Математика. Вариант-11
10 – 11 класс

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^9-2021x^3-\sqrt{2022}=0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $x^9-2022x^3+x^3-\sqrt{2022}=0$.
тогда

$$x^3\left(x^6-2022\right)+x^3-\sqrt{2022}=0,$$
$$x^3\left(x^3-\sqrt{2022}\right)\left(x^3+\sqrt{2022}\right)+\left(x^3-\sqrt{2022}\right)=0,$$
$$\left(x^3-\sqrt{2022}\right)\left(x^6+x^3\sqrt{2022}+1\right)=0,$$
$$x^3-\sqrt{2022}=0, \text{ или } x^6+x^3\sqrt{2022}+1=0,$$
$$x_1=\sqrt[6]{2022}; \qquad x^3=\frac{-\sqrt{2022}\pm\sqrt{2018}}{2},$$
$$x_{2,3}=\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2022}\pm\sqrt{2018}}{2}}.$$

Ответ. $\left\{\sqrt[6]{2022};\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2022}\pm\sqrt{2018}}{2}}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Задана числовая последовательность:

$$x_0=\frac{1}{n};x_k=\frac{1}{n-k}\left(x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}\right);\ k=1,2,\ldots,n-1.$$

Найти $S_n=x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}$, если $n=2021$.

Решение.

С помощью математической индукции докажем, что $x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k=\frac{1}{n-k}$. Для $k=0$ это равенство выполняется. Для $k=1$ $x_0+x_1=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}$. Предположим, что это равенство выполняется для всех $m\leq k$, тогда оно должно выполняться и для $k+1$. Проверим это:

$$\left(x_0+x_1+\ldots+x_k\right)+x_{k+1}=\frac{1}{n-k}+x_{k+1}==\frac{1}{n-k}+\frac{1}{n-(k+1)}\left(x_0+x_1+\ldots+x_k\right)=$$
$$=\frac{1}{n-k}+\frac{1}{(n-k-1)(n-k)}=\frac{1}{n-(k+1)}.$$

Значит, это равенство выполняется и для $k+1$ Следовательно, наше предположение, что $x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k=\frac{1}{n-k}$ верно.

Тогда при $n=2021$ и $k=n-1=2020$: $S_{2021}=x_0+x_1+\ldots+x_{2020}=\frac{1}{2021-2020}=1$.

Ответ. 1.

Задание 3. (15 баллов) Функция $f(x)$ удовлетворяет условию: для любых действительных чисел a и b выполняется равенство $f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3}$. Найти значение функции $f(2021)$, если $f(1)=5$, $f(4)=2$.

Решение.

Подставляя в заданное равенство пары чисел $a=4$, $b=1$ и $a=1$, $b=4$, соответственно, получим

Если $a=4$, $b=1$, то $f\left(\frac{4+2}{3}\right)=\frac{f(4)+2f(1)}{3}$, $f(2)=\frac{2+2\cdot 5}{3}=4$, $f(2)=4$.

Если $a=1$, $b=4$, то $f\left(\frac{1+2\cdot 4}{3}\right)=\frac{f(1)+2f(4)}{3}$, $f(3)=\frac{5+2\cdot 2}{3}=3$, $f(3)=3$.

Если взять $a=0$, $b=3$, получим $f\left(\frac{0+2\cdot 3}{3}\right)=\frac{f(0)+2f(3)}{3}$, $f(2)=\frac{f(0)+2f(3)}{3}$.

Значит, $f(0)=3f(2)-2f(3)$, $f(0)=3\cdot 4-2\cdot 3$, $f(0)=6$.

Т.о., имеем $f(0)=6$, $f(1)=5$, $f(2)=4$, $f(3)=3$, $f(4)=2$.

Составим цепочку равенств

$$f\left(\frac{2021+2\cdot 2}{3}\right)=\frac{f(2022)+2f(2)}{3}=f(675),$$

$$f\left(\frac{675+2\cdot 0}{3}\right)=\frac{f(675)+2f(0)}{3}=f(225),$$

$$f\left(\frac{225+2\cdot 0}{3}\right)=\frac{f(225)+2f(0)}{3}=f(75),$$

$$f\left(\frac{75+2\cdot 0}{3}\right)=\frac{f(75)+2f(0)}{3}=f(25),$$

$$f\left(\frac{25+2\cdot 1}{3}\right)=\frac{f(25)+2f(1)}{3}=f(9),$$

$$f\left(\frac{9+2\cdot 0}{3}\right)=\frac{f(9)+2f(0)}{3}=f(3).$$

Вычисляя в обратном порядке, получим:

$f(9)=3f(3)-2f(0)$, т.е. $f(9)=3\cdot 3-2\cdot 6=-3$;

$f(25)=3f(9)-2f(1)$, т.е. $f(25)=3\cdot(-3)-2\cdot 5=-19$;

$f(75)=3f(25)-2f(0)$, т.е. $f(75)=3\cdot(-19)-2\cdot 6=-69$;

$f(225)=3f(75)-2f(0)$, т.е. $f(225)=3\cdot(-69)-2\cdot 6=-219$;

$f(675)=3f(225)-2f(0)$, т.е. $f(675)=3\cdot(-219)-2\cdot 6=-669$;

$f(2021)=3f(675)-2f(2)$, т.е. $f(2021)=3\cdot(-669)-2\cdot 4=-2015$.

Ответ. -2015.

Задание 4. (20 баллов) Двухметровая газовая труба проржавела в двух местах. Определить вероятность того, что все три получившиеся части можно будет использовать в качестве отводов к газовым плитам, если по нормативам плита не должна находиться на расстоянии ближе 50 см от магистральной газовой трубы.

Решение.

Обозначим размеры частей, на которые разрезали трубу *x*, *y* и (200-*x*-y).

Очевидно, что величины x и y могут принимать любые значения из промежутка $[0;200]$. Тогда все множество возможных сочетаний $(x;y)$ можно изобразить на координатной плоскости XOY в виде прямоугольного треугольника со сторонами (рис. 1), равными 200 см (рис. 1).

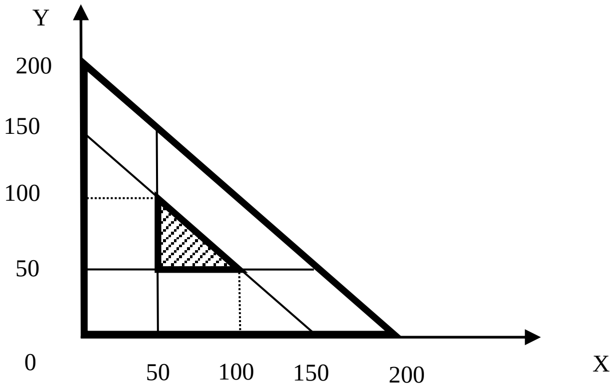

Рис. 1

Мерой этого множества можно считать площадь этого треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 200 = 20000$ см^2.

Для того, чтобы использовать получившиеся части в качестве отводов для плит, размер каждой из них должен быть не менее 50 см.

Множество значений x и y, удовлетворяющих этим условиям, можно описать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} x \geq 50, \\ y \geq 50, \\ 200 - x - y \geq 50, \end{cases}$$

которая отображается на координатной плоскости также в виде прямоугольного треугольника со сторонами 25 см и площадью $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 50 = 1250$ см^2.

Тогда, вероятность того, что размеры разрезанных частей подойдут для отводов плит составит

$$p = \frac{S_1}{S} = \frac{1250}{20000} = \frac{1}{16}.$$

Замечание. *При решении задачи может быть использовано подобие треугольников: коэффициент подобия прямоугольных треугольников с катетами 200 и 50 соответственно равен* $\frac{1}{4}$*, значит, их площади относятся как* $\frac{1}{16}$.

Ответ. $\frac{1}{16}$**.**

Задание 5. (20 баллов) Три компрессорные станции расположены не на одной прямой, но соединены прямолинейными дорогами. Расстояние от первой станции до третьей через вторую втрое длиннее прямолинейного пути между ними; расстояние от первой станции до второй через третью на a км длиннее прямолинейного пути; расстояние от второй станции до третьей через первую равно 60 км. Определить все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение компрессорных станций. Вычислить расстояния между компрессорными станциями при $a = 30$.

Решение.

Обозначим за x – расстояние между первой и второй компрессорными станциями, y – расстояние между второй и третьей, а z – расстояние между первой и третьей (рис. 2).

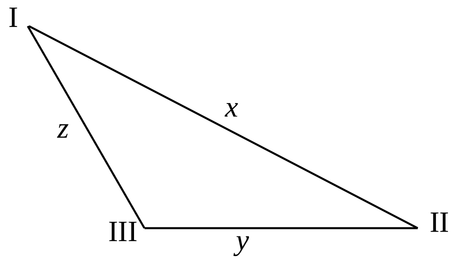

Рис.2

В соответствии с условиям задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3z, \\ z + y = x + a, \\ x + z = 60. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выразим z: $z = 85 - x$, получим систему

$$\begin{cases} x + y = 3(60 - x), \\ 60 - x + y = x + a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 180, \\ 2x - y = 60 - a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 180, \\ 6x = 240 - a. \end{cases}$$

Тогда, $x = \dfrac{240 - a}{6}$, $y = \dfrac{120 + 4a}{6}$, $z = \dfrac{120 + a}{6}$.

Определим все значения a, для которых были бы возможным найденные значения x, y и z. Используя неравенство треугольника (любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон), то составим систему неравенств для оценки значения параметра a:

$$\begin{cases} x < y + z, \\ y < x + z, \\ z < x + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{240 - a}{6} < \dfrac{120 + 4a}{6} + \dfrac{120 + a}{6}, \\ \dfrac{120 + 4a}{6} < \dfrac{240 - a}{6} + \dfrac{120 + a}{6}, \\ \dfrac{120 + a}{6} < \dfrac{240 - a}{6} + \dfrac{120 + 4a}{6}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $0 < a < 60$.

Вычислим при $a = 30$ расстояния между компрессорными станциями:

$x = \dfrac{240 - 30}{6} = 35$ км, $y = \dfrac{120 + 120}{6} = 40$ км, $z = \dfrac{120 + 30}{6} = 25$ км.

Ответ. $0 < a < 60$; 35 км, 40 км, 25 км.

Задание 6. (30 баллов) В сферу радиуса 3 вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок CD – диаметр этой сферы. Найти объем призмы, если $AD = 2\sqrt{6}$.

Решение.

Плоскости оснований ABC и $A_1B_1C_1$ призмы пересекают сферу по окружностям, описанным около правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$; пусть их центры – точки O и O_1 соответственно.

Легко показать, что середина M отрезка OO_1 является центром сферы (рис. 3).

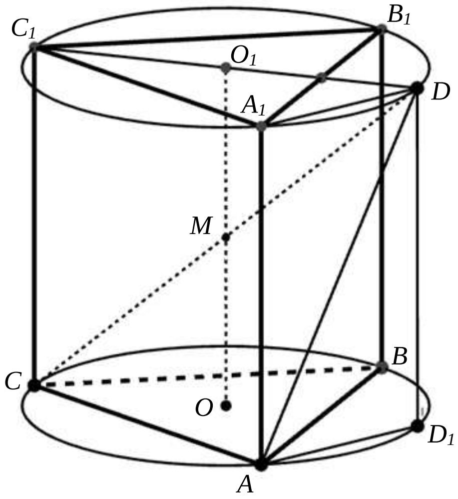

Рис. 3.

Проведем через точку C_1 диаметр C_1D окружности с центром в точке O_1. Покажем, что CD – диаметр сферы. Действительно, плоскость CC_1D перпендикулярна плоскостям основания и, значит, вместе с точкой O_1 содержит отрезок OO_1. Т.к. $C_1D = 2DO_1$, прямая CD пересекает отрезок OO_1 в его середине, т.е. в центре M заданной сферы.

Пусть D_1 – проекция точки D на плоскость основания ABC, высота призмы равна h, а радиусы окружностей с центрами O и O_1 равны r. Рассмотрим треугольники CC_1D и ADD_1. Учитывая, что $C_1D = 2r$, $AD_1 = r$ (треугольник AOD_1 равносторонний), $CC_1 = DD_1 = h$, по т. Пифагора получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} h^2 + 4r^2 = 6^2, \\ h^2 + r^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $r = 2$, $h = 2\sqrt{5}$. Тогда сторона основания равна $2\sqrt{3}$, его площадь $S = 3\sqrt{3}$, и следовательно, объем призмы $V = S \cdot h = 6\sqrt{15}$.

Ответ. $6\sqrt{15}$.

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^9-2021x^3+\sqrt{2022}=0$.
Решение.
Перепишем уравнение в виде $x^9-2022x^3+x^3+\sqrt{2022}=0$.
тогда
$$x^3\left(x^6-2022\right)+x^3+\sqrt{2022}=0,$$
$$x^3\left(x^3-\sqrt{2022}\right)\left(x^3+\sqrt{2022}\right)+\left(x^3+\sqrt{2022}\right)=0,$$
$$\left(x^3+\sqrt{2022}\right)\left(x^6-x^3\sqrt{2022}+1\right)=0,$$
$$x^3+\sqrt{2022}=0, \text{ или } x^6-x^3\sqrt{2022}+1=0,$$
$$x_1=-\sqrt[6]{2022}; \qquad x^3=\frac{\sqrt{2022}\pm\sqrt{2018}}{2},$$
$$x_{2,3}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2022}\pm\sqrt{2018}}{2}}.$$

Ответ. $\left\{-\sqrt[6]{2022};\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2022}\pm\sqrt{2018}}{2}}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Задана числовая последовательность:

$$x_0=\frac{1}{n};x_k=\frac{1}{n-k}\left(x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}\right);\ k=1,2,\ldots,n-1.$$
Найти $S_n=x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}$, если $n=2022$.
Решение.

С помощью математической индукции докажем, что $x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k=\frac{1}{n-k}$. Для $k=0$ это равенство выполняется. Для $k=1$ $x_0+x_1=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}$. Предположим, что это равенство выполняется для всех $m\le k$, тогда оно должно выполняться и для $k+1$. Проверим это:

$$\left(x_0+x_1+\ldots+x_k\right)+x_{k+1}=\frac{1}{n-k}+x_{k+1}==\frac{1}{n-k}+\frac{1}{n-(k+1)}\left(x_0+x_1+\ldots+x_k\right)=$$
$$=\frac{1}{n-k}+\frac{1}{(n-k-1)(n-k)}=\frac{1}{n-(k+1)}.$$

Значит, это равенство выполняется и для $k+1$. Следовательно, наше предположение, что $x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k=\frac{1}{n-k}$ верно.

Тогда при $n=2022$ и $k=n-1=2021$: $S_{2022}=x_0+x_1+\ldots+x_{2021}=\frac{1}{2022-2021}=1.$

Ответ. 1.

Задание 3. (15 баллов) Функция $f(x)$ удовлетворяет условию: для любых действительных чисел a и b выполняется равенство $f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3}$. Найти значение функции $f(2021)$, если $f(1)=1$, $f(4)=7$.

Решение.

Подставляя в заданное равенство пары чисел $a=4$, $b=1$ и $a=1$, $b=4$, соответственно, получим

Если $a=4$, $b=1$, то $f\left(\frac{4+2}{3}\right)=\frac{f(4)+2f(1)}{3}$, $f(2)=\frac{7+2\cdot 1}{3}=3$, $f(2)=3$.

Если $a=1$, $b=4$, то $f\left(\frac{1+2\cdot 4}{3}\right)=\frac{f(1)+2f(4)}{3}$, $f(3)=\frac{1+2\cdot 7}{3}=5$, $f(3)=5$.

Если взять $a=0$, $b=3$, получим $f\left(\frac{0+2\cdot 3}{3}\right)=\frac{f(0)+2f(3)}{3}$, $f(2)=\frac{f(0)+2f(3)}{3}$.

Значит, $f(0)=3f(2)-2f(3)$, $f(0)=3\cdot 3-2\cdot 5$, $f(0)=-1$.

Т.о., имеем $f(0)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=7$.

Составим цепочку равенств

$$f\left(\frac{2021+2\cdot 2}{3}\right)=\frac{f(2021)+2f(2)}{3}=f(675),$$

$$f\left(\frac{675+2\cdot 0}{3}\right)=\frac{f(675)+2f(0)}{3}=f(225),$$

$$f\left(\frac{225+2\cdot 0}{3}\right)=\frac{f(225)+2f(0)}{3}=f(75),$$

$$f\left(\frac{75+2\cdot 0}{3}\right)=\frac{f(75)+2f(0)}{3}=f(25),$$

$$f\left(\frac{25+2\cdot 1}{3}\right)=\frac{f(25)+2f(1)}{3}=f(9),$$

$$f\left(\frac{9+2\cdot 0}{3}\right)=\frac{f(9)+2f(0)}{3}=f(3).$$

Вычисляя в обратном порядке, получим:

$f(9)=3f(3)-2f(0)$, т.е. $f(9)=3\cdot 5-2\cdot(-1)=17$;

$f(25)=3f(9)-2f(1)$, т.е. $f(25)=3\cdot 17-2\cdot 1=49$;

$f(75)=3f(25)-2f(0)$, т.е. $f(75)=3\cdot 49-2\cdot(-1)=149$;

$f(225)=3f(75)-2f(0)$, т.е. $f(225)=3\cdot 149-2\cdot(-1)=449$;

$f(675)=3f(225)-2f(0)$, т.е. $f(675)=3\cdot 449-2\cdot(-1)=1349$;

$f(2021)=3f(675)-2f(2)$, т.е. $f(2021)=3\cdot 1349-2\cdot 3=4041$.

Ответ. 4041.

Задание 4. (20 баллов) Трехметровая газовая труба проржавела в двух местах. Определить вероятность того, что все три получившиеся части можно будет использовать в качестве отводов к газовым плитам, если по нормативам плита не должна находиться на расстоянии ближе 75 см от магистральной газовой трубы.

Решение.

Обозначим размеры частей, на которые разрезали трубу x, y и $(300-x-y)$.

Очевидно, что величины x и y могут принимать любые значения из промежутка $(0;300)$. Тогда все множество возможных сочетаний $(x;y)$ можно изобразить на координатной плоскости OXY в виде прямоугольного треугольника со сторонами , равными 300 см (рис. 1).

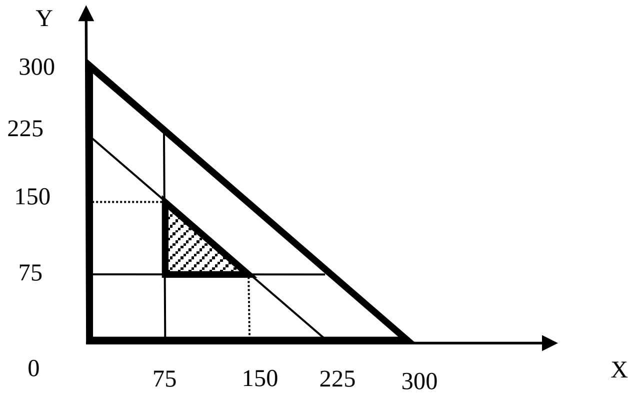

Рис. 1

Мерой этого множества можно считать площадь этого треугольника

$$S = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 300 = 45000 \text{ см}^2.$$

Для того, чтобы использовать получившиеся части в качестве отводов для плит, размер каждой из них должен быть не менее 75 см. Множество значений x и y, удовлетворяющих этим условиям, можно описать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} x \geq 75, \\ y \geq 75, \\ 300 - x - y \geq 75, \end{cases}$$

которая отображается на координатной плоскости также в виде прямоугольного треугольника со сторонами 75 см и площадью $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 75 = 2812{,}5$ см^2.

Тогда, вероятность того, что размеры разрезанных частей подойдут для отводов плит составит

$$p = \frac{S_1}{S} = \frac{2812{,}5}{45000} = \frac{1}{16}.$$

Замечание. *При решении задачи может быть использовано подобие треугольников: коэффициент подобия прямоугольных треугольников с катетами* 300 *и* 75 *соответственно равен* $\frac{1}{4}$*, значит их площади относятся как* $\frac{1}{16}$.

Ответ. $\frac{1}{16}$.

Задание 5. (20 баллов) Три компрессорные станции расположены не на одной прямой, но соединены прямолинейными дорогами. Расстояние от первой станции до третьей через вторую втрое длиннее прямолинейного пути между ними; расстояние от первой станции до второй через третью на a км длиннее прямолинейного пути; расстояние от второй станции до третьей через первую равно 60 км. Определить все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение компрессорных станций. Вычислить расстояния между компрессорными станциями при $a = 42$.

Решение.

Обозначим за x – расстояние между первой и второй компрессорными станциями, y – расстояние между второй и третьей, а z – расстояние между первой и третьей (рис. 2).

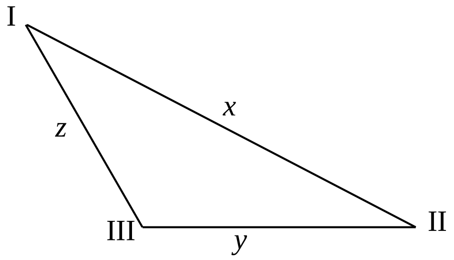

Рис.2

В соответствии с условиям задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3z, \\ z + y = x + a, \\ x + z = 60. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выразим z: $z = 85 - x$, получим систему

$$\begin{cases} x + y = 3(60 - x), \\ 60 - x + y = x + a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 180, \\ 2x - y = 60 - a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 180, \\ 6x = 240 - a. \end{cases}$$

Тогда, $x = \dfrac{240 - a}{6}$, $y = \dfrac{120 + 4a}{6}$, $z = \dfrac{120 + a}{6}$.

Определим все значения a, для которых были бы возможным найденные значения x, y и z. Используя неравенство треугольника (любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон), то составим систему неравенств для оценки значения параметра a:

$$\begin{cases} x < y + z, \\ y < x + z, \\ z < x + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{240 - a}{6} < \dfrac{120 + 4a}{6} + \dfrac{120 + a}{6}, \\ \dfrac{120 + 4a}{6} < \dfrac{240 - a}{6} + \dfrac{120 + a}{6}, \\ \dfrac{120 + a}{6} < \dfrac{240 - a}{6} + \dfrac{120 + 4a}{6}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $0 < a < 60$.

Вычислим при $a = 42$ расстояния между компрессорными станциями:

$x = \dfrac{240 - 42}{6} = 33$ км, $y = \dfrac{120 + 168}{6} = 48$ км, $z = \dfrac{120 + 42}{6} = 27$ км.

Ответ. $0 < a < 60$; 33 км, 48 км, 27 км.

Задание 6. (30 баллов) В сферу вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок CD – диаметр этой сферы, точка K – середина ребра AA_1. Найти объем призмы, если $CK = 2\sqrt{6}$, $DK = 4$.

Решение.

Плоскости оснований ABC и $A_1B_1C_1$ призмы пересекают сферу по окружностям, описанным около правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$; пусть их центры – точки O и O_1 соответственно.

Легко показать, что середина M отрезка OO_1 является центром сферы (рис. 3).

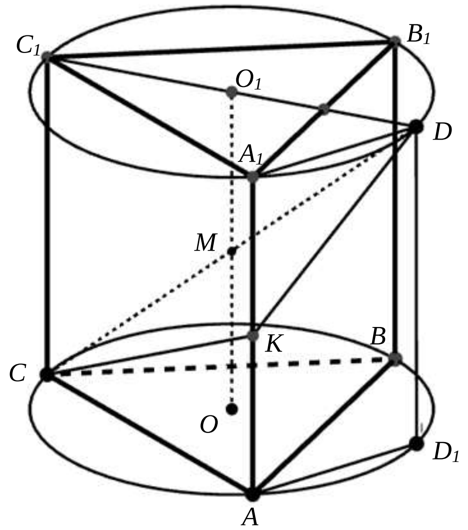

Рис. 3.

Проведем через точку C_1 диаметр C_1D окружности с центром в точке O_1. Покажем, что CD – диаметр сферы. Действительно, плоскость CC_1D перпендикулярна плоскостям основания и, значит, вместе с точкой O_1 содержит отрезок OO_1. Т.к. $C_1D = 2DO_1$, прямая CD пересекает отрезок OO_1 в его середине, т.е. в центре M заданной сферы.

Пусть D_1 – проекция точки D на плоскость основания ABC, высота призмы равна h, а радиусы окружностей с центрами O и O_1 равен r. Рассмотрим треугольники CAK и KA_1D. Учитывая, что $A_1D = AD_1 = r$ (треугольник A_1O_1D равносторонний), $AC = r\sqrt{3}$, $AK = KA_1 = \dfrac{h}{2}$, по т. Пифагора получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{4} + 3r^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2, \\ \dfrac{h^2}{4} + r^2 = 4^2. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $r = 2$, $h = 4\sqrt{3}$. Тогда сторона основания равна $2\sqrt{3}$, его площадь $S = 3\sqrt{3}$, и, следовательно, объем призмы $V = S \cdot h = 36$.

Ответ. 36.

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^9-2022x^3+\sqrt{2021}=0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $x^9-2021x^3-x^3+\sqrt{2021}=0$.

тогда

$$x^3\left(x^6-2021\right)-\left(x^3-\sqrt{2021}\right)=0,$$

$$x^3\left(x^3-\sqrt{2021}\right)\left(x^3+\sqrt{2021}\right)-\left(x^3-\sqrt{2021}\right)=0,$$

$$\left(x^3-\sqrt{2021}\right)\left(x^6+x^3\sqrt{2021}-1\right)=0,$$

$$x^3-\sqrt{2021}=0, \text{ или } x^6+x^3\sqrt{2021}-1=0,$$

$$x_1=\sqrt[6]{2021}; \qquad x^3=\frac{-\sqrt{2021}\pm 45}{2},$$

$$x_{2,3}=\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021}\pm 45}{2}}.$$

Ответ. $\left\{\sqrt[6]{2021};\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021}\pm 45}{2}}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Известно, что функция $f(x)$ при каждом значении $x\in(-\infty;+\infty)$ удовлетворяет равенству $f(x)+(0{,}5+x)f(1-x)=1$. Найти все такие функции $f(x)$.

Решение.

Подставим в уравнение аргумент $(1-x)$ и запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x)+(0{,}5+x)f(1-x)=1, \\ f(1-x)+(0{,}5+1-x)f(1-1+x)=1; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)+(0{,}5+x)f(1-x)=1, \\ f(1-x)+(1{,}5-x)f(x)=1. \end{cases}$$

Решим систему методом исключения неизвестных, умножив второе уравнение на $-(0{,}5+x)$ и сложив результаты

$$f(x)(1-(0{,}5+x)(1{,}5-x))=1-(0{,}5+x),$$

$$f(x)=\frac{0{,}5-x}{x^2-x+0{,}25}=\frac{0{,}5-x}{(0{,}5-x)^2}=\frac{1}{0{,}5-x},\ x\neq 0{,}5.$$

Если $x=0{,}5$, то из исходного уравнения получим

$$f(0{,}5)+(0{,}5+0{,}5)f(1-0{,}5)=1,$$

$$f(0{,}5)=0{,}5.$$

Окончательно,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{0{,}5-x}, x\neq 0{,}5, \\ 0{,}5, x=0{,}5. \end{cases}$$

Ответ. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{0{,}5-x}, x\neq 0{,}5, \\ 0{,}5, x=0{,}5. \end{cases}$

Задание 3. (15 баллов) Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 55 и 31 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение.

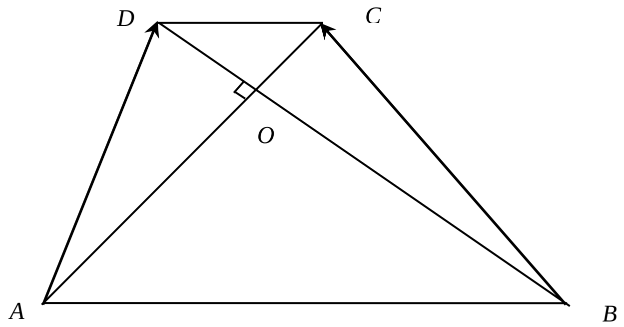

Рис. 1

Обозначим точку пересечения диагоналей O (рис. 1).

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AO}=\bar{a}$ и $\overrightarrow{BO}=\bar{b}$.

Из подобия треугольников AOB и DOC имеем:

$$\frac{AO}{OC}=\frac{55}{31} \text{ и } \overrightarrow{OC}=\frac{31}{55}\overrightarrow{AO}=\frac{31}{55}\vec{a}$$

$$\frac{BO}{OD}=\frac{55}{31} \text{ и } \overrightarrow{OD}=\frac{31}{55}\overrightarrow{BO}=\frac{31}{55}\vec{b}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{31}{55}\vec{b} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BC}=\vec{b}+\frac{31}{55}\vec{a}$$

Найдем скалярное произведение

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\vec{a}+\frac{31}{55}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}+\frac{31}{55}\vec{a}\right)=\vec{a}\vec{b}+\frac{31}{55}\vec{a}\cdot\vec{a}+\frac{31}{55}\vec{b}\cdot\vec{b}+\left(\frac{31}{55}\right)^2\vec{a}\vec{b}.$$

Так как $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b}=0$.

По определению скалярного произведения векторов, получим $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^0=|\vec{a}|^2$ и $\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2$.

Треугольник АОВ прямоугольный, поэтому $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|AB|^2=55^2$.

Итак, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{31}{55}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right)=\frac{31}{55}\cdot 55^2=1705.$

Ответ. 1705.

Задание 4. (20 баллов) Метровая газовая труба проржавела в двух местах. Определить вероятность того, что все три получившиеся части можно будет использовать в качестве отводов к газовым плитам, если по нормативам плита не должна находиться на расстоянии ближе 25 см от магистральной газовой трубы.

Решение.

Обозначим размеры частей, на которые разрезали трубу x, y и $(100-x-y)$.

Очевидно, что величины x и y могут принимать любые значения из промежутка $(0;100)$. Тогда все множество возможных сочетаний $(x;y)$ можно изобразить на координатной плоскости OXY в виде прямоугольного треугольника со сторонами, равными 100 см (рис.2).

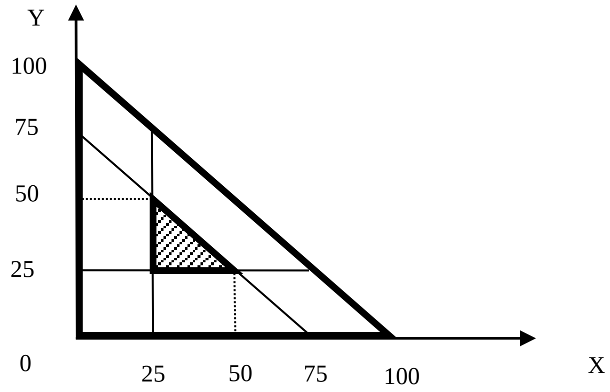

Рис. 2

Мерой этого множества можно считать площадь этого треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 5000$ см.

Для того, чтобы использовать получившиеся части в качестве отводов для плит, размер каждой из них должен быть не менее 25 см. Множество значений *x* и *y*, удовлетворяющих этим условиям, можно описать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} x \ge 25, \\ y \ge 25, \\ 100 - x - y \ge 25, \end{cases}$$

которая отображается на координатной плоскости также в виде прямоугольного треугольника со сторонами 25 см и площадью $S_1 = \frac{1}{2} 25 \cdot 25 = 312{,}5\,\text{см}^2$.

Тогда, вероятность того, что размеры разрезанных частей подойдут для отводов плит составит $p = \frac{S_1}{S} = \frac{312{,}5}{5000} = \frac{1}{16}$.

Замечание. *При решении задачи может быть использовано подобие треугольников: коэффициент подобия прямоугольных треугольников с катетами* 100 *и* 25 *соответственно равен* $\frac{1}{4}$, *значит, их площади относятся как* $\frac{1}{16}$.

Ответ. $\frac{1}{16}$**.**

Задание 5. (20 баллов) На торги выставлен лот из трех пакетов акций нефтедобывающих компаний: Разнефти, Дванефти и Тринефти. Суммарное количество акций пакетов Разнефти и Дванефти совпадает с количеством акций в пакете Тринефти. Пакет акций Дванефти в 4 раза дешевле пакета Разнефти, а их суммарная стоимость совпадает со стоимостью пакета Тринефти. Одна акция Разнефти превышает стоимость одной акции Дванефти на величину от 16 тыс. рублей до 20 тыс. рублей, а цена одной акции Тринефти колеблется в пределах от 42 тыс. рублей до 60 тыс. рублей. Определить, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций в лоте может составлять пакет акций Дванефти.

Решение.

Введем обозначения:

x – цена одной акции Дванефти,
y – цена одной акции Разнефти,
z – цена одной акции Тринефти,
n – количество акций в пакете Дванефти,
m – количество акций в пакете Разнефти.

Остальные условия задачи запишем в виде системы уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} 4xn = ym, \\ xn + ym = z(m+n), \\ 16 \le y - x \le 20, \\ 42 \le z \le 60; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{m}{n} = \dfrac{4x}{y}, \\ y = x + a, \\ z = x + \dfrac{am}{n+m}, \\ 16 \le a \le 20, \\ 42 \le z \le 60. \end{cases}$$

Необходимо найти пределы изменения величины $\frac{n}{n+m+(n+m)} \cdot 100\% = \frac{n}{2(n+m)} 100\%$.

Если удастся найти отношения $\frac{m}{n}$, то задача будет решена, так как $\frac{2(n+m)}{n} = 2(1+\frac{m}{n})$.

Определим сначала, при каких условиях процент акций Разнефти в общем лоте будет наименьшим.

Для этого $\frac{n}{2(n+m)} \to \min$, если $n \to \min, m \to \max$, $y - x \to \min$, следовательно, $y - x = 16$, $a = 16$.

Если $n \to \min, m \to \max$, то $z = x + \frac{16m}{n+m} \to \max$, следовательно, $z = 60$.

Тогда, $\frac{m}{n} = \frac{4x}{x+16}$, $x = \frac{16m}{4n-m}$, $z = \frac{16m}{4n-m} + \frac{16m}{n+m} = 60$.

$16m(m+n) + 16m(4n-m) = 60(4n-m)(n+m)$, $80mn = 60\left(4n^2 + 3mn - m^2\right)$, $3m^2 - 5mn - 12n^2 = 0$,

$3\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 5\frac{m}{n} - 12 = 0$, $\frac{m}{n} = 3$, $\frac{m}{n} = -\frac{4}{3}$.

По условию задачи выбираем $m = 3n$, тогда наименьший процент $\frac{n}{2(n+m)} 100\% = 12{,}5\%$.

Аналогично найдем наибольший процент:

Для этого $\frac{n}{2(n+m)} \to \max$, если $n \to \max, m \to \min$, $y - x \to \max$, следовательно, $y - x = 20$, $a = 20$.

Если $n \to \max, m \to \min$, то $z = x + \frac{20m}{n+m} \to \min$, следовательно, $z = 42$.

Тогда, , $x = \frac{20m}{4n-m}$, $z = \frac{20m}{4n-m} + \frac{20m}{n+m} = 42$,

$21m^2 - 13mn - 84n^2 = 0$

$21\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 13\frac{m}{n} - 84 = 0$, $\frac{m}{n} = \frac{7}{3}, \frac{m}{n} = -\frac{12}{7}$.

По условию задачи выбираем $m = \frac{7n}{3}$, наибольший процент $\frac{n}{2(n+m)} 100\% = 15\%$.

Ответ. В лоте содержится от 12,5% до 15% акций Дванефти от общего их количества.

Задание 6. (30 баллов) В сферу радиуса 6 вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок CD – диаметр этой сферы. Найти объем призмы, если $AD = 4\sqrt{6}$.

Решение.

Плоскости оснований ABC и $A_1B_1C_1$ призмы пересекают сферу по окружностям, описанным около правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$; пусть их центры – точки O и O_1 соответственно.

Легко показать, что середина M отрезка OO_1 является центром сферы (рис. 3).

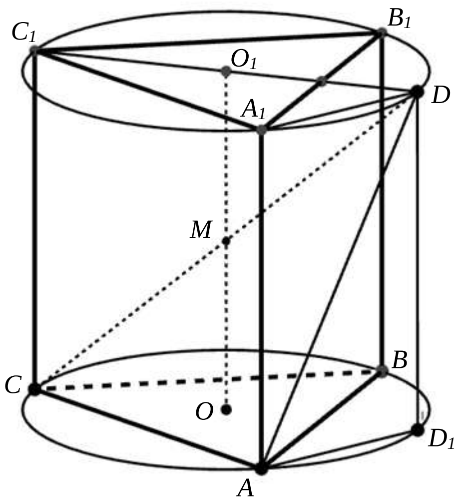

Рис. 3.

Проведем через точку C_1 диаметр C_1D окружности с центром в точке O_1. Покажем, что CD – диаметр сферы. Действительно, плоскость CC_1D перпендикулярна плоскостям основания и, значит, вместе с точкой O_1 содержит отрезок OO_1. Т.к. $C_1D = 2DO_1$, прямая CD пересекает отрезок OO_1 в его середине, т.е. в центре M заданной сферы.

Пусть D_1 – проекция точки D на плоскость основания ABC, высота призмы равна h, а радиусы окружностей с центрами O и O_1 равны r. Рассмотрим треугольники CC_1D и ADD_1. Учитывая, что $C_1D = 2r$, $AD_1 = r$ (треугольник AOD_1 равносторонний), $CC_1 = DD_1 = h$, по т. Пифагора получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} h^2 + 4r^2 = 12^2, \\ h^2 + r^2 = \left(4\sqrt{6}\right)^2. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $r = 4$, $h = 4\sqrt{5}$. Тогда сторона основания равна $4\sqrt{3}$, его площадь $S = 12\sqrt{3}$, и следовательно, объем призмы $V = S \cdot h = 48\sqrt{15}$.

Ответ. $48\sqrt{15}$.

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^9-2022x^3-\sqrt{2021}=0$.
Решение.
Перепишем уравнение в виде $x^9-2021x^3-x^3-\sqrt{2021}=0$.
тогда

$$x^3\left(x^6-2021\right)-\left(x^3+\sqrt{2021}\right)=0,$$
$$x^3\left(x^3-\sqrt{2021}\right)\left(x^3+\sqrt{2021}\right)-\left(x^3+\sqrt{2021}\right)=0,$$
$$\left(x^3+\sqrt{2021}\right)\left(x^6-x^3\sqrt{2021}-1\right)=0,$$
$$x^3+\sqrt{2021}=0, \text{ или } x^6-x^3\sqrt{2021}-1=0,$$
$$x_1=-\sqrt[6]{2021}; \qquad x^3=\frac{\sqrt{2021}\pm 45}{2},$$
$$x_{2,3}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2021}\pm 45}{2}}.$$

Ответ. $\left\{-\sqrt[6]{2021};\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2021}\pm 45}{2}}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Известно, что функция $f(x)$ при каждом значении $x\in(-\infty;+\infty)$ удовлетворяет равенству $f(x)-(x-0{,}5)f(-x-1)=1$. Найдите все такие функции $f(x)$.
Решение.
Подставим в уравнение аргумент $(-x-1)$ и запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x)-(x-0{,}5)f(-x-1)=1, \\ f(-x-1)-(-x-1-0{,}5)f(x+1-1)=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x)-(x-0{,}5)f(-x-1)=1, \\ f(-x-1)+(x+1{,}5)f(x)=1. \end{cases}$$

Решим систему методом исключения неизвестных, умножив второе уравнение на $(x$-0,5) и сложив результаты:

$$f(x)(1+(x-0{,}5)(x+1{,}5))=1+(x-0{,}5),$$
$$f(x)=\frac{0{,}5+x}{x^2+x+0{,}25}=\frac{0{,}5+x}{(0{,}5+x)^2}=\frac{1}{0{,}5+x}, x\neq -0{,}5.$$

Если $x=-0{,}5,$ то из исходного уравнения получим

$$f(-0{,}5)-(-0{,}5-0{,}5)f(0{,}5-1)=1,$$
$$f(-0{,}5)=0{,}5.$$

Окончательно,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{0{,}5+x}, x\neq -0{,}5, \\ 0{,}5, x=-0{,}5.\end{cases}$$

Ответ. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{0{,}5+x}, x\neq -0{,}5, \\ 0{,}5, x=-0{,}5.\end{cases}$

Задание 3. (15 баллов) Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 41 и 24 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.
Решение.

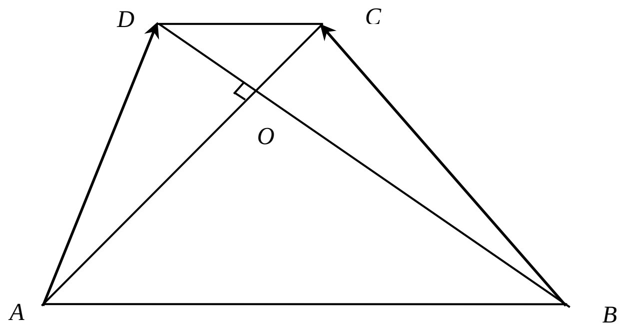

Рис. 1

Обозначим точку пересечение диагоналей O (рис.1).

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AO}=\bar{a}$ и $\overrightarrow{BO}=\bar{b}$.

Из подобия треугольников AOB и DOC имеем:

$$\frac{AO}{OC}=\frac{41}{24} \text{ и } \overrightarrow{OC}=\frac{24}{41}\overrightarrow{AO}=\frac{24}{41}\vec{a}.$$

$$\frac{BO}{OD}=\frac{41}{24} \text{ и } \overrightarrow{OD}=\frac{24}{41}\overrightarrow{BO}=\frac{24}{41}\vec{b}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{24}{41}\vec{b} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BC}=\vec{b}+\frac{24}{41}\vec{a}.$$

Найдем скалярное произведение

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\vec{a}+\frac{24}{41}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}+\frac{24}{41}\vec{a}\right)=\vec{a}\vec{b}+\frac{24}{41}\vec{a}\cdot\vec{a}+\frac{24}{41}\vec{b}\cdot\vec{b}+\left(\frac{24}{41}\right)^2\vec{a}\vec{b}.$$

Так как $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b}=0$.

По определению скалярного произведения векторов, получим $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 0^0=\left|\vec{a}\right|^2$ и $\vec{b}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|^2$.

Треугольник AOB прямоугольный, поэтому $\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2=\left|AB\right|^2=41^2$.

Итак, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{24}{41}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right)=\frac{24}{41}\cdot 41^2=984.$

Ответ. 984.

Задание 4. (20 баллов) Четырехметровая газовая труба проржавела в двух местах. Определить вероятность того, что все три получившиеся части можно будет использовать в качестве отводов к газовым плитам, если по нормативам плита не должна находиться на расстоянии ближе 1 м от магистральной газовой трубы.

Решение.

Обозначим размеры частей, на которые разрезали трубу x, y и $(400-x-y)$.

Очевидно, что величины x и y могут принимать любые значения из промежутка $(0;400)$. Тогда все множество возможных сочетаний $(x;y)$ можно изобразить на координатной плоскости OXY в виде прямоугольного треугольника со сторонами , равными 400 см (рис. 2).

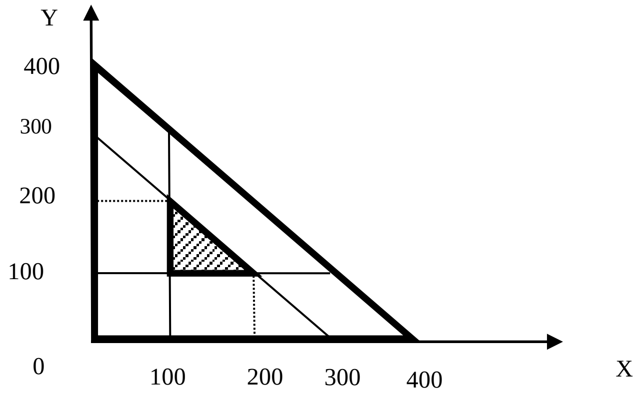

Рис. 2

Мерой этого множества можно считать площадь этого треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 400 = 80000$ см^2.

Для того, чтобы использовать получившиеся части в качестве отводов для плит, размер каждой из них должен быть не менее 1м, т.е. 100см. Множество значений x и y, удовлетворяющих этим условиям, можно описать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} x \geq 100, \\ y \geq 100, \\ 400 - x - y \geq 100, \end{cases}$$

которая отображается на координатной плоскости также в виде прямоугольного треугольника со сторонами 100 см и площадью $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 5000$ см^2.

Тогда, вероятность того, что размеры разрезанных частей подойдут для отводов плит составит

$$p = \frac{S_1}{S} = \frac{5000}{80000} = \frac{1}{16}.$$

Замечание. *При решении задачи может быть использовано подобие треугольников: коэффициент подобия прямоугольных треугольников с катетами 200 и 50 соответственно равен* $\frac{1}{4}$*, значит их площади относятся как* $\frac{1}{16}$.

Ответ. $\frac{1}{16}$**.**

Задание 5. (20 баллов) На торги выставлен лот из трех пакетов акций нефтедобывающих компаний: Разнефти, Дванефти и Тринефти. Суммарное количество акций пакетов Разнефти и Дванефти совпадает с количеством акций в пакете Тринефти. Пакет акций Дванефти в 3 раза дешевле пакета Разнефти, а их суммарная стоимость совпадает со стоимостью пакета Тринефти. Одна акция Разнефти превышает стоимость одной акции Дванефти на величину от 10 тыс. рублей до 18 тыс. рублей, а цена одной акции Тринефти колеблется в пределах от 18 тыс. рублей до 42 тыс. рублей. Определить, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций в лоте может составлять пакет акций Дванефти..

Решение.

Введем обозначения:

x – цена одной акции Дванефти,

y – цена одной акции Разнефти,

z – цена одной акции Тринефти,

n – количество акций в пакете Дванефти,

m – количество акций в пакете Разнефти.

Остальные условия задачи запишем в виде системы уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} 3xn = ym, \\ xn + ym = z(m+n), \\ 10 \le y - x \le 18, \\ 18 \le z \le 42; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{m}{n} = \dfrac{3x}{y}, \\ y = x + a, \\ z = x + \dfrac{am}{n+m}, \\ 10 \le a \le 18, \\ 18 \le z \le 42. \end{cases}$$

Необходимо найти пределы изменения величины $\dfrac{n}{n+m+(n+m)} \cdot 100\% = \dfrac{n}{2(n+m)} 100\%$.

Если удастся найти отношения $\dfrac{m}{n}$, то задача будет решена, так как $\dfrac{2(n+m)}{n} = 2(1+\dfrac{m}{n})$.

Определим сначала, при каких условиях процент акций Разнефти в общем лоте будет наименьшим.

Для этого $\dfrac{n}{2(n+m)} \to \min$, если $n \to \min, m \to \max$, $y - x \to \min$, следовательно, $y - x = 10$, $a = 10$.

Если $n \to \min, m \to \max$, то $z = x + \dfrac{10m}{n+m} \to \max$, следовательно, $z = 42$.

Тогда, $x = \dfrac{10m}{3n-m}$, $z = \dfrac{10m}{3n-m} + \dfrac{10m}{n+m} = 42$.

$5m(3n - m + n + m) = 21(3n - m)(n+m)$, $20mn = 21(3n^2 + 2mn - m^2)$, $21m^2 - 22mn - 63n^2 = 0$,

$21\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 - 22\dfrac{m}{n} - 63 = 0$, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{7}{3}$, $\dfrac{m}{n} = -\dfrac{9}{7}$.

По условию задачи выбираем $m = \dfrac{7}{3}n$, тогда наименьший процент $\dfrac{n}{2(n+m)} 100\% = 15\%$.

Аналогично найдем наибольший процент:

Для этого $\dfrac{n}{2(n+m)} \to \max$, если $n \to \max, m \to \min$, $y - x \to \max$, следовательно, $y - x = 18$, $a = 18$.

Если $n \to \max, m \to \min$, то $z = x + \dfrac{18m}{n+m} \to \min$, следовательно, $z = 18$.

Тогда, $x = \dfrac{18m}{3n-m}$, $z = \dfrac{18m}{3n-m} + \dfrac{18m}{n+m} = 18$,

$m^2 + 2mn - 3n^2 = 0$

$\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 + 2\dfrac{m}{n} - 3 = 0$, $\dfrac{m}{n} = 1, \dfrac{m}{n} = -3.$

По условию задачи выбираем $m = n$, наибольший процент $\dfrac{n}{2(n+m)} 100\% = 25\%$.

Ответ. В лоте содержится от 15% до 25% акций Дванефти от общего их количества.

Задание 6. (30 баллов) В сферу вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок CD – диаметр этой сферы, точка K – середина ребра AA_1. Найти объем призмы, если $CK = 2\sqrt{3}$, $DK = 2\sqrt{2}$.

Решение.

Плоскости оснований ABC и $A_1B_1C_1$ призмы пересекают сферу по окружностям, описанным около правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$; пусть их центры – точки O и O_1 соответственно.

Легко показать, что середина M отрезка OO_1 является центром сферы (рис. 3).

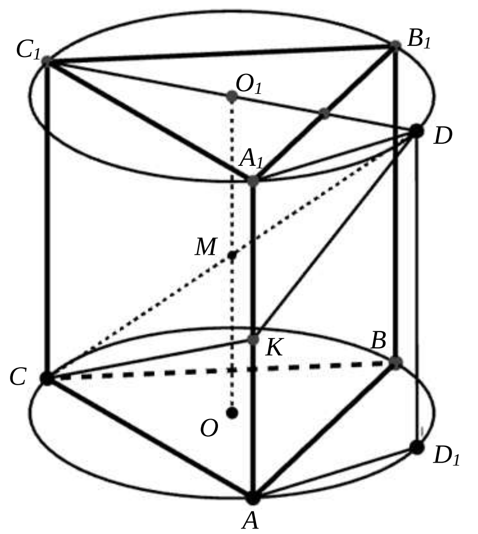

Рис. 3.

Проведем через точку C_1 диаметр C_1D окружности с центром в точке O_1. Покажем, что CD – диаметр сферы. Действительно, плоскость CC_1D перпендикулярна плоскостям основания и, значит, вместе с точкой O_1 содержит отрезок OO_1. Т.к. $C_1D = 2DO_1$, прямая CD пересекает отрезок OO_1 в его середине, т.е. в центре M заданной сферы.

Пусть D_1 – проекция точки D на плоскость основания ABC, высота призмы равна h, а радиусы окружностей с центрами O и O_1 равен r. Рассмотрим треугольники CAK и KA_1D. Учитывая, что $A_1D = AD_1 = r$ (треугольник A_1O_1D равносторонний), $AC = r\sqrt{3}$, $AK = KA_1 = \frac{h}{2}$, по т. Пифагора получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{h^2}{4} + 3r^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2, \\ \frac{h^2}{4} + r^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $r = \sqrt{2}$, $h = 2\sqrt{6}$. Тогда сторона основания равна $\sqrt{6}$, его площадь $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, и, следовательно, объем призмы $V = S \cdot h = 9\sqrt{2}$.

Ответ. $9\sqrt{2}$ **.**

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^6 - 2020x^2 - \sqrt{2021} = 0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $x^6 - 2021x^2 + x^2 - \sqrt{2021} = 0$.

тогда

$x^2\left(x^4 - 2021\right) + \left(x^2 - \sqrt{2021}\right) = 0,$

$x^2\left(x^2 - \sqrt{2021}\right)\left(x^2 + \sqrt{2021}\right) + \left(x^2 - \sqrt{2021}\right) = 0,$

$\left(x^2 - \sqrt{2021}\right)\left(x^4 + x^2\sqrt{2021} + 1\right) = 0,$

$x^2 - \sqrt{2021} = 0,$ или $x^4 + x^2\sqrt{2021} + 1 = 0,$

$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2021}$;

т.к. $\dfrac{-\sqrt{2021} \pm \sqrt{2017}}{2} < 0$, то уравнения $x^2 - \dfrac{-\sqrt{2021} \pm \sqrt{2017}}{2} = 0$ действительных корней не имеют.

Ответ. $\left\{\pm\sqrt[4]{2021}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Задана конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geq 3$) натуральных чисел, причём при всех $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k - 1$. В последовательности обязательно должен присутствовать член $a_k = 2021$. Определить, какое наибольшее количество трёхзначных чисел, кратных 25, может содержать эта последовательность.

Решение.

Конечная последовательность может содержать все трехзначные числа, так как может состоять из заданного количества чисел натурального ряда, начиная с выбранного числа a_i.

Докажем, что для любого члена арифметической прогрессии 1, 2, 3,… задаваемой формулой *n*-го члена $a_n = n$, справедливо равенство $a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_к - 1$.

Действительно, при любом значении k верны равенства

$a_k = k$, $a_{k+1} = k+1$, $a_{k+2} = k+2$, из которых следует, что

$3a_{k+1} - 2a_k - 1 = 3(k+1) - 2k - 1 = k + 2 = a_{k+2}$, т.е. выполняется равенство $a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k - 1$, что и требовалось доказать.

Например, последовательность, содержащая 2021: 3,4,5,6,…, 2018, 2019,2020,2021.

Т.о., последовательность может содержать все трёхзначные числа от 100 до 999. Среди которых чисел, делящихся на 25: 100, 125, 150, 175, 200, 225, 250, 275, …, 900, 925, 950, 975 – по 4 в каждой из девяти сотен, т.е. 36 чисел.

Ответ. 36 **.**

Задание 3. (15 баллов) Функция $f(x)$ удовлетворяет условию: для любых действительных чисел a и b выполняется равенство $f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3}$. Найти значение функции $f(2022)$, если $f(1)=1$, $f(4)=7$.

Решение.

Подставляя в заданное равенство пары чисел $a=4$, $b=1$ и $a=1$, $b=4$, соответственно, получим

Если $a=4$, $b=1$, то $f\left(\frac{4+2}{3}\right)=\frac{f(4)+2f(1)}{3}$, $f(2)=\frac{7+2\cdot 1}{3}=3$, $f(2)=3$.

Если $a=1$, $b=4$, то $f\left(\frac{1+2\cdot 4}{3}\right)=\frac{f(1)+2f(4)}{3}$, $f(3)=\frac{1+2\cdot 7}{3}=5$, $f(3)=5$.

Если взять $a=0$, $b=3$, получим $f\left(\frac{0+2\cdot 3}{3}\right)=\frac{f(0)+2f(3)}{3}$, $f(2)=\frac{f(0)+2f(3)}{3}$.

Значит, $f(0)=3f(2)-2f(3)$, $f(0)=3\cdot 3-2\cdot 5$, $f(0)=-1$.

Т.о., имеем $f(0)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=7$.

Составим цепочку равенств

$$f\left(\frac{2022+2\cdot 0}{3}\right)=\frac{f(2022)+2f(0)}{3}=f(674),$$

$$f\left(\frac{674+2\cdot 2}{3}\right)=\frac{f(674)+2f(2)}{3}=f(226),$$

$$f\left(\frac{226+2\cdot 1}{3}\right)=\frac{f(226)+2f(1)}{3}=f(76),$$

$$f\left(\frac{76+2\cdot 1}{3}\right)=\frac{f(76)+2f(1)}{3}=f(26),$$

$$f\left(\frac{26+2\cdot 2}{3}\right)=\frac{f(26)+2f(2)}{3}=f(10),$$

$$f\left(\frac{10+2\cdot 1}{3}\right)=\frac{f(10)+2f(1)}{3}=f(4).$$

Вычисляя в обратном порядке, получим:

$f(10)=3f(4)-2f(1)$, т.е. $f(10)=3\cdot 7-2\cdot 1=19$;

$f(26)=3f(10)-2f(2)$, т.е. $f(26)=3\cdot 19-2\cdot 3=51$;

$f(76)=3f(26)-2f(1)$, т.е. $f(76)=3\cdot 51-2\cdot 1=151$;

$f(226)=3f(76)-2f(1)$, т.е. $f(226)=3\cdot 151-2\cdot 1=451$;

$f(674)=3f(226)-2f(2)$, т.е. $f(674)=3\cdot 451-2\cdot 3=1347$;

$f(2022)=3f(674)-2f(0)$, т.е. $f(2022)=3\cdot 1347-2\cdot(-1)=4043$.

Ответ. 4043.

Задание 4. (20 баллов) В центре круглого поля стоит домик геологов. От него отходят 8 прямых дорог, разделяющих поле на 8 равных секторов. Два геолога отправляются в путешествие из своего домика со скоростью 5 км/ч по произвольно выбранной каждым из них дороге. Определить с какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 8 км.

Решение.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по соседним дорогам (рис. 1).

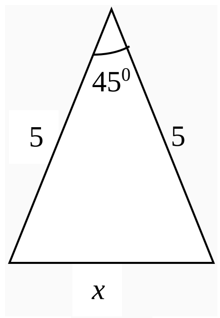

Рис. 1

По теореме косинусов: $x^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos 45° = 25\left(2 - \sqrt{2}\right)$,

$$x = 5\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$, что меньше 8.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по дорогам, расположенным через одну (рис. 2).

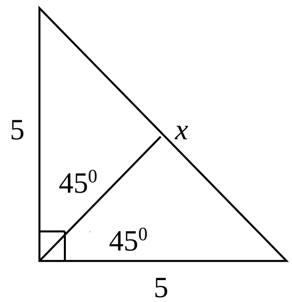

Рис. 2

По теореме Пифагора: $x^2 = 5^2 + 5^2$, $x = 5\sqrt{2}$, что меньше 8.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по дорогам, расположенным через две дороги (рис. 3).

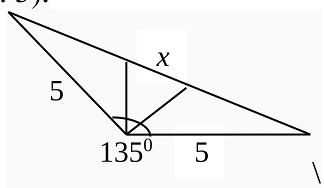

Рис. 3

По теореме косинусов: $x^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos 135° = 25\left(2 + \sqrt{2}\right)$,

$$x = 5\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$, что больше 8.

Т.о., расстояние будет больше 8 км, если геологи выберут разные дороги, причем через две дороги.

Возможные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 8 дорог, второй геолог тоже, т.е. $n = 8 \cdot 8 = 64$

Благоприятные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 8 дорог, второй геолог – только 3 (не ту же, не соседние дороги и не через одну), т.е. $n = 8 \cdot 3 = 24$.

Тогда, $P = \dfrac{24}{64} = 0{,}375$.

Ответ. 0,375.

Задание 5. (20 баллов) На первом месторождении использовалась аппаратура высшего класса, на втором - первого, причём высшего было меньше, чем первого. Сначала 40 % аппаратуры с первого месторождения передали на второе. Затем 20 % аппаратуры, оказавшейся на втором месторождении, передали на первое, при этом половина из передаваемой аппаратуры была первого класса. После этого аппаратуры высшего класса на первом месторождении оказалось на 26 единиц больше, чем на втором, а общее количество аппаратуры на втором месторождении увеличилось по сравнению с первоначальным более чем на 5 %. Найти общее количество аппаратуры первого класса.

Решение.

Пусть первоначально на первом месторождении было *x* единиц аппаратуры высшего класса, а на втором месторождении было *y* единиц аппаратуры первого класса $(x < y)$. После первого перевода на первом месторождении стало 0,6*x* единиц аппаратуры, а на втором месторождении – $y + 0{,}4x$ единиц. После второго перевода на первом месторождении стало $0{,}6x+0{,}2(y+0{,}4x) = 0{,}68x+0{,}2y$, а на втором месторождении – $0{,}8(y+0{,}4x)=0{,}8y+0{,}32x$.

После второго перевода аппаратуры высшего класса (половина из переводимой аппаратуры – первый класс) на первом месторождении стало $0{,}6x+0{,}1(y+0{,}4x)=0{,}64x+0{,}1y$, а на втором месторождении их стало $0{,}4x-0{,}1(y+0{,}4x) = 0{,}36x-0{,}1y$, причём $0{,}64x+0{,}1y$ на 26 больше, чем $0{,}36x-0{,}1y$.

Составим уравнение $0{,}64x+0{,}1y-(0{,}36x-0{,}1y)=26$, $7x+5y=650$, $y=130-\dfrac{7x}{5}$.

Так как *y* – число натуральное, то число *x* делится на 5.

После второго перевода общее количество аппаратуры на втором месторождении увеличилось по сравнению с первоначальным более чем на 5%, следовательно, $0{,}32x+0{,}8y>1{,}05y$, откуда $y<\dfrac{32x}{25}$.

Найдём все решения уравнения $7x+5y=650$, удовлетворяющие неравенствам $x<y$ и $y<\dfrac{32x}{25}$, т. е. удовлетворяющие двойному неравенству $x<130-\dfrac{7x}{5}<\dfrac{32x}{25}$

$$\begin{cases} x<130-\dfrac{7x}{5}, \\ 130-\dfrac{7x}{5}<\dfrac{32x}{25}, \end{cases} \quad \begin{cases} x<54\dfrac{1}{6}, \\ x>48\dfrac{34}{67}. \end{cases}$$

Этому двойному неравенству и условию «*x* делится на 5» удовлетворяет единственное значение $x=50$. Тогда $y=130-70=60$. Итак, было 60 единиц аппаратуры первого класса.

Ответ: 60.

Задание 6. (30 баллов) В сферу вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок CD – диаметр этой сферы, точка K и L – середина ребра AA_1 и AB соответственно. Найти объем призмы, если $DL=\sqrt{2}$, $DK=\sqrt{3}$.

Решение.

Плоскости оснований ABC и $A_1B_1C_1$ призмы пересекают сферу по окружностям, описанным около правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пусть их центры – точки O и O_1 соответственно.

Легко показать, что середина M отрезка OO_1 является центром сферы (рис. 5).

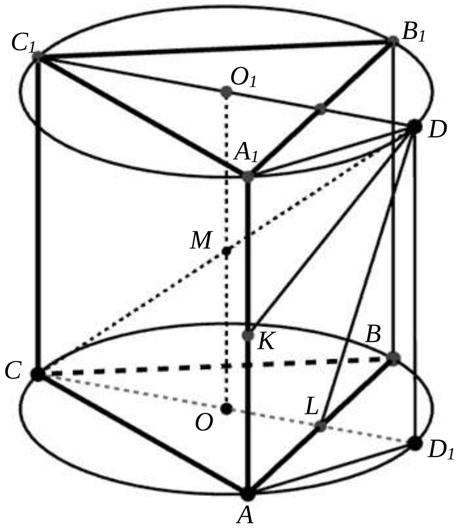

Рис. 5.

Проведем через точку C_1 диаметр C_1D окружности с центром в точке O_1. Покажем, что CD – диаметр сферы. Действительно, плоскость CC_1D перпендикулярна плоскостям основания и, значит, вместе с точкой O_1 содержит отрезок OO_1. Т.к. $C_1D = 2DO_1$, прямая CD пересекает отрезок OO_1 в его середине, т.е. в центре M заданной сферы.

Пусть D_1 – проекция точки D на плоскость основания ABC, высота призмы равна h, а радиусы окружностей с центрами O и O_1 равен r. Рассмотрим треугольники KA_1D и LDD_1. Учитывая, что $A_1D = AD_1 = r$ (треугольник A_1O_1D равносторонний), $LD_1 = \frac{r}{2}$, $DD_1 = h$, $KA_1 = \frac{h}{2}$, по т. Пифагора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{h^2}{4} + r^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2, \\ h^2 + \frac{r^2}{4} = \left(\sqrt{2}\right)^2. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Тогда сторона основания равна $2\sqrt{2}$, его площадь $S = 2\sqrt{3}$, и следовательно, объем призмы $V = S \cdot h = 4$.

Ответ. 4.

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^6-2021x^2+\sqrt{2022}=0$.
Решение.
Перепишем уравнение в виде $x^6-2022x^2+x^2+\sqrt{2022}=0$.
тогда
$x^2\left(x^4-2022\right)+\left(x^2+\sqrt{2022}\right)=0,$
$x^2\left(x^2-\sqrt{2022}\right)\left(x^2+\sqrt{2022}\right)+\left(x^2+\sqrt{2022}\right)=0,$
$\left(x^2+\sqrt{2022}\right)\left(x^4-x^2\sqrt{2022}+1\right)=0,$
$x^2+\sqrt{2022}\neq 0,$ или $x^4-x^2\sqrt{2022}+1=0,$

$$x^2=\frac{\sqrt{2022}\pm\sqrt{2018}}{2}$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2022}\pm\sqrt{2018}}{2}}$$

Ответ. $\left\{\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2022}\pm\sqrt{2018}}{2}}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Задана конечная возрастающая последовательность $a_1,a_2,\ldots,a_n$ $(n\geq 3)$ натуральных чисел, причём при всех $\kappa\leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=3a_{k+1}-2a_k-2$. В последовательности обязательно должен встречаться $a_k=2022$. Определить какое наибольшее количество трёхзначных чисел, кратных 4, может содержать эта последовательность.

Решение.

Так как необходимо найти наибольшее количество трёхзначных чисел, кратных 4, то между членами должно быть минимальное отклонение. Заметим, что арифметическая прогрессия с разностью $d=2$, заданная формулой $a_k=2k$, удовлетворяет равенству $a_{k+2}=3a_{k+1}-2a_k-2$.

Действительно,

$a_k=2k,\quad a_{k+1}=2k+2,\ a_{k+2}=2k+4$, или по формуле

$a_{k+2}=3a_{k+1}-2a_k-2=3(2k+2)-2\cdot 2k-2=2k+4$

Последовательность, содержащая 2022: 4,6,…, 2018, 2020,2022.

Данная конечная последовательность может содержать все четные трехзначные числа от 100 до 999. Среди них чисел, делящихся на 4: 100, 104, 108, 112, …, 992, 925, 950, 996 – по 25 в каждой из девяти сотен, т. е. 225 чисел.

Ответ. 225 **.**

Задание 3. (15 баллов) Функция $f(x)$ удовлетворяет условию: для любых действительных чисел a и b выполняется равенство $f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3}$. Найти значение функции $f(2022)$, если $f(1)=5$, $f(4)=2$.

Решение.

Подставляя в заданное равенство пары чисел $a=4$, $b=1$ и $a=1$, $b=4$, соответственно, получим

Если $a=4$, $b=1$, то $f\left(\frac{4+2}{3}\right)=\frac{f(4)+2f(1)}{3}$, $f(2)=\frac{2+2\cdot 5}{3}=4$, $f(2)=4$.

Если $a=1$, $b=4$, то $f\left(\frac{1+2\cdot 4}{3}\right)=\frac{f(1)+2f(4)}{3}$, $f(3)=\frac{5+2\cdot 2}{3}=3$, $f(3)=3$.

Если взять $a=0$, $b=3$, получим $f\left(\frac{0+2\cdot 3}{3}\right)=\frac{f(0)+2f(3)}{3}$, $f(2)=\frac{f(0)+2f(3)}{3}$.

Значит, $f(0)=3f(2)-2f(3)$, $f(0)=3\cdot 4-2\cdot 3$, $f(0)=6$.

Т.о., имеем $f(0)=6$, $f(1)=5$, $f(2)=4$, $f(3)=3$, $f(4)=2$.

Составим цепочку равенств

$$f\left(\frac{2022+2\cdot 0}{3}\right)=\frac{f(2022)+2f(0)}{3}=f(674),$$

$$f\left(\frac{674+2\cdot 2}{3}\right)=\frac{f(674)+2f(2)}{3}=f(226),$$

$$f\left(\frac{226+2\cdot 1}{3}\right)=\frac{f(226)+2f(1)}{3}=f(76),$$

$$f\left(\frac{76+2\cdot 1}{3}\right)=\frac{f(76)+2f(1)}{3}=f(26),$$

$$f\left(\frac{26+2\cdot 2}{3}\right)=\frac{f(26)+2f(2)}{3}=f(10),$$

$$f\left(\frac{10+2\cdot 1}{3}\right)=\frac{f(10)+2f(1)}{3}=f(4).$$

Вычисляя в обратном порядке, получим:

$f(10)=3f(4)-2f(1)$, т.е. $f(10)=3\cdot 2-2\cdot 5=-4$;

$f(26)=3f(10)-2f(2)$, т.е. $f(26)=3\cdot(-4)-2\cdot 4=-20$;

$f(76)=3f(26)-2f(1)$, т.е. $f(76)=3\cdot(-20)-2\cdot 5=-70$;

$f(226)=3f(76)-2f(1)$, т.е. $f(226)=3\cdot(-70)-2\cdot 5=-220$;

$f(674)=3f(226)-2f(2)$, т.е. $f(674)=3\cdot(-220)-2\cdot 4=-668$;

$f(2022)=3f(674)-2f(0)$, т.е. $f(2022)=3\cdot(-668)-2\cdot 6=-2016$.

Ответ. -2016.

Задание 4. (20 баллов) В центре круглого поля стоит домик геологов. От него отходят 8 прямых дорог, разделяющих поле на 8 равных секторов. Два геолога отправляются в путешествие из своего домика со скоростью 4 км/ч по произвольно выбранной каждым из них дороге. Определить с какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 6 км.

Решение.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по соседним дорогам (рис. 1).

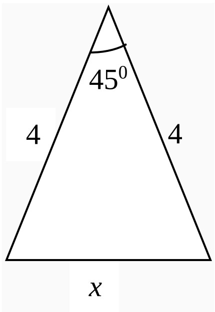

Рис. 1

По теореме косинусов: $x^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cos 45° = 16\left(2 - \sqrt{2}\right)$, $x = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, что меньше 6.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по дорогам, расположенным через одну (рис. 2).

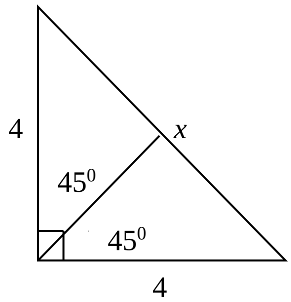

Рис. 2

По теореме Пифагора: $x^2 = 4^2 + 4^2$, $x = 4\sqrt{2}$, что меньше 6.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по дорогам, расположенным через две дороги (рис. 3).

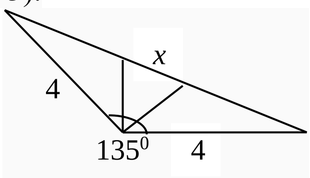

Рис. 3

По теореме косинусов: $x^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cos 135° = 16\left(2 + \sqrt{2}\right)$, $x = 4\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, что больше 6.

Т.о., расстояние будет больше 6 км, если геологи выберут разные дороги, причем через две дороги.

Возможные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 8 дорог, второй геолог тоже, т.е. $n = 8 \cdot 8 = 64$

Благоприятные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 8 дорог, второй геолог – только 3 (не ту же, не соседние дороги и не через одну), т.е. $n = 8 \cdot 3 = 24$.

Тогда, $P = \frac{24}{64} = 0{,}375$.

Ответ. 0,375.

Задание 5. (20 баллов) На первом месторождении использовалась аппаратура высшего класса, на втором – первого, причём высшего было меньше, чем первого. Сначала 30 % аппаратуры с первого месторождения передали на второе. Затем 10 % аппаратуры, оказавшейся на втором месторождении, передали на первое, при этом половина из передаваемой аппаратуры была первого класса. После этого аппаратуры высшего класса на первом месторождении оказалось на 6 единиц больше, чем на втором, а общее количество аппаратуры на втором месторождении увеличилось по сравнению с первоначальным более чем на 2 %. Найти общее количество аппаратуры первого класса.

Решение.

Пусть первоначально на первом месторождении было x единиц аппаратуры высшего класса, а на втором месторождении было y единиц аппаратуры первого класса ($x<y$). После первого перевода на первом месторождении стало $0{,}7x$ единиц аппаратуры, а на втором месторождении – $y+0{,}3x$ единиц. После второго перевода на первом месторождении стало $0{,}7x+0{,}1(y+0{,}3x) = 0{,}73x+0{,}1y$, а на втором месторождении – $0{,}9(y+0{,}3x)=0{,}9y+0{,}27x$.

После второго перевода аппаратуры высшего класса (половина из переводимой аппаратуры – первый класс) на первом месторождении стало $0{,}7x+0{,}05(y+0{,}3x)=0{,}715x+0{,}05y$, а на втором месторождении ее стало $0{,}3x-0{,}05(y+0{,}3x) = 0{,}285x-0{,}05y$, причём $0{,}715x+0{,}05y$ на 6 больше, чем $0{,}285x-0{,}05y$.

Составим уравнение $0{,}715x+0{,}05y-(0{,}285x-0{,}05y)=6$,

$43x+10y=600$, $y=60-4{,}3x$.

Так как y – число натуральное, то число x делится на 10.

После второго перевода общее количество аппаратуры на втором месторождении увеличилось по сравнению с первоначальным более чем на 2 %, следовательно, $0{,}9y+0{,}27x>1{,}02y$,

Откуда $y<\frac{9}{4}x$.

Найдём все решения уравнения $43x+10y=600$, удовлетворяющие неравенствам $x<y$$x$<$y$ и $y<\frac{9}{4}x$, т. е. удовлетворяющие двойному неравенству

$$x<60-4{,}3x<\frac{9}{4}x,$$

$$\begin{cases} x<60-4{,}3x, \\ 60-4{,}3x<\frac{9}{4}x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x<11\frac{17}{53}, \\ x>9\frac{21}{31}. \end{cases}$$

Этому двойному неравенству и условию «x делится на 10» удовлетворяет единственное значение $x=12$. Тогда $y=60-4{,}3\cdot 10=17$.

Итак, было 17 единиц аппаратуры первого класса.

Ответ: 17.

Задание 6. (30 баллов) В сферу вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок C_1D – диаметр этой сферы, точка K – середина ребра CC_1. Найти объем призмы, если $DK=2$, $DA=\sqrt{6}$.

Решение.

Плоскости оснований ABC и $A_1B_1C_1$ призмы пересекают сферу по окружностям, описанным около правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пусть их центры – точки O и O_1 соответственно.

Легко показать, что середина M отрезка OO_1 является центром сферы (рис. 5).

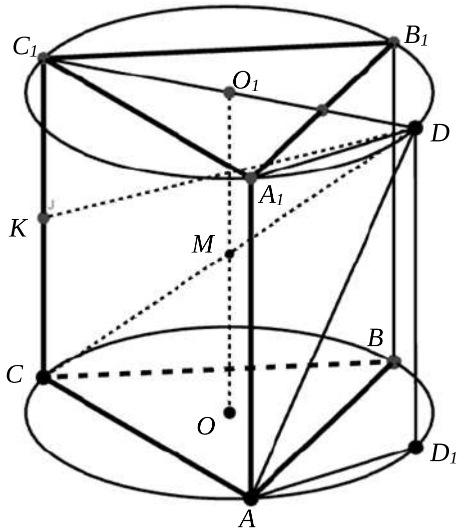

Рис. 5

Проведем через точку C_1 диаметр C_1D окружности с центром в точке O_1. Покажем, что CD – диаметр сферы. Действительно, плоскость CC_1D перпендикулярна плоскостям основания и, значит, вместе с точкой O_1 содержит отрезок OO_1. Т.к. $C_1D = 2DO_1$, прямая CD пересекает отрезок OO_1 в его середине, т.е. в центре M заданной сферы.

Пусть D_1 – проекция точки D на плоскость основания ABC, высота призма равна h, а радиусы окружностей с центрами O и O_1 равен r. Рассмотрим треугольники KC_1D и ADD_1. Учитывая, что $C_1D = 2r$, $AD_1 = r$ (треугольник A_1O_1D равносторонний), $DD_1 = h$, $KC_1 = \dfrac{h}{2}$, по т. Пифагора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{4} + 4r^2 = 2^2, \\ h^2 + r^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $h = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Тогда сторона основания равна $\sqrt{2}$, его площадь $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, и следовательно, объем призмы $V = S \cdot h = 2$.

Ответ. 2.

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^6 - 2022x^2 + \sqrt{2021} = 0$.
Решение.
Перепишем уравнение в виде $x^6 - 2021x^2 - x^2 + \sqrt{2021} = 0$.
тогда

$$x^2\left(x^4 - 2021\right) - \left(x^2 - \sqrt{2021}\right) = 0,$$

$$x^2\left(x^2 - \sqrt{2021}\right)\left(x^2 + \sqrt{2021}\right) - \left(x^2 - \sqrt{2021}\right) = 0,$$

$$\left(x^2 - \sqrt{2021}\right)\left(x^4 + x^2\sqrt{2021} - 1\right) = 0,$$

$$x^2 - \sqrt{2021} = 0, \text{ или } x^4 + x^2\sqrt{2021} - 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2021}; \qquad x^2 = \frac{-\sqrt{2021}+45}{2}, \; x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2021}+45}{2}}$$

Т.к. $\frac{-\sqrt{2021}-45}{2} < 0$, уравнение $x^2 + \frac{\sqrt{2021}+45}{2} = 0$ действительных корней не имеет.

Ответ. $\left\{\pm\sqrt[4]{2021}; \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2021}+45}{2}}\right\}$.

Задание 2. (10 баллов) Найти наибольшее значение параметра b, при котором неравенство $b\sqrt{b}(x^2 - 10x + 25) + \frac{\sqrt{b}}{(x^2 - 10x + 25)} \leq \frac{1}{5} \cdot \sqrt[4]{b^3} \cdot \left|\sin\frac{\pi x}{10}\right|$ имеет хотя бы одно решение.
Решение.

$$b\sqrt{b}(x^2 - 10x + 25) + \frac{\sqrt{b}}{(x^2 - 10x + 25)} \leq \frac{1}{5} \cdot \sqrt[4]{b^3} \cdot \left|\sin\frac{\pi x}{10}\right|,$$

$$b\sqrt{b}(x-5)^2 + \frac{\sqrt{b}}{(x-5)^2} \leq \frac{1}{5}\sqrt[4]{b^3} \cdot \left|\sin\frac{\pi x}{10}\right|,$$

$$\sqrt[4]{b^3}(x-5)^2 + \frac{1}{\sqrt[4]{b}(x-5)^2} \leq \frac{1}{5}\left|\sin\frac{\pi x}{10}\right|.$$

Применяя неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом, перейдем к неравенству:

$$2\sqrt{\sqrt[4]{b^3}(x-5)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{b}(x-5)^2}} \leq \sqrt[4]{b^3}(x-5)^2 + \frac{1}{\sqrt[4]{b}(x-5)^2} \leq \frac{1}{5} \cdot \left|\sin\frac{\pi x}{10}\right| \leq \frac{1}{5}.$$

Решая это неравенство, получим

$$2\sqrt[4]{b} \leq \frac{1}{5}, \; \sqrt[4]{b} \leq \frac{1}{10}, \; b \leq \frac{1}{10000}.$$

Если $b=\frac{1}{10000}$,то неравенство $\frac{1}{1000}(x-5)^2+\frac{10}{(x-5)^2}\le\frac{1}{5}\cdot\left|\sin\frac{\pi x}{10}\right|$ имеет решение при $x=15$:

$$\frac{100}{1000}+\frac{10}{100}\le\frac{1}{5}\cdot\left|\sin\frac{\pi 15}{10}\right|,\ 1\le\left|\sin\frac{3\pi}{2}\right|.$$

Это единственное значение, при котором неравенство имеет решение.

2 способ.

$$b\sqrt{b}(x^2-10x+25)+\frac{\sqrt{b}}{(x^2-10x+25)}\le\frac{1}{5}\cdot\sqrt[4]{b^3}\cdot\left|\sin\frac{\pi x}{10}\right|,$$

$$b\sqrt{b}(x-5)^2+\frac{\sqrt{b}}{(x-5)^2}\le\frac{1}{5}\cdot\sqrt[4]{b^3}\cdot\left|\sin\frac{\pi x}{10}\right|\le\frac{1}{5}\sqrt[4]{b^3},$$

$$b\left(\sqrt{b}(x-5)^2+\frac{1}{\sqrt{b}(x-5)^2}\right)\le\frac{1}{5}\sqrt[4]{b^3}.$$

В скобках получили сумму взаимообратных чисел, которые обладают свойством $a+\frac{1}{a}\ge 2$.

Следовательно, получим систему неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{b}(x-5)^2+\dfrac{1}{\sqrt{b}(x-5)^2}\ge 2,\\ \sqrt{b}(x-5)^2+\dfrac{1}{\sqrt{b}(x-5)^2}\le\dfrac{1}{5}\sqrt[4]{b}.\end{cases}$$

Эта система имеет решение, только если $\frac{1}{5}\sqrt[4]{b}=2$, $\sqrt[4]{b}=0{,}1$, $b=0{,}001$.

Ответ. 0,0001.

Задание 3. (15 баллов) Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 367 и 6 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение.

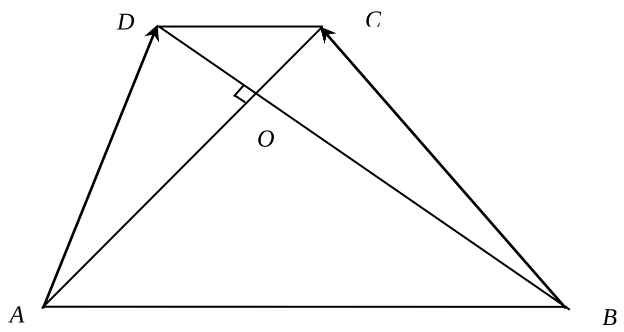

Рис. 1

Обозначим точку пересечения диагоналей O (рис. 1).

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AO}=\bar{a}$ и $\overrightarrow{BO}=\bar{b}$.

Из подобия треугольников AOB и DOC имеем:

$\frac{AO}{OC}=\frac{367}{6}$ и $\overrightarrow{OC}=\frac{6}{367}\overrightarrow{AO}=\frac{6}{367}\vec{a}$.

$\frac{BO}{OD}=\frac{367}{6}$ и $\overrightarrow{OD}=\frac{6}{367}\overrightarrow{BO}=\frac{6}{367}\vec{b}$.

Тогда

$\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \dfrac{6}{367}\vec{b}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \dfrac{6}{367}\vec{a}$.

Найдем скалярное произведение

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\vec{a} + \frac{6}{367}\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{b} + \frac{6}{367}\vec{a}\right) = \vec{a}\vec{b} + \frac{6}{367}\vec{a} \cdot \vec{a} + \frac{6}{367}\vec{b} \cdot \vec{b} + \left(\frac{6}{367}\right)^2 \vec{a}\vec{b}.$$

Так как $\vec{a} \perp \vec{b},$ то $\vec{a}\vec{b} = 0$.

По определению скалярного произведения векторов, получим $\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos 0^0 = \left|\vec{a}\right|^2$ и $\vec{b} \cdot \vec{b} = \left|\vec{b}\right|^2$.

Треугольник АОВ прямоугольный, поэтому $\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 = \left|AB\right|^2 = 367^2$.

Итак, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{6}{367}\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2\right) = \dfrac{6}{367} \cdot 367^2 = 2202.$

Ответ. 2202.

Задание 4. (20 баллов) В центре круглого поля стоит домик геологов. От него отходят 6 прямых дорог, разделяющих поле на 6 равных секторов. Два геолога отправляются в путешествие из своего домика со скоростью 5 км/ч по произвольно выбранной каждым из них дороге. Определить с какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 8 км.

Решение.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по соседним дорогам (рис. 2).

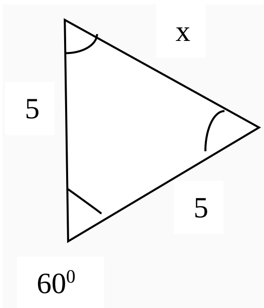

Рис. 2

Т.к. треугольник равносторонний, то $x = 5$, что меньше 8.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по дорогам, расположенным через одну (рис. 3).

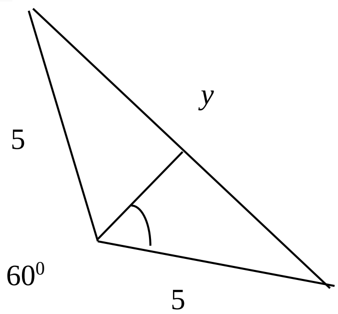

Рис. 3

$\dfrac{y}{2} = 5\sin 60° = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$, $y = 5\sqrt{3}$, что больше 8.

Т.о., расстояние будет больше 8 км, если геологи не выберут одинаковые или соседние дороги.

Возможные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 6 дорог, второй геолог тоже, т.е. $n = 6 \cdot 6 = 36$

Благоприятные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 6 дорог, второй геолог – только 3 (не ту же и не соседние дороги), т.е. $n = 6 \cdot 3 = 18$.

Тогда, $P = \frac{18}{36} = 0{,}5$.

Ответ. 0,5.

Задание 5. (20 баллов) Три компрессорные станции расположены не на одной прямой, но соединены прямолинейными дорогами. Расстояние от первой станции до третьей через вторую вчетверо длиннее прямолинейного пути между ними; расстояние от первой станции до второй через третью на a км длиннее прямолинейного пути; расстояние от второй станции до третьей через первую равно 85 км. Определить все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение компрессорных станций. Вычислить расстояния между компрессорными станциями при $a = 5$.

Решение.

Обозначим за x – расстояние между первой и второй компрессорными станциями, y – расстояние между второй и третьей, а z – расстояние между первой и третьей (рис. 4).

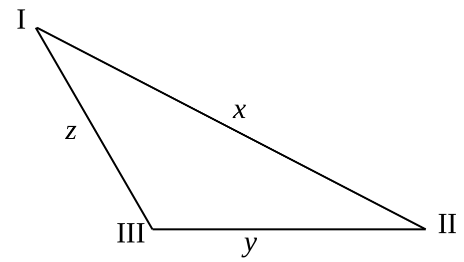

Рис. 4

В соответствии с условиям задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 4z, \\ z + y = x + a, \\ x + z = 85. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выразим z: $z = 85 - x$, получим систему

$$\begin{cases} x + y = 4(85 - x), \\ 85 - x + y = x + a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + y = 340, \\ 2x - y = 85 - a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + y = 340, \\ 7x = 425 - a. \end{cases}$$

Тогда, $x = \frac{425 - a}{7}$, $y = \frac{255 + 5a}{7}$ $z = \frac{170 + a}{7}$.

Определим все значения a, для которых были бы возможным найденные значения x, y и z. Используя неравенство треугольника (любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон), то составим систему неравенств для оценки значения параметра a:

$$\begin{cases} x < y + z, \\ y < x + z, \\ z < x + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{425-a}{7} < \dfrac{255+5a}{7} + \dfrac{170+a}{7}, \\ \dfrac{255+5a}{7} < \dfrac{425-a}{7} + \dfrac{170+a}{7}, \\ \dfrac{170+a}{7} < \dfrac{425-a}{7} + \dfrac{255+5a}{7}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $0 < a < 68$.

Вычислим при $a = 5$ расстояния между компрессорными станциями: $x = \dfrac{425-5}{7} = 60$ км, $y = \dfrac{255+25}{7} = 40$ км, $z = \dfrac{170+5}{7} = 25$ км.

Ответ. $0 < a < 68$; 60 км, 40 км, 25 км.

Задание 6. (30 баллов) В сферу вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок CD – диаметр этой сферы, точка K и L – середина ребра AA_1 и AB соответственно. Найти объем призмы, если $DL = \sqrt{6}$, $DK = 3$.

Решение.

Плоскости оснований ABC и $A_1B_1C_1$ призмы пересекают сферу по окружностям, описанным около правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пусть их центры – точки O и O_1 соответственно.

Легко показать, что середина M отрезка OO_1 является центром сферы (рис. 5).

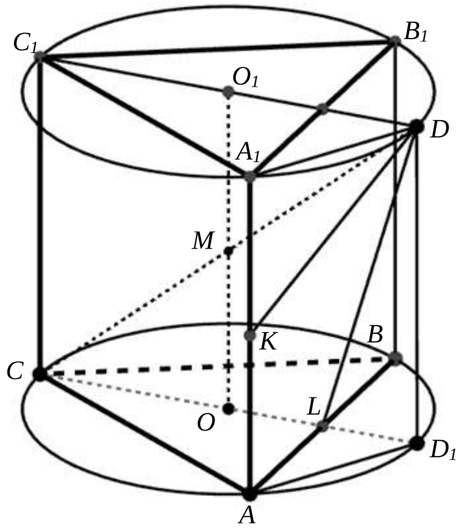

Рис. 5.

Проведем через точку C_1 диаметр C_1D окружности с центром в точке O_1. Покажем, что CD – диаметр сферы. Действительно, плоскость CC_1D перпендикулярна плоскостям основания и, значит, вместе с точкой O_1 содержит отрезок OO_1. Т.к. $C_1D = 2DO_1$, прямая CD пересекает отрезок OO_1 в его середине, т.е. в центре M заданной сферы.

Пусть D_1 – проекция точки D на плоскость основания ABC, высота призмы равна h, а радиусы окружностей с центрами O и O_1 равен r. Рассмотрим треугольники KA_1D и LDD_1. Учитывая, что $A_1D = AD_1 = r$ (треугольник A_1O_1D равносторонний), $LD_1 = \frac{r}{2}$, $DD_1 = h$, $KA_1 = \frac{h}{2}$, по т. Пифагора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{h^2}{4} + r^2 = 3^2, \\ h^2 + \frac{r^2}{4} = \left(\sqrt{6}\right)^2. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $r = 2\sqrt{2}$, $h = 2$. Тогда сторона основания равна $2\sqrt{6}$, его площадь $S = 6\sqrt{3}$, и следовательно, объем призмы $V = S \cdot h = 12\sqrt{3}$.

Ответ. $12\sqrt{3}$ **.**

Задание 1. (5 баллов) Решить уравнение $x^6-2022x^2-\sqrt{2021}=0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $x^6-2021x^2-x^2-\sqrt{2021}=0$.

тогда

$$x^2\left(x^4-2021\right)-\left(x^2+\sqrt{2021}\right)=0,$$

$$x^2\left(x^2-\sqrt{2021}\right)\left(x^2+\sqrt{2021}\right)-\left(x^2+\sqrt{2021}\right)=0,$$

$$\left(x^2+\sqrt{2021}\right)\left(x^4-x^2\sqrt{2021}-1\right)=0,$$

$x^2+\sqrt{2021}\neq 0$ при любом x.

$$x^4-x^2\sqrt{2021}-1=0,$$

$$x^2=\frac{\sqrt{2021}+45}{2},\ x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2021}+45}{2}}.$$

Т.к. $\frac{\sqrt{2021}-45}{2}<0$, уравнение $x^2-\frac{\sqrt{2021}-45}{2}=0$ действительных корней не имеет.

Ответ. $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2021}+45}{2}}$.

Задание 2. (10 баллов) Найти наибольшее значение параметра *m*, при котором неравенство $m\sqrt{m}(x^2-6x+9)+\frac{\sqrt{m}}{(x^2-6x+9)}\leq\sqrt[4]{m^3}\cdot\left|\cos\frac{\pi x}{5}\right|$ имеет хотя бы одно решение.

Решение.

1 способ.

$$m\sqrt{m}(x^2-6x+9)+\frac{\sqrt{m}}{(x^2-6x+9)}\leq\sqrt[4]{m^3}\cdot\left|\cos\frac{\pi x}{5}\right|,$$

$$m\sqrt{m}(x-3)^2+\frac{\sqrt{m}}{(x-3)^2}\leq\sqrt[4]{m^3}\cdot\left|\cos\frac{\pi x}{5}\right|,$$

$$\sqrt[4]{m^3}(x-3)^2+\frac{1}{\sqrt[4]{m}(x-3)^2}\leq\left|\cos\frac{\pi x}{5}\right|,$$

Применяя неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом, перейдем к неравенству:

$$2\sqrt{\sqrt[4]{m^3}(x-3)^2\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{m}(x-3)^2}}\leq\sqrt[4]{m^3}(x-3)^2+\frac{1}{\sqrt[4]{m}(x-3)^2}\leq\left|\cos\frac{\pi x}{5}\right|\leq 1.$$

Решая это неравенство, получим

$$2\sqrt[4]{m}\leq 1,\ \sqrt[4]{m}\leq\frac{1}{2},\ m\leq\frac{1}{16}.$$

Если $m=\frac{1}{16}$,то неравенство $\frac{1}{8}(x-3)^2+\frac{2}{(x-3)^2}\le\left|\cos\frac{\pi x}{5}\right|$ имеет решение при $x=5$:

$\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{2}{4}\le\left|\cos\frac{5\pi}{5}\right|$, $1\le|\cos\pi|$.

Это единственное значение, при котором неравенство имеет решение.

2 способ.

$$m\sqrt{m}(x^2-6x+9)+\frac{\sqrt{m}}{(x^2-6x+9)}\le\sqrt[4]{m^3}\cdot\left|\cos\frac{\pi x}{5}\right|,$$

$$m\left(\sqrt{m}(x-3)^2+\frac{1}{\sqrt{m}(x-3)^2}\right)\le m^{\frac{3}{4}}\left|\cos\frac{\pi x}{5}\right|\le m^{\frac{3}{4}},$$

В скобках получили сумму взаимообратных чисел, которые обладают свойством $a+\frac{1}{a}\ge 2$.

Следовательно, получим систему неравенств

$$\begin{cases}\sqrt{m}(x-3)^2+\dfrac{1}{\sqrt{m}(x-3)^2}\ge 2,\\[2mm] \sqrt{m}(x-3)^2+\dfrac{1}{\sqrt{m}(x-3)^2}\le\dfrac{1}{m^{\frac{1}{4}}}.\end{cases}$$

Эта система имеет решение, только если $\frac{1}{m^{\frac{1}{4}}}=2$, $m^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{16}=0{,}0625$.

Ответ. 0,0625.

Задание 3. (15 баллов) Основания *AB* и *CD* трапеции *ABCD* равны 101 и 20 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение.

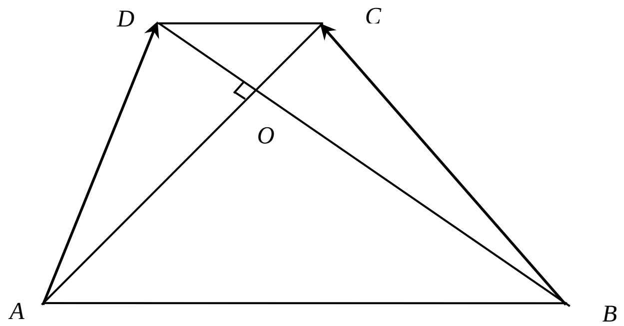

Рис. 1

Обозначим точку пересечения диагоналей *O* (рис. 1).

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AO}=\bar{a}$ и $\overrightarrow{BO}=\bar{b}$.

Из подобия треугольников *AOB* и *DOC* имеем:

$\frac{AO}{OC}=\frac{101}{20}$ и $\overrightarrow{OC}=\frac{20}{101}\overrightarrow{AO}=\frac{20}{101}\vec{a}$.

$\frac{BO}{OD}=\frac{101}{20}$ и $\overrightarrow{OD}=\frac{20}{101}\overrightarrow{BO}=\frac{20}{101}\vec{b}$.

Тогда

$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{20}{101}\vec{b}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\frac{20}{101}\vec{a}$.

Найдем скалярное произведение

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\vec{a}+\frac{20}{101}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}+\frac{20}{101}\vec{a}\right)=\vec{a}\vec{b}+\frac{20}{101}\vec{a}\cdot\vec{a}+\frac{20}{101}\vec{b}\cdot\vec{b}+\left(\frac{20}{101}\right)^2\vec{a}\vec{b}.$$

Так как $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b}=0$.

По определению скалярного произведения векторов, получим $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 0^0=\left|\vec{a}\right|^2$ и $\vec{b}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|^2$.

Треугольник AOB прямоугольный, поэтому $\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2=\left|AB\right|^2=101^2$.

Итак, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{20}{101}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right)=\frac{20}{101}\cdot 101^2=2020.$

Ответ. 2020.

Задание 4. (20 баллов) В центре круглого поля стоит домик геологов. От него отходят 6 прямых дорог, разделяющих поле на 6 равных секторов. Два геолога отправляются в путешествие из своего домика со скоростью 4 км/ч по произвольно выбранной каждым из них дороге. Определить с какой вероятностью расстояние между ними через час составит не менее 6 км.

Решение.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по соседним дорогам (рис. 2).

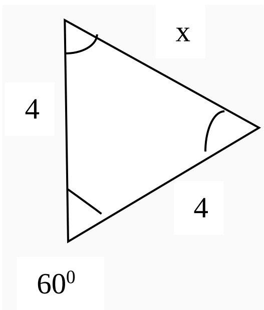

Рис. 2

Т.к. треугольник равносторонний, то $x=4$, что меньше 6.

Найдем расстояние между геологами через 1 час, если они идут по дорогам, расположенным через одну (рис. 3).

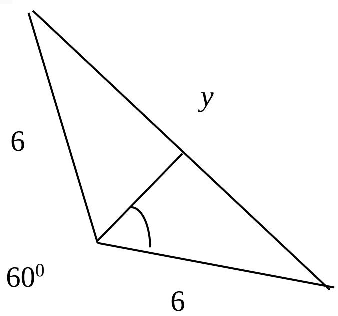

Рис. 3

$\frac{y}{2}=4\sin 60°=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$, $y=4\sqrt{3}$, что не меньше 6.

Т.о., расстояние будет не меньше 6 км, если геологи не выберут одинаковые или соседние дороги.

Возможные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 6 дорог, второй геолог тоже, т.е. $n = 6 \cdot 6 = 36$

Благоприятные исходы. Первый геолог может выбрать любую из 6 дорог, второй геолог – только 3 (не ту же и не соседние дороги), т.е. $n = 6 \cdot 3 = 18$.

Тогда, $P = \dfrac{18}{36} = 0{,}5$.

Ответ. 0,5.

Задание 5. (20 баллов) Три компрессорные станции расположены не на одной прямой, но соединены прямолинейными дорогами. Расстояние от первой станции до третьей через вторую вдвое длиннее прямолинейного пути между ними; расстояние от первой станции до второй через третью на a км длиннее прямолинейного пути; расстояние от второй станции до третьей через первую равно 75 км. Определить все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение компрессорных станций. Вычислить расстояния между компрессорными станциями при $a = 15$.

Решение.

Обозначим за x – расстояние между первой и второй компрессорными станциями, y – расстояние между второй и третьей, а z – расстояние между первой и третьей (рис. 4).

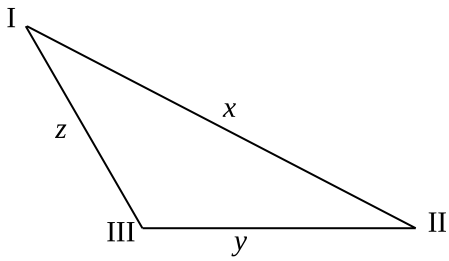

Рис.4

В соответствии с условиям задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2z, \\ z + y = x + a, \\ x + z = 75. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выразим z: $z = 75 - x$, получим систему

$$\begin{cases} x + y = 2(75 - x), \\ 75 - x + y = x + a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 150, \\ 2x - y = 75 - a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 150, \\ 5x = 225 - a. \end{cases}$$

Тогда, $x = \dfrac{225 - a}{5}$, $y = \dfrac{75 + 3a}{5}$ $z = \dfrac{150 + a}{5}$.

Определим все значения a, для которых были бы возможным найденные значения x, y и z. Используя неравенство треугольника (любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон), то составим систему неравенств для оценки значения параметра a:

$$\begin{cases} x < y + z, \\ y < x + z, \\ z < x + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{225-a}{5} < \dfrac{75+3a}{5} + \dfrac{150+a}{5}, \\ \dfrac{75+3a}{5} < \dfrac{225-a}{5} + \dfrac{150+a}{5}, \\ \dfrac{150+a}{5} < \dfrac{225-a}{5} + \dfrac{75+3a}{5}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $0 < a < 100$.

Вычислим при $a = 15$ расстояния между компрессорными станциями:

$x = \dfrac{225-15}{5} = 42$ км, $y = \dfrac{75+3\cdot 15}{5} = 24$ км, $z = \dfrac{150+15}{5} = 33$ км.

Ответ. $0 < a < 100$; 42 км, 24 км, 33 км.

Задание 6. (30 баллов) В сферу вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок C_1D – диаметр этой сферы, точка K – середина ребра CC_1. Найти объем призмы, если $DK = 2\sqrt{6}$, $DA = 6$.

Решение.

Плоскости оснований ABC и $A_1B_1C_1$ призмы пересекают сферу по окружностям, описанным около правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пусть их центры – точки O и O_1 соответственно.

Легко показать, что середина M отрезка OO_1 является центром сферы (рис. 5).

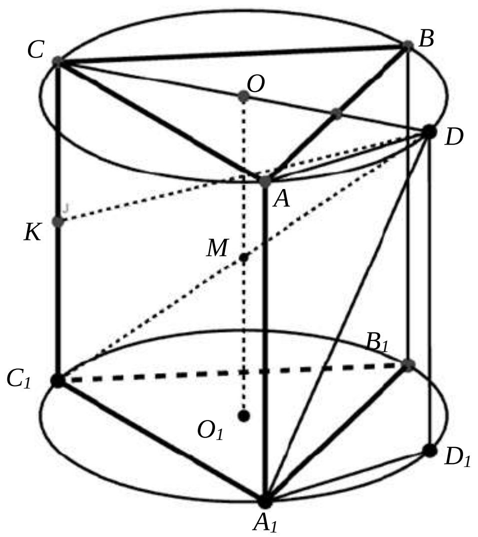

Рис. 5

Проведем через точку C_1 диаметр C_1D_1 окружности с центром в точке O_1. Покажем, что C_1D – диаметр сферы. Действительно, плоскость CC_1D перпендикулярна плоскостям основания и, значит, вместе с точкой O_1 содержит отрезок OO_1. Т.к. $CD = 2DO$, прямая C_1D пересекает отрезок OO_1 в его середине, т.е. в центре M заданной сферы.

Пусть D_1 – проекция точки D на плоскость основания $A_1B_1C_1$, высота призма равна h, а радиусы окружностей с центрами O и O_1 равен r. Рассмотрим треугольник KCD Учитывая, что $AD = r = 6$ (треугольник AOD равносторонний), $CD = 2r = 12$, $DD_1 = h$, $KC = \dfrac{h}{2}$, по т. Пифагора получаем уравнение

$$\frac{h^2}{4} + 4 \cdot 6^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2, \text{ но } \frac{h^2}{4} = 24 - 144 < 0.$$

Таким образом, данное уравнение не имеет решения, а значит, призму с заданными условиями в сферу вписать невозможно.

Ответ. Задача не имеет решения.