не соседние дороги), т.е. $n = 6 \cdot 3 = 18$.

Тогда, $P = \frac{18}{36} = 0{,}5$.

Ответ. 0,5.

Задание 6. (30 баллов) Три компрессорные станции расположены не на одной прямой, но соединены прямолинейными дорогами. Расстояние от первой станции до третьей через вторую вдвое длиннее прямолинейного пути между ними; расстояние от первой станции до второй через третью на a км длиннее прямолинейного пути; расстояние от второй станции до третьей через первую равно 75 км. Определить все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение компрессорных станций. Вычислить расстояния между компрессорными станциями при $a = 15$.

Решение.

Обозначим за x – расстояние между первой и второй компрессорными станциями, y – расстояние между второй и третьей, а z – расстояние между первой и третьей (рис. 6).

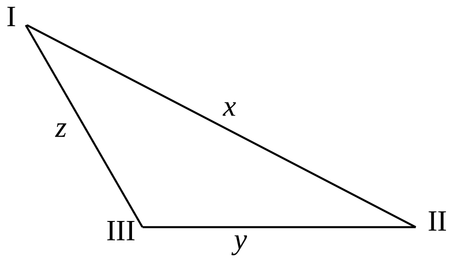

Рис.6

В соответствии с условиям задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2z, \\ z + y = x + a, \\ x + z = 75. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выразим z: $z = 75 - x$, получим систему

$$\begin{cases} x + y = 2(75 - x), \\ 75 - x + y = x + a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 150, \\ 2x - y = 75 - a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 150, \\ 5x = 225 - a. \end{cases}$$

Тогда, $x = \frac{225 - a}{5}$, $y = \frac{75 + 3a}{5}$ $z = \frac{150 + a}{5}$.

Определим все значения a, для которых были бы возможным найденные значения x, y и z. Используя неравенство треугольника (любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон), то составим систему неравенств для оценки значения параметра a:

$$\begin{cases} x < y + z, \\ y < x + z, \\ z < x + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{225-a}{5} < \dfrac{75+3a}{5} + \dfrac{150+a}{5}, \\ \dfrac{75+3a}{5} < \dfrac{225-a}{5} + \dfrac{150+a}{5}, \\ \dfrac{150+a}{5} < \dfrac{225-a}{5} + \dfrac{75+3a}{5}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $0 < a < 100$.

Вычислим при $a = 15$ расстояния между компрессорными станциями:

$x = \dfrac{225-15}{5} = 42$ км, $y = \dfrac{75+3\cdot 15}{5} = 24$ км, $z = \dfrac{150+15}{5} = 33$ км.

Ответ. $0 < a < 100$; 42 км, 24 км, 33 км.

Математика. Вариант-21
9 класс

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^6-20x^2-\sqrt{21}=0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $x^6-21x^2+x^2-\sqrt{21}=0$.
тогда

$x^2\left(x^4-21\right)+\left(x^2-\sqrt{21}\right)=0,$

$x^2\left(x^2-\sqrt{21}\right)\left(x^2+\sqrt{21}\right)+\left(x^2-\sqrt{21}\right)=0,$

$\left(x^2-\sqrt{21}\right)\left(x^4+x^2\sqrt{21}+1\right)=0,$

$x^2-\sqrt{21}=0,$ или $x^4+x^2\sqrt{21}+1=0,$

$x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{21}$; т.к. $\dfrac{-\sqrt{21}\pm\sqrt{17}}{2}<0$, то уравнения $x^2-\dfrac{-\sqrt{21}+\sqrt{17}}{2}=0$ и $x^2+\dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{17}}{2}=0$ действительных корней не имеют.

Ответ. $\left\{\pm\sqrt[4]{21}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Определить последнюю цифру числа S, если

$$S=54^{2019}+28^{2021}.$$

Решение.

Рассмотрим первое слагаемое 54^{2019}. Возведем последовательно 54 в степень, определяя только последнюю цифру:

$54^1=54$,
$54^2=54\cdot54=\ldots6$ (так как $4\cdot4=16$),
$54^3=\ldots6\cdot54=\ldots..4$ (так как $6\cdot4=24$),
$54^4=\ldots..4\cdot54=\ldots\ldots.6$ (так как $4\cdot4=16$) и т. д.

Т.о, число 54 в четной степени оканчивается на цифру 6, а в нечетной – на цифру 4.

Т.к. показатель степени 54^{2019} равен 2019, 2019 – нечетное число, то 54^{2019} оканчивается на цифру 4.

Рассмотрим второе слагаемое 28^{2021}. Будем последовательно возводить 28 в степень, определяя только последнюю цифру:

$28^1=28$,
$28^2=28\cdot28=\ldots4$ (так как $8\cdot8=64$),
$28^3=\ldots4\cdot28=\ldots..2$ (так как $4\cdot8=32$),
$28^4=\ldots..2\cdot28=\ldots\ldots.6$ (так как $2\cdot8=16$),
$28^5=\ldots\ldots.6\cdot28=\ldots\ldots\ldots8$ (так как $6\cdot8=48$),
$28^6=\ldots\ldots\ldots8\cdot28=\ldots\ldots.4$ (так как $8\cdot8=64$) и т. д.

Т.о., при возведении числа 28 в степень, на конце будут последовательно повторяться цифры 8, 4, 2, 6. Следовательно, число $28^{2021}=28^{4\cdot505+1}$ оканчивается на цифру 8, как и 28^1. А значит, число $S=54^{2019}+28^{2021}$ оканчивается на цифру 2, т.к.4+8=12, последняя цифра суммы 2.

Ответ. 2.

Задание 3. (15 баллов) Точка A лежит на стороне LM треугольника KLM с углом 120^0 при вершине K. В треугольники AKL и AKM вписаны окружности с центрами F и O соответственно. Найти радиус окружности, описанной около треугольника FKO, если $AF=3$, $AO=6$.

Решение.

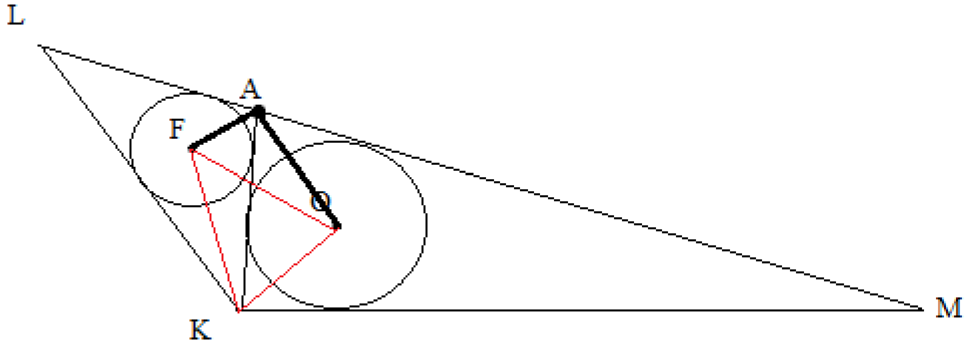

Рис. 1

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому лучи AF и AO являются биссектрисами $\angle LAK$ и $\angle MAK$ соответственно (рис. 1).

Угол между биссектрисами смежных углов является прямым, по следствию из теоремы о смежных углах: $\angle FAO=90^0$, т.е. ΔFAO – прямоугольный.

По теореме Пифагора найдем FO: $FO=\sqrt{AF^2+AO^2}=\sqrt{6+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

Лучи KF и KO являются биссектрисами $\angle LKA$ и $\angle MKA$ соответственно по теореме о свойстве двух касательных к окружности, тогда

$$\angle FKO=\angle FKA+\angle OKA=\frac{1}{2}\angle LKA+\frac{1}{2}\angle MKA=\frac{1}{2}\angle LKM=\frac{1}{2}\cdot 120^0=60^0.$$

По теореме синусов для ΔFKO: $\dfrac{FO}{\sin\angle FKO}=\dfrac{FK}{\sin\angle FOK}=\dfrac{KO}{\sin\angle KFO}=2R$.

Подставим известные данные: $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sin 60^0}=2R$, $R=\dfrac{3\sqrt{5}}{2\sin 60^0}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{45}{3}}=\sqrt{15}$.

Замечание. *Вместо теоремы синусов может быть использована теорема о вписанных и центральных углах.*

Ответ. $R=\sqrt{15}$.

Задание 4. (20 баллов) Задана конечная возрастающая последовательность $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ($n\geq 3$) натуральных чисел, причём при всех $k\leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=3a_{k+1}-2a_k-1$. В последовательности обязательно должен присутствовать член $a_k=2021$. Определить, какое наибольшее количество трёхзначных чисел, кратных 25, может содержать эта последовательность.

Решение.

Конечная последовательность может содержать все трехзначные числа, так как может состоять из заданного количества чисел натурального ряда, начиная с выбранного числа a_i.

Докажем, что для любого члена арифметической прогрессии 1, 2, 3,… задаваемой формулой n-го члена $a_n=n$, справедливо равенство $a_{k+2}=3a_{k+1}-2a_к-1$.

Действительно, при любом значении k верны равенства

$a_k=k$, $a_{k+1}=k+1$, $a_{k+2}=k+2$, из которых следует, что

$3a_{k+1} - 2a_k - 1 = 3(k+1) - 2k - 1 = k + 2 = a_{k+2}$, т.е. выполняется равенство $a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k - 1$, что и требовалось доказать.

Например, последовательность, содержащая 2021: 3,4,5,6,…, 2018, 2019,2020,2021.

Т.о., последовательность может содержать все трёхзначные числа от 100 до 999. Среди которых чисел, делящихся на 25: 100, 125, 150, 175, 200, 225, 250, 275, …, 900, 925, 950, 975 – по 4 в каждой из девяти сотен, т.е. 36 чисел.

Ответ. 36 .

Задание 5. (20 баллов) В центре круглого поля стоит домик геологов. От него отходят 8 прямых дорог, разделяющих поле на 8 равных секторов. Два геолога отправляются в путешествие из своего домика со скоростью 5 км/ч по произвольно выбранной каждым из них дороге. Определить с какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 8 км.

Решение.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по соседним дорогам (рис. 2).

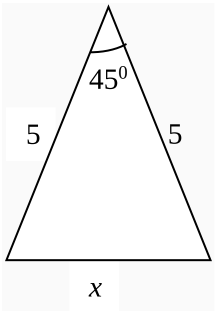

Рис. 2

По теореме косинусов: $x^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos 45° = 25\left(2 - \sqrt{2}\right)$, $x = 5\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, что меньше 8.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по дорогам, расположенным через одну (рис. 3).

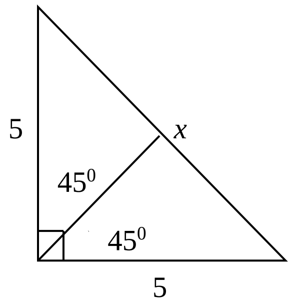

Рис. 3

По теореме Пифагора: $x^2 = 5^2 + 5^2$, $x = 5\sqrt{2}$, что меньше 8.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по дорогам, расположенным через две дороги (рис. 4).

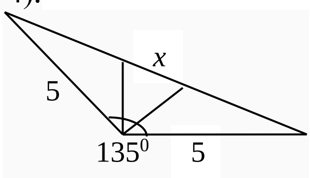

Рис. 4

По теореме косинусов: $x^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos 135° = 25\left(2 + \sqrt{2}\right)$, $x = 5\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, что больше 8.

Т.о., расстояние будет больше 8 км, если геологи выберут разные дороги, причем через две дороги.

Возможные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 8 дорог, второй геолог тоже, т.е. $n = 8 \cdot 8 = 64$

Благоприятные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 8 дорог, второй геолог – только 3 (не ту же, не соседние дороги и не через одну), т.е. $n = 8 \cdot 3 = 24$.

Тогда, $P = \frac{24}{64} = 0{,}375$.

Ответ. 0,375.

Задание 6. (30 баллов) На первом месторождении использовалась аппаратура высшего класса, на втором - первого, причём высшего было меньше, чем первого. Сначала 40 % аппаратуры с первого месторождения передали на второе. Затем 20 % аппаратуры, оказавшейся на втором месторождении, передали на первое, при этом половина из переданной аппаратуры была первого класса. После этого аппаратуры высшего класса на первом месторождении оказалось на 26 единиц больше, чем на втором, а общее количество аппаратуры на втором месторождении увеличилось по сравнению с первоначальным более чем на 5 %. Найти общее количество аппаратуры первого класса.

Решение.

Пусть первоначально на первом месторождении было x единиц аппаратуры высшего класса, а на втором месторождении было y единиц аппаратуры первого класса $(x < y)$. После первого перевода на первом месторождении стало $0{,}6x$ единиц аппаратуры, а на втором месторождении – $y + 0{,}4x$ единиц. После второго перевода на первом месторождении стало $0{,}6x + 0{,}2(y + 0{,}4x) = 0{,}68x + 0{,}2y$, а на втором месторождении – $0{,}8(y + 0{,}4x) = 0{,}8y + 0{,}32x$.

После второго перевода аппаратуры высшего класса (половина из переводимой аппаратуры – первый класс) на первом месторождении стало $0{,}6x + 0{,}1(y + 0{,}4x) = 0{,}64x + 0{,}1y$, а на втором месторождении ее стало $0{,}4x - 0{,}1(y + 0{,}4x) = 0{,}36x - 0{,}1y$, причём $0{,}64x + 0{,}1y$ на 26 больше, чем $0{,}36x - 0{,}1y$.

Составим уравнение $0{,}64x + 0{,}1y - (0{,}36x - 0{,}1y) = 26$, $7x + 5y = 650$, $y = 130 - \frac{7}{5}x$.

Так как y – число натуральное, то число x делится на 5.

После второго перевода общее количество аппаратуры на втором месторождении увеличилось по сравнению с первоначальным более чем на 5%, следовательно, $0{,}32x + 0{,}8y > 1{,}05y$, откуда $y < \frac{32}{25}x$.

Найдём все решения уравнения $7x + 5y = 650$, удовлетворяющие неравенствам $x < y$ и $y < \frac{32}{25}x$, т. е. удовлетворяющие двойному неравенству $x < 130 - \frac{7}{5}x < \frac{32}{25}x$

$$\begin{cases} x < 130 - \frac{7}{5}x, \\ 130 - \frac{7}{5}x < \frac{32}{25}x, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 54\frac{1}{6}, \\ x > 48\frac{34}{67}. \end{cases}$$

Этому двойному неравенству и условию «x делится на 5» удовлетворяет единственное значение $x = 50$. Тогда $y = 130 - 70 = 60$. Итак, было 60 единиц аппаратуры первого класса.

Ответ: 60.

Математика. Вариант-22
9 класс

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^6-21x^2+\sqrt{22}=0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $x^6-22x^2+x^2+\sqrt{22}=0$.

тогда

$x^2\left(x^4-22\right)+\left(x^2+\sqrt{22}\right)=0,$

$x^2\left(x^2-\sqrt{22}\right)\left(x^2+\sqrt{22}\right)+\left(x^2+\sqrt{22}\right)=0,$

$\left(x^2+\sqrt{22}\right)\left(x^4-x^2\sqrt{22}+1\right)=0,$

$x^2+\sqrt{22}\neq 0,$ или $x^4-x^2\sqrt{22}+1=0,$

$$x^2=\frac{\sqrt{22}\pm\sqrt{18}}{2}$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{22}\pm 3\sqrt{2}}{2}}$$

Ответ. $\left\{\pm\sqrt{\frac{\sqrt{22}\pm 3\sqrt{2}}{2}}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Определить последнюю цифру числа S, если

$$S=54^{2020}+28^{2022}.$$

Решение.

Рассмотрим первое слагаемое 54^{2020}. Возведем последовательно 54 в степень, определяю только последнюю цифру:

54^1=54,

54^2=54·54=…6 (так как 4·4=16),

54^3=…6·54=…..4 (так как 6·4=24),

54^4=…..4·54=…….6 (так как 4·4=16) и т. д.

Т.о, число 54 в четной степени оканчивается на цифру 6, а в нечетной – на цифру 4.

Т.к. показатель степени 54^{2020} равен 2020, 2020 – четное число, то 54^{2020} оканчивается на цифру 6.

Рассмотрим второе слагаемое 28^{2022}. Будем последовательно возводить 28 в степень, определяя только последнюю цифру:

28^1=28,

28^2=28·28=…4 (так как 8·8=64),

28^3=…4·28=…..2 (так как 4·8=32),

28^4=…..2·28=…….6 (так как 2·8=16),

28^5=…….6·28=………8 (так как 6·8=48),

28^6=………8·28=…….4 (так как 8·8=64) и т. д.

Т.о., при возведении числа 28 в степень, на конце будут последовательно повторяться цифры 8, 4, 2, 6. Следовательно, число $28^{2022}=28^{4\cdot 505+2}$ оканчивается на цифру 4, как и 28^2.

А значит, число $S = 54^{2020} + 28^{2022}$ оканчивается на цифру 0, т.к.6+4=10, последняя цифра суммы 0.

Ответ. 0.

Задание 3. (15 баллов) Точка A лежит на стороне LM треугольника KLM с углом 60^0 при вершине K. В треугольники AKL и AKM вписаны окружности с центрами F и O соответственно. Найти радиус окружности, описанной около треугольника FKO, если $AO = 6$, $AF = 3$.

Решение.

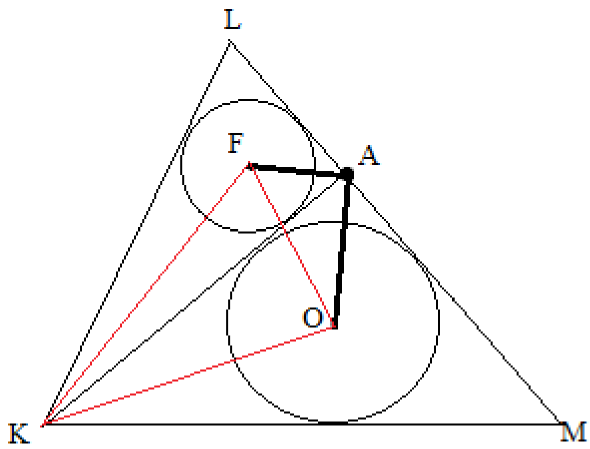

Рис. 1

Цент окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому лучи AF и AO являются биссектрисами $\angle LAK$ и $\angle MAK$ соответственно (рис. 1).

Угол между биссектрисами смежных углов является прямым, по следствию из теоремы о смежных углах: $\angle FAO = 90^0$, т.е. ΔFAO – прямоугольный.

По теореме Пифагора найдем FO: $FO = \sqrt{AF^2 + AO^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Лучи KF и KO являются биссектрисами $\angle LKA$ и $\angle MKA$ соответственно по теореме о свойстве двух касательных к окружности, тогда

$$\angle FKO = \angle FKA + \angle OKA = \frac{1}{2}\angle LKA + \frac{1}{2}\angle MKA = \frac{1}{2}\angle LKM = \frac{1}{2}\cdot 60^0 = 30^0.$$

По теореме синусов для ΔFKO: $\dfrac{FO}{\sin\angle FKO} = \dfrac{FK}{\sin\angle FOK} = \dfrac{KO}{\sin\angle KFO} = 2R$.

Подставим известные данные: $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sin 30^0} = 2R$, $R = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sin 30^0} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\cdot\frac{1}{2}} = 3\sqrt{5}$.

Замечание. *Вместо теоремы синусов может быть использована теорема о вписанных и центральных углах.*

Ответ. $R = 3\sqrt{5}$.

Задание 4. (20 баллов) Задана конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ натуральных чисел, причём при всех $\kappa \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k - 2$. В последовательности обязательно должен встречаться $a_k = 2022$. Определить какое наибольшее количество трёхзначных чисел, кратных 4, может содержать эта последовательность.

Решение.

Так как необходимо найти наибольшее количество трёхзначных чисел, кратных 4, то между членами должно быть минимальное отклонение. Заметим, что арифметическая прогрессия с разностью $d=2$, заданная формулой $a_k = 2k$, удовлетворяет равенству $a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k - 2$.

Действительно,

$a_k = 2k, \quad a_{k+1} = 2k+2$, $a_{k+2} = 2k+4$, или по формуле

$a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k - 2 = 3(2k+2) - 2 \cdot 2k - 2 = 2k+4$

Последовательность, содержащая 2022: 4,6,…, 2018, 2020,2022.

Данная конечная последовательность может содержать все четные трехзначные числа от 100 до 999. Среди них чисел, делящихся на 4: 100, 104, 108, 112, …, 992, 925, 950, 996 – по 25 в каждой из девяти сотен, т. е. 225 чисел.

Ответ. 225 **.**

Задание 5. (20 баллов) В центре круглого поля стоит домик геологов. От него отходят 8 прямых дорог, разделяющих поле на 8 равных секторов. Два геолога отправляются в путешествие из своего домика со скоростью 4 км/ч по произвольно выбранной каждым из них дороге. Определить с какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 6 км.

Решение.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по соседним дорогам (рис. 2).

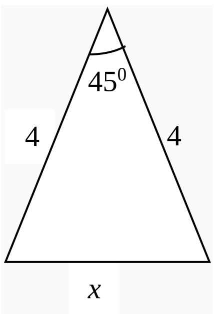

Рис. 2

По теореме косинусов: $x^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cos 45° = 16\left(2 - \sqrt{2}\right)$, $x = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, что меньше 6.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по дорогам, расположенным через одну (рис. 3).

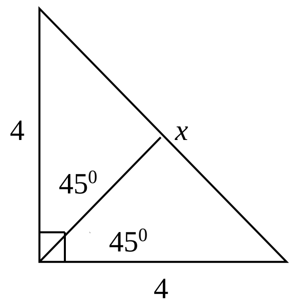

Рис. 3

По теореме Пифагора: $x^2 = 4^2 + 4^2$, $x = 4\sqrt{2}$, что меньше 6.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по дорогам, расположенным через две дороги (рис.4).

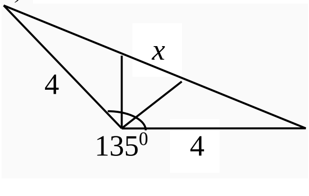

Рис. 4

По теореме косинусов: $x^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cos 135^\circ = 16\left(2+\sqrt{2}\right)$, $x = 4\sqrt{2+\sqrt{2}}$, что больше 6.

Т.о., расстояние будет больше 6 км, если геологи выберут разные дороги, причем через две дороги.

Возможные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 8 дорог, второй геолог тоже, т.е. $n = 8\cdot 8 = 64$

Благоприятные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 8 дорог, второй геолог – только 3 (не ту же, не соседние дороги и не через одну), т.е. $n = 8\cdot 3 = 24$.

Тогда, $P = \dfrac{24}{64} = 0{,}375$.

Ответ. 0,375.

Задание 6. (30 баллов) На первом месторождении использовалась аппаратура высшего класса, на втором – первого, причём высшего было меньше, чем первого. Сначала 30 % аппаратуры с первого месторождения передали на второе. Затем 10 % аппаратуры, оказавшейся на втором месторождении, передали на первое, при этом половина из переданной аппаратуры была первого класса. После этого аппаратуры высшего класса на первом месторождении оказалось на 6 единиц больше, чем на втором, а общее количество аппаратуры на втором месторождении увеличилось по сравнению с первоначальным более чем на 2 %. Найти общее количество аппаратуры первого класса.

Решение.

Пусть первоначально на первом месторождении было x единиц аппаратуры высшего класса, а на втором месторождении было y единиц аппаратуры первого класса ($x<y$). После первого перевода на первом месторождении стало $0{,}7x$ единиц аппаратуры, а на втором месторождении – $y + 0{,}3x$ единиц. После второго перевода на первом месторождении стало $0{,}7x+0{,}1(y+0{,}3x) = 0{,}73x+0{,}1y$, а на втором месторождении – $0{,}9(y+0{,}3x)=0{,}9y+0{,}27x$.

После второго перевода аппаратуры высшего класса (половина из переводимой аппаратуры – первый класс) на первом месторождении стало $0{,}7x+0{,}05(y+0{,}3x)=0{,}715x+0{,}05y$, а на втором месторождении ее стало $0{,}3x-0{,}05(y+0{,}3x) = 0{,}285x-0{,}05y$, причём $0{,}715x+0{,}05y$ на 6 больше, чем $0{,}285x-0{,}05y$.

Составим уравнение $0{,}715x+0{,}05y-\left(0{,}285x-0{,}05y\right)=6$,

$43x+10y = 600$, $y = 60 - 4{,}3x$.

Так как y – число натуральное, то число x делится на 10.

После второго перевода общее количество аппаратуры на втором месторождении увеличилось по сравнению с первоначальным более чем на 2 %, следовательно, $0{,}9y+0{,}27x > 1{,}02y$,

Откуда $y < \dfrac{9}{4}x$.

Найдём все решения уравнения $43x+10y = 600$, удовлетворяющие неравенствам $x < y$ $x<y$ и $y < \dfrac{9}{4}x$, т. е. удовлетворяющие двойному неравенству

$$x < 60 - 4{,}3x < \frac{9}{4}x,$$

$$\begin{cases} x < 60 - 4{,}3x, \\ 60 - 4{,}3x < \dfrac{9}{4}x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 11\dfrac{17}{53}, \\ x > 9\dfrac{21}{31}. \end{cases}$$

Этому двойному неравенству и условию «x делится на 10» удовлетворяет единственное значение $x=12$. Тогда $y=60-4{,}3\cdot 10=17$.

Итак, было 17 единиц аппаратуры первого класса.

Ответ: 17.

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^9-22x^3+\sqrt{21}=0$.
Решение.
Перепишем уравнение в виде $x^9-21x^3-x^3+\sqrt{21}=0$.
тогда

$$x^3\left(x^6-21\right)-\left(x^3-\sqrt{21}\right)=0,$$

$$x^3\left(x^3-\sqrt{21}\right)\left(x^3+\sqrt{21}\right)-\left(x^3-\sqrt{21}\right)=0,$$

$$\left(x^3-\sqrt{21}\right)\left(x^6+x^3\sqrt{21}-1\right)=0,$$

$$x^3-\sqrt{21}=0, \text{ или } x^6+x^3\sqrt{21}-1=0,$$

$$x_1=\sqrt[6]{21}; \qquad x^3=\frac{-\sqrt{21}\pm5}{2},$$

$$x_{2,3}=\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{21}\pm5}{2}}.$$

Ответ. $\left\{\sqrt[6]{21};\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{21}\pm5}{2}}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Вычислить $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\ldots\right)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{9}{25}+\frac{27}{125}-\frac{81}{625}+\ldots\right)$.

Решение.
Перегруппируем слагаемые в скобках

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{27}+\ldots-\frac{4}{9}-\frac{16}{81}-\ldots\right)\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{27}{125}+\ldots-\frac{9}{25}-\frac{81}{625}-\ldots\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{27}+\ldots-\left(\frac{4}{9}+\frac{16}{81}+\ldots\right)\right)\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{27}{125}+\ldots-\left(\frac{9}{25}+\frac{81}{625}+\ldots\right)\right)$$

Выражение $\frac{2}{3}+\frac{8}{27}+\ldots$ представляет собой сумму бесконечно убывающей прогрессии с $b_1=\frac{2}{3}$ и $q=\frac{4}{9}$.
Выражение $\frac{4}{9}+\frac{16}{81}+\ldots$ представляет собой сумму бесконечно убывающей прогрессии с $b_1=\frac{4}{9}$ и $q=\frac{4}{9}$.
Выражение $\frac{3}{5}+\frac{27}{125}+\ldots$ представляет собой сумму бесконечно убывающей прогрессии с $b_1=\frac{3}{5}$ и $q=\frac{9}{25}$.
Выражение $\frac{9}{25}+\frac{81}{625}+\ldots$ представляет собой сумму бесконечно убывающей прогрессии с $b_1=\frac{9}{25}$ и $q=\frac{9}{25}$.
Тогда

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{27}+\ldots-\frac{4}{9}-\frac{16}{81}-\ldots\right)\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{27}{125}+\ldots-\frac{9}{25}-\frac{81}{625}-\ldots\right)=\left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}}-\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{9}{25}}-\frac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}}\right)=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{6}{25}\cdot\frac{25}{16}=0{,}15.$$

Ответ. 0,15.

Задание 3. (15 баллов) Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 55 и 31 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение.

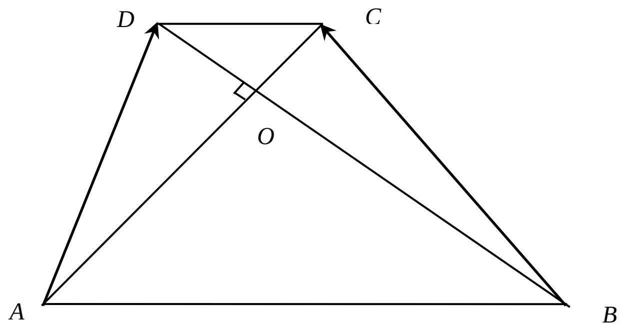

Рис.1

Обозначим точку пересечение диагоналей O (рис. 1).

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AO}=\bar{a}$ и $\overrightarrow{BO}=\bar{b}$.

Из подобия треугольников AOB и DOC имеем:

$$\frac{AO}{OC}=\frac{55}{31} \text{ и } \overrightarrow{OC}=\frac{31}{55}\overrightarrow{AO}=\frac{31}{55}\vec{a}$$

$$\frac{BO}{OD}=\frac{55}{31} \text{ и } \overrightarrow{OD}=\frac{31}{55}\overrightarrow{BO}=\frac{31}{55}\vec{b}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{31}{55}\vec{b} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BC}=\vec{b}+\frac{31}{55}\vec{a}$$

Найдем скалярное произведение

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\vec{a}+\frac{31}{55}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}+\frac{31}{55}\vec{a}\right)=\vec{a}\vec{b}+\frac{31}{55}\vec{a}\cdot\vec{a}+\frac{31}{55}\vec{b}\cdot\vec{b}+\left(\frac{31}{55}\right)^2\vec{a}\vec{b}.$$

Так как $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b}=0$.

По определению скалярного произведения векторов, получим $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 0^0=\left|\vec{a}\right|^2$ и $\vec{b}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|^2$.

Треугольник АОВ прямоугольный, поэтому $\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2=\left|AB\right|^2=55^2$.

Итак, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{31}{55}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right)=\frac{31}{55}\cdot 55^2=1705.$

Ответ. 1705.

Задание 4. (20 баллов) Известно, что функция $f(x)$ при каждом значении $x\in(-\infty;+\infty)$ удовлетворяет равенству $f(x)+(0{,}5+x)f(1-x)=1$. Найти все такие функции $f(x)$.

Решение.

Подставим в уравнение аргумент (1-x) и запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x)+(0{,}5+x)f(1-x)=1, \\ f(1-x)+(0{,}5+1-x)f(1-1+x)=1; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)+(0{,}5+x)f(1-x)=1, \\ f(1-x)+(1{,}5-x)f(x)=1. \end{cases}$$

Решим систему методом исключения неизвестных, умножив второе уравнение на - (0,5+x) и сложив результаты

$$f(x)(1-(0{,}5+x)(1{,}5-x))=1-(0{,}5+x),$$

$$f(x)=\frac{0{,}5-x}{x^2-x+0{,}25}=\frac{0{,}5-x}{(0{,}5-x)^2}=\frac{1}{0{,}5-x}, x\neq 0{,}5.$$

Если $x = 0{,}5,$ то из исходного уравнения получим

$$f(0{,}5) + (0{,}5 + 0{,}5) f(1 - 0{,}5) = 1,$$

$$f(0{,}5) = 0{,}5.$$

Окончательно,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{0{,}5 - x}, x \neq 0{,}5, \\ 0{,}5, x = 0{,}5. \end{cases}$$

Ответ. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{0{,}5 - x}, x \neq 0{,}5, \\ 0{,}5, x = 0{,}5. \end{cases}$

Задание 5. (20 баллов) Метровая газовая труба проржавела в двух местах. Определить вероятность того, что все три получившиеся части можно будет использовать в качестве отводов к газовым плитам, если по нормативам плита не должна находиться на расстоянии ближе 25 см от магистральной газовой трубы.

Решение.

Обозначим размеры частей, на которые разрезали трубу x, y и $(100 - x - y)$.

Очевидно, что величины x и y могут принимать любые значения из промежутка $(0;100)$. Тогда все множество возможных сочетаний $(x; y)$ можно изобразить на координатной плоскости OXY в виде прямоугольного треугольника со сторонами, равными 100 см (рис.2).

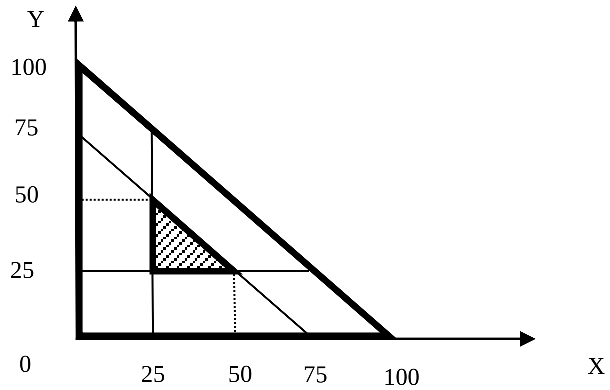

Рис. 2

Мерой этого множества можно считать площадь этого треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 5000$ см.

Для того, чтобы использовать получившиеся части в качестве отводов для плит, размер каждой из них должен быть не менее 25 см. Множество значений x и y, удовлетворяющих этим условиям, можно описать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} x \geq 25, \\ y \geq 25, \\ 100 - x - y \geq 25, \end{cases}$$

которая отображается на координатной плоскости также в виде прямоугольного треугольника со сторонами 25 см и площадью $S_1 = \dfrac{1}{2} 25 \cdot 25 = 312{,}5$ см^2.

Тогда, вероятность того, что размеры разрезанных частей подойдут для отводов плит составит

$$p = \frac{S_1}{S} = \frac{312{,}5}{5000} = \frac{1}{16}.$$

Замечание. *При решении задачи может быть использовано подобие треугольников: коэффициент подобия прямоугольных треугольников с катетами* 100 *и* 25 *соответственно равен* $\dfrac{1}{4}$, *значит, их площади относятся как* $\dfrac{1}{16}$.

Ответ. $\frac{1}{16}$**.**

Задание 6. (30 баллов) На торги выставлен лот из трех пакетов акций нефтедобывающих компаний: Разнефти, Дванефти и Тринефти. Суммарное количество акций пакетов Разнефти и Дванефти совпадает с количеством акций в пакете Тринефти. Пакет акций Дванефти в 4 раза дешевле пакета Разнефти, а их суммарная стоимость совпадает со стоимостью пакета Тринефти. Одна акция Разнефти превышает стоимость одной акции Дванефти на величину от 16 тыс. рублей до 20 тыс. рублей, а цена одной акции Тринефти колеблется в пределах от 42 тыс. рублей до 60 тыс. рублей. Определить, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций в лоте может составлять пакет акций Дванефти.

Решение.

Введем обозначения:

x – цена одной акции Дванефти,

y – цена одной акции Разнефти,

z – цена одной акции Тринефти,

n – количество акций в пакете Дванефти,

m – количество акций в пакете Разнефти.

Остальные условия задачи запишем в виде системы уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} 4xn = ym, \\ xn + ym = z(m+n), \\ 16 \le y - x \le 20, \\ 42 \le z \le 60; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{m}{n} = \dfrac{4x}{y}, \\ y = x + a, \\ z = x + \dfrac{am}{n+m}, \\ 16 \le a \le 20, \\ 42 \le z \le 60. \end{cases}$$

Необходимо найти пределы изменения величины $\dfrac{n}{n+m+(n+m)} \cdot 100\% = \dfrac{n}{2(n+m)} 100\%$.

Если удастся найти отношения $\dfrac{m}{n}$, то задача будет решена, так как $\dfrac{2(n+m)}{n} = 2(1+\dfrac{m}{n})$.

Определим сначала, при каких условиях процент акций Разнефти в общем лоте будет наименьшим.

Для этого $\dfrac{n}{2(n+m)} \to \min$, если $n \to \min, m \to \max$, $y - x \to \min$, следовательно, $y - x = 16$, $a = 16$.

Если $n \to \min, m \to \max$, то $z = x + \dfrac{16m}{n+m} \to \max$, следовательно, $z = 60$.

Тогда, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{4x}{x+16}$, $x = \dfrac{16m}{4n-m}$, $z = \dfrac{16m}{4n-m} + \dfrac{16m}{n+m} = 60$.

$16m(m+n) + 16m(4n-m) = 60(4n-m)(n+m)$, $80mn = 60\left(4n^2 + 3mn - m^2\right)$, $3m^2 - 5mn - 12n^2 = 0$,

$3\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 - 5\dfrac{m}{n} - 12 = 0$, $\dfrac{m}{n} = 3$, $\dfrac{m}{n} = -\dfrac{4}{3}$.

По условию задачи выбираем $m = 3n$, тогда наименьший процент $\dfrac{n}{2(n+m)} 100\% = 12{,}5\%$.

Аналогично найдем наибольший процент:

Для этого $\dfrac{n}{2(n+m)} \to \max$, если $n \to \max, m \to \min$, $y - x \to \max$, следовательно, $y - x = 20$, $a = 20$.

Если $n \to \max, m \to \min$, то $z = x + \dfrac{20m}{n+m} \to \min$, следовательно, $z = 42$.

Тогда, , $x = \dfrac{20m}{4n-m}$, $z = \dfrac{20m}{4n-m} + \dfrac{20m}{n+m} = 42$,

$$21m^2 - 13mn - 84n^2 = 0$$

$$21\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 13\frac{m}{n} - 84 = 0,\ \frac{m}{n} = \frac{7}{3}, \frac{m}{n} = -\frac{12}{7}.$$

По условию задачи выбираем $m = \frac{7n}{3}$, наибольший процент $\frac{n}{2(n+m)}100\% = 15\%$.

Ответ. В лоте содержится от 12,5% до 15% акций Дванефти от общего их количества.

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^9-22x^3-\sqrt{21}=0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $x^9-21x^3-x^3-\sqrt{21}=0$.

тогда

$$x^3\left(x^6-21\right)-\left(x^3+\sqrt{21}\right)=0,$$

$$x^3\left(x^3-\sqrt{21}\right)\left(x^3+\sqrt{21}\right)-\left(x^3+\sqrt{21}\right)=0,$$

$$\left(x^3+\sqrt{21}\right)\left(x^6-x^3\sqrt{21}-1\right)=0,$$

$$x^3+\sqrt{21}=0,\ \text{или}\ x^6-x^3\sqrt{21}-1=0,$$

$$x_1=-\sqrt[6]{21};\qquad x^3=\frac{\sqrt{21}\pm5}{2},$$

$$x_{2,3}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{21}\pm5}{2}}.$$

Ответ. $\left\{-\sqrt[6]{21};\sqrt[3]{\frac{\sqrt{21}\pm5}{2}}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Вычислить $\left(\frac{3}{4}-\frac{9}{16}+\frac{27}{64}-\frac{81}{256}+\ldots\right)\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{4}{49}+\frac{8}{343}-\frac{16}{2401}+\ldots\right)$.

Решение.

Перегруппируем слагаемые в скобках

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{27}{64}+\ldots-\frac{9}{16}-\frac{81}{256}-\ldots\right)\cdot\left(\frac{2}{7}+\frac{8}{343}+\ldots-\frac{4}{49}-\frac{16}{2401}-\ldots\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{27}{64}+\ldots-\left(\frac{9}{16}+\frac{81}{256}+\ldots\right)\right)\cdot\left(\frac{2}{7}+\frac{8}{343}+\ldots-\left(\frac{4}{49}+\frac{16}{2401}+\ldots\right)\right)$$

Выражение $\frac{3}{4}+\frac{27}{64}+\ldots$ представляет собой сумму бесконечно убывающей прогрессии с $b_1=\frac{3}{4}$ и $q=\frac{9}{16}$.

Выражение $\frac{9}{16}+\frac{81}{256}+\ldots$ представляет собой сумму бесконечно убывающей прогрессии с $b_1=\frac{9}{16}$ и $q=\frac{9}{16}$.

Выражение $\frac{2}{7}+\frac{8}{343}+\ldots$ представляет собой сумму бесконечно убывающей прогрессии с $b_1=\frac{2}{7}$ и $q=\frac{4}{49}$.

Выражение $\frac{4}{49}+\frac{16}{2401}+\ldots$ представляет собой сумму бесконечно убывающей прогрессии с $b_1=\frac{4}{49}$ и $q=\frac{4}{49}$.

Тогда

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{27}{64}+\ldots-\frac{9}{16}-\frac{81}{256}-\ldots\right)\cdot\left(\frac{2}{7}+\frac{8}{343}+\ldots-\frac{4}{49}-\frac{16}{2401}-\ldots\right)=\left(\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}-\frac{\frac{9}{16}}{1-\frac{9}{16}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{4}{49}}-\frac{\frac{4}{49}}{1-\frac{4}{49}}\right)=$$

$$=\frac{3}{16}\cdot\frac{16}{7}\cdot\frac{10}{49}\cdot\frac{49}{45}=\frac{2}{21}.$$

Ответ. $\frac{2}{21}$.

Задание 3. (15 баллов) Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 41 и 24 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение.

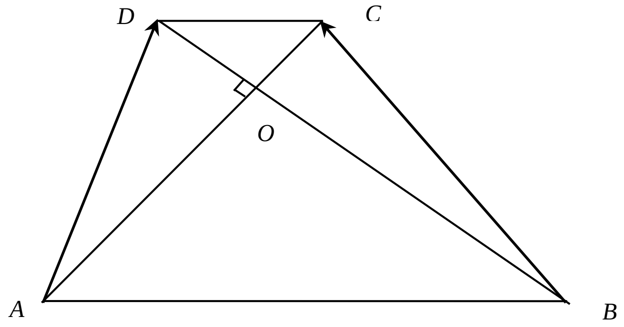

Рис. 1

Обозначим точку пересечение диагоналей O (рис. 1).

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AO}=\bar{a}$ и $\overrightarrow{BO}=\bar{b}$.

Из подобия треугольников AOB и DOC имеем:

$$\frac{AO}{OC}=\frac{41}{24} \text{ и } \overrightarrow{OC}=\frac{24}{41}\overrightarrow{AO}=\frac{24}{41}\vec{a}$$

$$\frac{BO}{OD}=\frac{41}{24} \text{ и } \overrightarrow{OD}=\frac{24}{41}\overrightarrow{BO}=\frac{24}{41}\vec{b}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{24}{41}\vec{b} \text{ и } \overrightarrow{BC}=\vec{b}+\frac{24}{41}\vec{a}$$

Найдем скалярное произведение

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\vec{a}+\frac{24}{41}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}+\frac{24}{41}\vec{a}\right)=\vec{a}\vec{b}+\frac{24}{41}\vec{a}\cdot\vec{a}+\frac{24}{41}\vec{b}\cdot\vec{b}+\left(\frac{24}{41}\right)^2\vec{a}\vec{b}.$$

Так как $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b}=0$.

По определению скалярного произведения векторов, получим $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^0=|\vec{a}|^2$ и $\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2$.

Треугольник AOB прямоугольный, поэтому $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|AB|^2=41^2$.

Итак, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{24}{41}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right)=\frac{24}{41}\cdot 41^2=984.$

Ответ. 984.

Задание 4. (20 баллов) Известно, что функция $f(x)$ при каждом значении $x\in(-\infty;+\infty)$ удовлетворяет равенству $f(x)-(x-0{,}5)f(-x-1)=1$. Найти все такие функции $f(x)$.

Решение.

Подставим в уравнение аргумент $(-x-1)$ и запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x)-(x-0{,}5)f(-x-1)=1, \\ f(-x-1)-(-x-1-0{,}5)f(x+1-1)=1; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)-(x-0{,}5)f(-x-1)=1, \\ f(-x-1)+(x+1{,}5)f(x)=1. \end{cases}$$

Решим систему методом исключения неизвестных, умножив второе уравнение на (x-0,5) и сложив результаты:

$f(x)(1+(x-0{,}5)(x+1{,}5))=1+(x-0{,}5),$

$$f(x)=\frac{0{,}5+x}{x^2+x+0{,}25}=\frac{0{,}5+x}{(0{,}5+x)^2}=\frac{1}{0{,}5+x},\ x\neq-0{,}5.$$

Если $x=-0{,}5,$ то из исходного уравнения получим

$f(-0{,}5)-(-0{,}5-0{,}5)f(0{,}5-1)=1,$

$f(-0{,}5)=0{,}5.$

Окончательно,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{0{,}5+x},\ x\neq-0{,}5, \\ 0{,}5,\ x=-0{,}5.\end{cases}$$

Ответ. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{0{,}5+x},\ x\neq-0{,}5, \\ 0{,}5,\ x=-0{,}5.\end{cases}$

Задание 5. (20 баллов) Четырехметровая газовая труба проржавела в двух местах. Определить вероятность того, что все три получившиеся части можно будет использовать в качестве отводов к газовым плитам, если по нормативам плита не должна находиться на расстоянии ближе 1 м от магистральной газовой трубы.

Решение.

Обозначим размеры частей, на которые разрезали трубу x, y и $(400-x-y)$.

Очевидно, что величины x и y могут принимать любые значения из промежутка $(0;400)$. Тогда все множество возможных сочетаний $(x;y)$ можно изобразить на координатной плоскости OXY в виде прямоугольного треугольника со сторонами , равными 400 см (рис. 2).

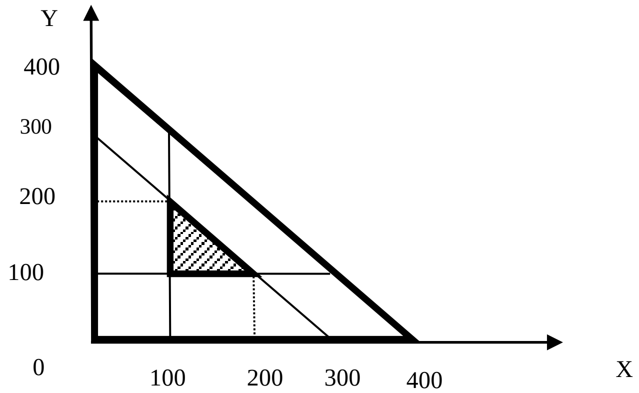

Рис. 2

Мерой этого множества можно считать площадь этого треугольника $S=\frac{1}{2}\cdot400\cdot400=80000$ см^2.

Для того, чтобы использовать получившиеся части в качестве отводов для плит, размер каждой из них должен быть не менее 1м, т.е. 100см. Множество значений x и y, удовлетворяющих этим условиям, можно описать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} x\geq100, \\ y\geq100, \\ 400-x-y\geq100, \end{cases}$$

которая отображается на координатной плоскости также в виде прямоугольного треугольника со сторонами 100 см и площадью $S_1=\frac{1}{2}\cdot100\cdot100=5000$ см^2.

Тогда, вероятность того, что размеры разрезанных частей подойдут для отводов плит составит

$$p=\frac{S_1}{S}=\frac{5000}{80000}=\frac{1}{16}.$$

Замечание. *При решении задачи может быть использовано подобие треугольников: коэффициент подобия прямоугольных треугольников с катетами 200 и 50 соответственно равен* $\frac{1}{4}$, *значит их площади относятся как* $\frac{1}{16}$.

Ответ. $\frac{1}{16}$**.**

Задание 6. (30 баллов) На торги выставлен лот из трех пакетов акций нефтедобывающих компаний: Разнефти, Дванефти и Тринефти. Суммарное количество акций пакетов Разнефти и Дванефти совпадает с количеством акций в пакете Тринефти. Пакет акций Дванефти в 3 раза дешевле пакета Разнефти, а их суммарная стоимость совпадает со стоимостью пакета Тринефти. Одна акция Разнефти превышает стоимость одной акции Дванефти на величину от 10 тыс. рублей до 18 тыс. рублей, а цена одной акции Тринефти колеблется в пределах от 18 тыс. рублей до 42 тыс. рублей. Определить, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций в лоте может составлять пакет акций Дванефти..

Решение.

Введем обозначения:

x – цена одной акции Дванефти,

y – цена одной акции Разнефти,

z – цена одной акции Тринефти,

n – количество акций в пакете Дванефти,

m – количество акций в пакете Разнефти.

Остальные условия задачи запишем в виде системы уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} 3xn=ym, \\ xn+ym=z(m+n), \\ 10\le y-x\le 18, \\ 18\le z\le 42; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{m}{n}=\dfrac{3x}{y}, \\ y=x+a, \\ z=x+\dfrac{am}{n+m}, \\ 10\le a\le 18, \\ 18\le z\le 42. \end{cases}$$

Необходимо найти пределы изменения величины $\frac{n}{n+m+(n+m)}\cdot 100\%=\frac{n}{2(n+m)}100\%$.

Если удастся найти отношения $\frac{m}{n}$, то задача будет решена, так как $\frac{2(n+m)}{n}=2(1+\frac{m}{n})$.

Определим сначала, при каких условиях процент акций Разнефти в общем лоте будет наименьшим.

Для этого $\frac{n}{2(n+m)}\to \min$, если $n\to \min, m\to \max$, $y-x\to \min$, следовательно, $y-x=10$, $a=10$.

Если $n\to \min, m\to \max$, то $z=x+\frac{10m}{n+m}\to \max$, следовательно, $z=42$.

Тогда, $x=\frac{10m}{3n-m}$, $z=\frac{10m}{3n-m}+\frac{10m}{n+m}=42$.

$5m(3n-m+n+m)=21(3n-m)(n+m)$, $20mn=21(3n^2+2mn-m^2)$, $21m^2-22mn-63n^2=0$,

$21\left(\frac{m}{n}\right)^2-22\frac{m}{n}-63=0$, $\frac{m}{n}=\frac{7}{3}$, $\frac{m}{n}=-\frac{9}{7}$.

По условию задачи выбираем $m=\frac{7}{3}n$, тогда наименьший процент $\frac{n}{2(n+m)}100\%=15\%$.

Аналогично найдем наибольший процент:

Для этого $\frac{n}{2(n+m)} \to \max$, если $n \to \max, m \to \min$, $y-x \to \max$, следовательно, $y-x=18$, $a=18$.

Если $n \to \max, m \to \min$, то $z = x + \frac{18m}{n+m} \to \min$, следовательно, $z=18$.

Тогда, $x = \frac{18m}{3n-m}$, $z = \frac{18m}{3n-m} + \frac{18m}{n+m} = 18$,

$m^2 + 2mn - 3n^2 = 0$

$\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2\frac{m}{n} - 3 = 0$, $\frac{m}{n} = 1, \frac{m}{n} = -3.$

По условию задачи выбираем $m = n$, наибольший процент $\frac{n}{2(n+m)} 100\% = 25\%$.

Ответ. В лоте содержится от 15% до 25% акций Дванефти от общего их количества.

Математика. Вариант-41
9 класс

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^9-21x^3-\sqrt{22}=0$.
Решение.
Перепишем уравнение в виде $x^9-22x^3+x^3-\sqrt{22}=0$.
тогда
$x^3(x^6-22)+x^3-\sqrt{22}=0,$
$x^3(x^3-\sqrt{22})(x^3+\sqrt{22})+(x^3-\sqrt{22})=0,$
$(x^3-\sqrt{22})(x^6+x^3\sqrt{22}+1)=0,$
$x^3-\sqrt{22}=0,$ или $x^6+x^3\sqrt{22}+1=0,$

$x_1=\sqrt[6]{22}$; $\qquad x^3=\dfrac{-\sqrt{22}\pm 3\sqrt{2}}{2},$

$$x_{2,3}=\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{22}\pm 3\sqrt{2}}{2}}.$$

Ответ. $\left\{\sqrt[6]{22};\sqrt[3]{\dfrac{-\sqrt{22}\pm 3\sqrt{2}}{2}}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Задана числовая последовательность:
$x_0=\dfrac{1}{n};x_k=\dfrac{1}{n-k}(x_0+x_1+\ldots+x_{k-1});k=1,2,\ldots,n-1.$
Найти $S_n=x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}$, если n = 2021.
Решение.

С помощью математической индукции докажем, что $x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k=\dfrac{1}{n-k}$. Для $k=0$ это равенство выполняется. Для $k=1$: $x_0+x_1=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n-1}$. Предположим, что это равенство выполняется для всех $m\le k$, тогда оно должно выполняться и для $k+1$. Проверим это:

$$(x_0+x_1+\ldots+x_k)+x_{k+1}=\frac{1}{n-k}+x_{k+1}=\frac{1}{n-k}+$$
$$+\frac{1}{n-(k+1)}(x_0+x_1+\ldots+x_k)=\frac{1}{n-k}+\frac{1}{(n-k-1)(n-k)}=\frac{1}{n-(k+1)}.$$

Значит, это равенство выполняется и для k+1. Следовательно, наше предположение, что $x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k=\dfrac{1}{n-k}$ верно.

Тогда при n = 2021 и $k=n-1$ = 2020: $S_{2021}=x_0+x_1+\ldots+x_{2020}=\dfrac{1}{2021-2020}=1$

Ответ.1.

Задание 3. (15 баллов) В параллелограмме $ABCD$ сторону AD разделили на равные части точками $A_1, A_2, \dots, A_{2020}$. Точка E_1 – точка пересечения прямых BA_1 и AC. Определить, какую часть диагонали AC составляет отрезок AE_1.

Решение.

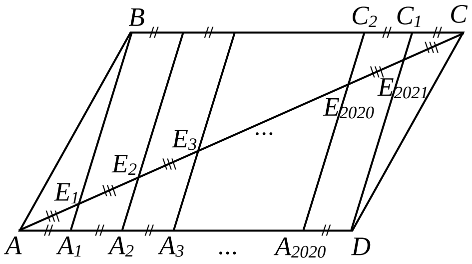

Рис. 1

Точки $A_1, A_2, \dots, A_{2020}$ делят сторону AD на 2021 равные части (рис. 1). Соединим точки B и A_1, а затем проведем прямые, параллельные BA_1, через точки $A_1, A_2, \dots, A_{2020}, D$, которые также разделят сторону BC на 2021 равные части. Эти прямые отсекают на прямой AC так же равные отрезки $CE_{2021}, \dots, E_1E_2, \dots, AE_1$. Из равенства треугольников ΔAE_1A_1 и $\Delta CE_{2021}C_1$ по стороне и прилегающим к ней углам следует $CE_{2021} = AE_1$. А значит, построенные параллельные прямые делят AC на 2022 равные части. Следовательно, $AE_1 = \dfrac{1}{2022}AC$.

Ответ. $\dfrac{1}{2022}$.

Задание 4. (20 баллов) На НПЗ емкость была заполнена сырой нефтью с концентрацией серы 2 %. Часть этой нефти была направлена на производство, а в емкость долили такое же количество нефти с концентрацией серы 3 %. Затем снова на производство было направлено то же количество нефти, что и в предыдущий раз, но долили нефть с концентрацией серы 1,5 %. В итоге, концентрация серы в нефти в емкости стала прежней. Опередить, какую часть нефти из емкости дважды отправляли на производство.

Решение.

Обозначим за x долю нефти, которую дважды отправляли на производство ($x > 0$). Тогда уравнение баланса количества серы в нефти будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{2}{100}-\frac{2}{100}x+\frac{3}{100}x-\left(\frac{2}{100}-\frac{2}{100}x+\frac{3}{100}x\right)x+\frac{1{,}5}{100}x=\frac{2}{100},$$

где $\dfrac{2}{100}-\dfrac{2}{100}x+\dfrac{3}{100}x$ - концентрация серы в нефти после первого долива нефти в емкость.

Домножив обе части уравнения на 100, раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим квадратное уравнение $x^2-0{,}5x=0$. Условию $x > 0$ удовлетворяет только $x=\dfrac{1}{2}$

Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

Задание 5. (20 баллов) Двухметровая газовая труба проржавела в двух местах. Определить вероятность того, что все три получившиеся части можно будет использовать в качестве отводов к газовым плитам, если по нормативам плита не должна находиться на расстоянии ближе 50 см от магистральной газовой трубы.

Решение.

Обозначим размеры частей, на которые разрезали трубу x, y и $(200-x-y)$.
Очевидно, что величины x и y могут принимать любые значения из промежутка $(0;200)$.
Тогда все множество возможных сочетаний (x, y) можно изобразить на координатной плоскости OXY в виде прямоугольного треугольника со сторонами, равными 200 см (рис. 2).

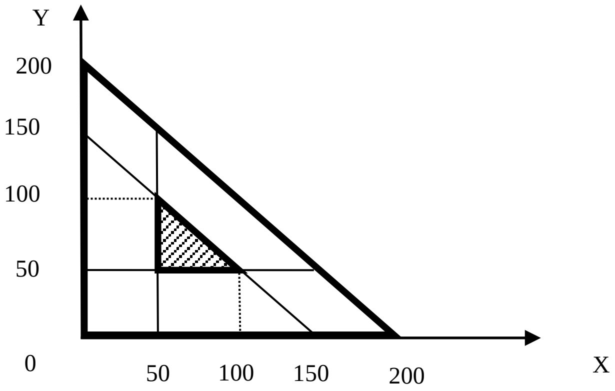

Рис. 2

Мерой этого множества можно считать площадь этого треугольника

$$S=\frac{1}{2}\cdot 200\cdot 200=20000 \text{ см}^2.$$

Для того, чтобы использовать получившиеся части в качестве отводов для плит, размер каждой из них должен быть не менее 50 см. Множество значений x и y, удовлетворяющих этим условиям, можно описать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} x\geq 50, \\ y\geq 50, \\ 200-x-y\geq 50, \end{cases}$$

которая отображается на координатной плоскости также в виде прямоугольного треугольника со сторонами 25 см и площадью $S_1=\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 50=1250$ см^2.

Тогда, вероятность того, что размеры разрезанных частей подойдут для отводов плит составит

$$p=\frac{S_1}{S}=\frac{1250}{20000}=\frac{1}{16}.$$

Замечание. *При решении задачи может быть использовано подобие треугольников: коэффициент подобия прямоугольных треугольников с катетами 200 и 50 соответственно равен* $\frac{1}{4}$*, значит их площади относятся как* $\frac{1}{16}$.

Ответ. $\frac{1}{16}$.

Задание 6. (30 баллов) Три компрессорные станции расположены не на одной прямой, но соединены прямолинейными дорогами. Расстояние от первой станции до третьей через вторую втрое длиннее прямолинейного пути между ними; расстояние от первой станции до второй через третью на a км длиннее прямолинейного пути; расстояние от второй станции до третьей через первую равно 60 км. Определить все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение компрессорных станций. Вычислить расстояния между компрессорными станциями при $a=30$.

Решение.

Обозначим за x – расстояние между первой и второй компрессорными станциями, y – расстояние между второй и третьей, а z – расстояние между первой и третьей (рис. 3).

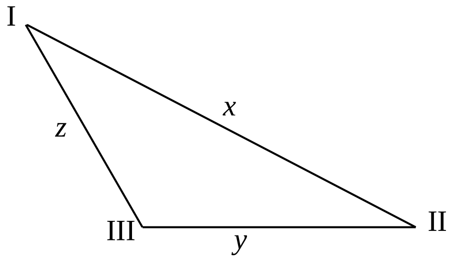

Рис.3

В соответствии с условиям задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3z, \\ z + y = x + a, \\ x + z = 60. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выразим z: $z = 60 - x$, получим систему

$$\begin{cases} x + y = 3(60 - x), \\ 60 - x + y = x + a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 180, \\ 2x - y = 60 - a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 180, \\ 6x = 240 - a. \end{cases}$$

Тогда, $x = \dfrac{240 - a}{6}$, $y = \dfrac{120 + 4a}{6}$, $z = \dfrac{120 + a}{6}$.

Определим все значения a, для которых были бы возможным найденные значения x, y и z. Используя неравенство треугольника (любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон), то составим систему неравенств для оценки значения параметра a:

$$\begin{cases} x < y + z, \\ y < x + z, \\ z < x + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{240 - a}{6} < \dfrac{120 + 4a}{6} + \dfrac{120 + a}{6}, \\ \dfrac{120 + 4a}{6} < \dfrac{240 - a}{6} + \dfrac{120 + a}{6}, \\ \dfrac{120 + a}{6} < \dfrac{240 - a}{6} + \dfrac{120 + 4a}{6}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $0 < a < 60$.

Вычислим при $a = 30$ расстояния между компрессорными станциями:

$x = \dfrac{240 - 30}{6} = 35$ км, $y = \dfrac{120 + 120}{6} = 40$ км, $z = \dfrac{120 + 30}{6} = 25$ км.

Ответ. $0 < a < 60$; 35 км, 40 км, 25 км.

Математика. Вариант-42
9 класс

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^9 - 21x^3 + \sqrt{22} = 0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $x^9 - 22x^3 + x^3 + \sqrt{22} = 0$.

тогда

$$x^3\left(x^6 - 22\right) + x^3 + \sqrt{22} = 0,$$

$$x^3\left(x^3 - \sqrt{22}\right)\left(x^3 + \sqrt{22}\right) + \left(x^3 + \sqrt{22}\right) = 0,$$

$$\left(x^3 + \sqrt{22}\right)\left(x^6 - x^3\sqrt{22} + 1\right) = 0,$$

$$x^3 + \sqrt{22} = 0, \text{ или } x^6 - x^3\sqrt{22} + 1 = 0,$$

$$x_1 = -\sqrt[6]{22}; \qquad x^3 = \frac{\sqrt{22} \pm 3\sqrt{2}}{2},$$

$$x_{2,3} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{22} \pm 3\sqrt{2}}{2}}.$$

Ответ. $\left\{-\sqrt[6]{22}; \sqrt[3]{\frac{\sqrt{22} \pm 3\sqrt{2}}{2}}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Задана числовая последовательность:

$$x_0 = \frac{1}{n}; x_k = \frac{1}{n-k}\left(x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1}\right); k = 1,2,\ldots,n-1.$$

Найти $S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$, если n = 2022.

Решение.

С помощью математической индукции докажем, что $x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k = \frac{1}{n-k}$. Для $k = 0$ это равенство выполняется. Для $k = 1$: $x_0 + x_1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1}$. Предположим, что это равенство выполняется для всех $m \le k$, тогда оно должно выполняться и для $k+1$. Проверим это:

$$\left(x_0 + x_1 + \ldots + x_k\right) + x_{k+1} = \frac{1}{n-k} + x_{k+1} = \frac{1}{n-k} +$$

$$+ \frac{1}{n-(k+1)}\left(x_0 + x_1 + \ldots + x_k\right) = \frac{1}{n-k} + \frac{1}{(n-k-1)(n-k)} = \frac{1}{n-(k+1)}.$$

Значит, это равенство выполняется и для k+1. Следовательно, наше предположение, что $x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k = \frac{1}{n-k}$ верно.

Тогда при n = 2022 и k = n – 1 = 2021: $S_{2022} = x_0 + x_1 + \ldots + x_{2021} = \frac{1}{2022 - 2021} = 1$

Ответ.1.

Задание 3. (15 баллов) В параллелограмме $ABCD$ сторону AD разделили на равные части точками $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$. Точка E_1 – точка пересечения прямых BA_1 и AC. Определить, какую часть диагонали AC составляет отрезок AE_1.

Решение.

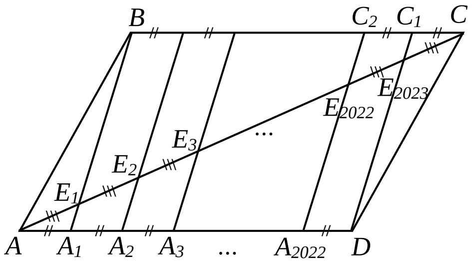

Рис. 1

Точки $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$ делят сторону AD на 2023 равные части (рис. 1). Соединим точки B и A_1, а затем проведем прямые, параллельные BA_1, через точки $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}, D$, которые также разделят сторону BC на 2023 равные части. Эти прямые отсекают на прямой AC равные отрезки $CE_{2023}, \ldots, E_1E_2, \ldots, AE_1$. Из равенства треугольников ΔAE_1A_1 и $\Delta CE_{2023}C_1$ по стороне и прилегающим к ней углам следует $CE_{2023} = AE_1$. А значит, построенные параллельные прямые делят АС на 2024 равные части. Следовательно, $AE_1 = \dfrac{1}{2024}AC$.

Ответ. $\dfrac{1}{2024}$.

Задание 4. (20 баллов) На НПЗ емкость была заполнена сырой нефтью с концентрацией серы 1,5 %. Часть этой нефти была направлена на производство, а в емкость долили такое же количество нефти с концентрацией серы 0,5 %. Затем снова на производство было направлено то же количество нефти, что и в предыдущий раз, но долили нефть с концентрацией серы 2 %. В итоге, концентрация серы в нефти в емкости стала прежней. Опередить, какую часть нефти из емкости дважды отправляли на производство.

Решение.

Обозначим за x долю нефти, которую дважды отправляли на производство ($x > 0$). Тогда уравнение баланса количества серы в нефти будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1{,}5}{100}-\frac{1{,}5}{100}x+\frac{0{,}5}{100}x-\left(\frac{1{,}5}{100}-\frac{1{,}5}{100}x+\frac{0{,}5}{100}x\right)x+\frac{2}{100}x=\frac{1{,}5}{100},$$

где $\frac{1{,}5}{100}-\frac{1{,}5}{100}x+\frac{0{,}5}{100}x$ - концентрация серы в нефти после первого долива нефти в емкость.

Домножив обе части уравнения на 100, раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим квадратное уравнение $x^2-0{,}5x=0$. Условию $x > 0$ удовлетворяет только $x=\dfrac{1}{2}$

Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

Задание 5. (20 баллов) Трехметровая газовая труба проржавела в двух местах. Определить вероятность того, что все три получившиеся части можно будет использовать в качестве отводов к газовым плитам, если по нормативам плита не должна находиться на расстоянии ближе 75 см от магистральной газовой трубы.

Решение.

Обозначим размеры частей, на которые разрезали трубу x, y и $(300 - x - y)$.

Очевидно, что величины x и y могут принимать любые значения из промежутка $(0;300)$.

Тогда все множество возможных сочетаний $(x; y)$ можно изобразить на координатной плоскости OXY в виде прямоугольного треугольника со сторонами , равными 300 см (рис. 2).

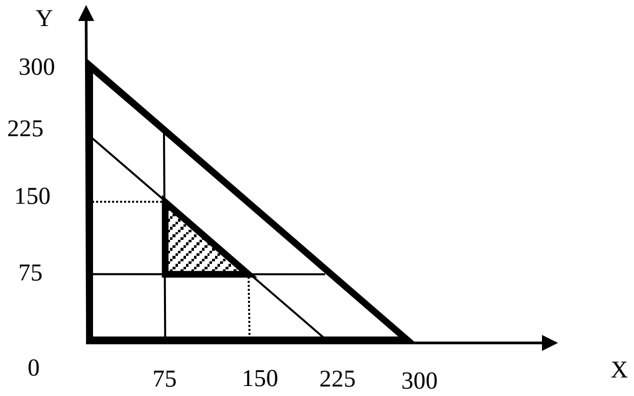

Рис. 2

Мерой этого множества можно считать площадь этого треугольника

$$S = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 300 = 45000 \text{ см}^2.$$

Для того, чтобы использовать получившиеся части в качестве отводов для плит, размер каждой из них должен быть не менее 75 см. Множество значений x и y, удовлетворяющих этим условиям, можно описать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} x \geq 75, \\ y \geq 75, \\ 300 - x - y \geq 75, \end{cases}$$

которая отображается на координатной плоскости также в виде прямоугольного треугольника со сторонами 75 см и площадью $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 75 = 2812{,}5$ см^2.

Тогда, вероятность того, что размеры разрезанных частей подойдут для отводов плит составит

$$p = \frac{S_1}{S} = \frac{2812{,}5}{45000} = \frac{1}{16}.$$

Замечание. *При решении задачи может быть использовано подобие треугольников: коэффициент подобия прямоугольных треугольников с катетами* 300 *и* 75 *соответственно равен* $\frac{1}{4}$, *значит их площади относятся как* $\frac{1}{16}$.

Ответ. $\frac{1}{16}$.

Задание 6. (30 баллов) Три компрессорные станции расположены не на одной прямой, но соединены прямолинейными дорогами. Расстояние от первой станции до третьей через вторую втрое длиннее прямолинейного пути между ними; расстояние от первой станции до второй через третью на a км длиннее прямолинейного пути; расстояние от второй станции до третьей через первую равно 60 км. Определить все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение компрессорных станций. Вычислить расстояния между компрессорными станциями при $a = 42$.

Решение.

Обозначим за x – расстояние между первой и второй компрессорными станциями, y – расстояние между второй и третьей, а z – расстояние между первой и третьей (рис. 3).

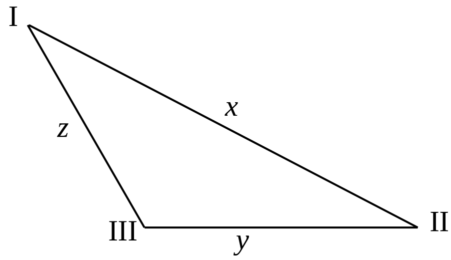

Рис.3

В соответствии с условиям задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=3z, \\ z+y=x+a, \\ x+z=60. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выразим z: $z=60-x$, получим систему

$$\begin{cases} x+y=3(60-x), \\ 60-x+y=x+a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+y=180, \\ 2x-y=60-a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+y=180, \\ 6x=240-a. \end{cases}$$

Тогда, $x=\dfrac{240-a}{6}$, $y=\dfrac{120+4a}{6}$, $z=\dfrac{120+a}{6}$.

Определим все значения a, для которых были бы возможным найденные значения x, y и z. Используя неравенство треугольника (любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон), то составим систему неравенств для оценки значения параметра a:

$$\begin{cases} x<y+z, \\ y<x+z, \\ z<x+y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{240-a}{6}<\dfrac{120+4a}{6}+\dfrac{120+a}{6}, \\ \dfrac{120+4a}{6}<\dfrac{240-a}{6}+\dfrac{120+a}{6}, \\ \dfrac{120+a}{6}<\dfrac{240-a}{6}+\dfrac{120+4a}{6}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $0<a<60$.

Вычислим при $a=42$ расстояния между компрессорными станциями:

$x=\dfrac{240-42}{6}=33$ км, $y=\dfrac{120+168}{6}=48$ км, $z=\dfrac{120+42}{6}=27$ км.

Ответ. $0<a<60$; 33 км, 48 км, 27 км.