



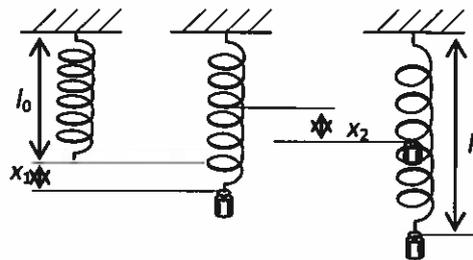
**Решения заданий заключительного тура  
олимпиады школьников «Гранит науки»  
по профилю Естественные науки  
по предмету Физика  
в 2020/2021 учебном году**



## ФИЗИКА ВАРИАНТ 1

1. К концу вертикально висящей пружины, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз массой 150 г. Затем к середине уже растянутой пружины подвешивают ещё один груз такой же массы. Длина пружины в недеформированном состоянии 15 см, жесткость пружины 50 Н/м. Рассчитайте длину растянутой пружины.

Дано:  
 $m_1 = 150 \text{ г} = 0,15 \text{ кг}$ ;  
 $m_2 = m_1 = m$ ;  
 $l_0 = 15 \text{ см} = 0,15 \text{ м}$   
 $k = 50 \text{ Н/м}$   
 $l - ?$



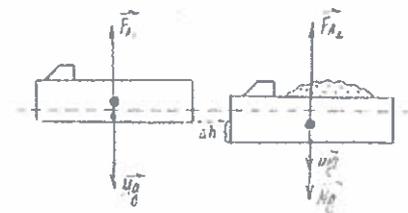
$$l = l_0 + x_1 + x_2$$

$$x_1 = \frac{mg}{k}, x_2 = \frac{mg}{2k}$$

$$l = l_0 + 1,5 \frac{mg}{k}$$

$$l = 0,15 + 1,5 \frac{1,5}{50} = 0,195 \text{ м} = 19,5 \text{ см}$$

2. Площадь днища судна класса «река-море» самоходной баржи-площадки 2000 кв.м. По окончании погрузки 1250 кубометров песка осадка баржи увеличилась на 1 м.



Определите плотность песка.

Дано:  
 $S =$   
 $2000 \text{ м}^2$ ;  
 $V =$   
 $1250 \text{ м}^3$ ;  
 $h = 1 \text{ м}$ .  
 $\rho_n - ?$

$$F_{\text{арх}_2} = Mg + mg$$

$$Mg = F_{\text{арх}_1}$$

$$mg = \rho_n V_n g$$

$$\rho_e g S(h + 1) = \rho_e g S h + \rho_n V_n g$$



$$\rho_n = \frac{\rho_e S(h+1-h)}{V_n} = \frac{\rho_e S}{V_n} = \frac{1000 \cdot 2000}{1250} = 1600 \text{ кг/м}^3.$$

3. Два сосуда наполнены одинаковым газом и соединены тонкой трубкой с краном. Вместимость первого сосуда 3л, второго- 7л. Давление газа в первом сосуде 4 атмосферы, во втором- 5 атмосфер. Температура газа в сосудах была одинакова, но после открытия крана она увеличилась на 15%. Найти установившееся давление в сосуде при открытом кране.

Дано:

$$T_1 = T_2;$$

$$V_1 = 3\text{л} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$$

$$V_2 = 7\text{л} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$$

$$p_1 = 4 \text{ атм} = 4 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$p_2 = 5 \text{ атм} = 5 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$T = 1,15T_1.$$

$p$ —?

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT;$$

$$p = \frac{(m_1 + m_2)RT}{M(V_1 + V_2)} = \frac{\frac{m_1 RT}{M} + \frac{m_2 RT}{M}}{V_1 + V_2};$$

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT_1 \Rightarrow \frac{m_1}{M} = \frac{p_1 V_1}{RT_1};$$

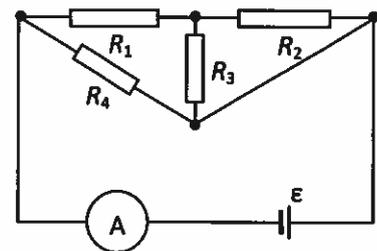
$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT_2 \Rightarrow \frac{m_2}{M} = \frac{p_2 V_2}{RT_2};$$

$$p = \frac{\left(\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2}\right) RT}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} \cdot 1,15$$

$$= \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^5 \cdot 7 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-3}} \cdot 1,15 =$$

$$= \frac{12 \cdot 10^5 + 35 \cdot 10^5}{10} \cdot 1,15 = 540500 \text{ Па} = 5,4 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

4. Какой ток покажет амперметр, включенный в схему, изображённую на рисунке, если  $R_1 = 1,25 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 7 \text{ Ом}$  и э.д.с. источника  $\varepsilon = 2,8 \text{ В}$ ? Сопротивлением амперметра и источника пренебречь.



Дано:

$$R_1 = 1,25 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 1 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 3 \text{ Ом};$$

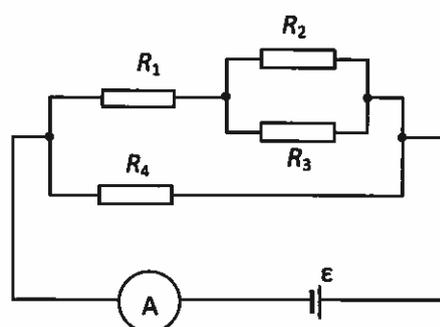
$$R_4 = 7 \text{ Ом};$$

$$\varepsilon = 2,8 \text{ В};$$

$$r = 0;$$

$I_A$ —?

Эквивалентная схема:





$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$R_{123} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_4} + \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}{R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}$$

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}$$

$$I = \frac{\varepsilon (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4)}{R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}$$

$$I = \frac{2,8 \cdot (1,25 + 3 + 3,75 + 7 + 21)}{7 \cdot (1,25 + 3,75 + 3)} = 1,8A$$

5. Силу, с которой воздушный поток действует на парус, можно рассчитать по формуле

$F = \frac{cS\rho(v_0 - v)^2}{2}$ , где  $C$  – коэффициент аэродинамической силы,  $S$  – площадь паруса  $S = 5 \text{ м}^2$ ;  $\rho$  – плотность воздуха,  $v_0$  – скорость ветра  $v_0 = 6 \text{ м/с}$ ,  $v$  – скорость парусного судна. В какой-то момент времени мгновенная мощность ветра достигает максимального значения. Какова скорость парусника в этот момент?

Дано:

$$F = \frac{cS\rho(v_0 - v)^2}{2};$$

$$N(t') = N_{\text{max}};$$

$$v_0 = 6 \text{ м/с}$$

---

$$v(t') = ?$$

Решение:

$$\left. \begin{array}{l} F = f(v) \\ N = F \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow N = f(v)$$

$$N = \frac{CS\rho}{2} (v_0^2 - 2v_0v + v^2)v = \frac{CS\rho}{2} (v_0^2v - 2v_0v^2 + v^3)$$

$$N = N_{\text{max}} \Rightarrow N'(v) = 0$$

$$N'(v) = \frac{CS\rho}{2} (v_0^2 - 4v_0v + 3v^2) = 0$$



$$v_0^2 - 4v_0v + 3v^2 = 0$$

$$3v^2 - 4v_0v + v_0^2 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{16v_0^2 - 12v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{4v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm 2v_0}{6}$$

$v_1 = v_0$  (не удовлетворяет условию)

$$v_2 = \frac{v_0}{3} = 2 \text{ м/с}$$



## ВАРИАНТ 2

1. К концу вертикально висящей пружины, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз. Затем к середине уже растянутой пружины подвешивают ещё один такой же груз. Длина пружины в недеформированном состоянии 20 см, в растянутом - 25 см. Жесткость пружины 60 Н/м. Определите массу груза.

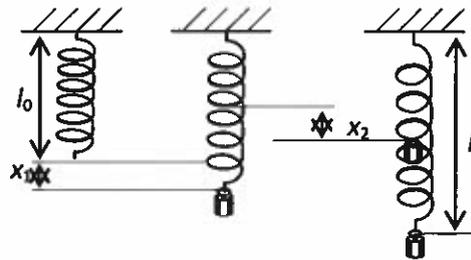
Дано:

$$l_0 = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

$$l = 25 \text{ см} = 0,25 \text{ м}$$

$$k = 60 \text{ Н/м}$$

$$m - ?$$



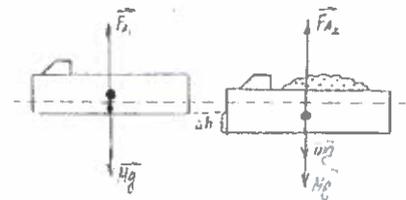
$$l = l_0 + x_1 + x_2$$

$$x_1 = \frac{mg}{k}, x_2 = \frac{mg}{2k}$$

$$m = \frac{k(l - l_0)}{1,5g}$$

$$m = \frac{60 \cdot (0,25 - 0,2)}{1,5 \cdot 10} = 0,2 \text{ кг}$$

2. Самоходная баржа-площадка является сухогрузом и служит для перевозки гравия. Площадь днища судна составляет 2550 кв.м. По окончании погрузки гравия плотностью 1700 кг/м<sup>3</sup>, осадка баржи увеличилась на 1 м. Какой объём гравия был погружен в баржу?



Дано:

$$S = 2550 \text{ м}^2;$$

$$\rho_2 = 1700 \text{ кг/м}^3$$

$$h = 1 \text{ м.}$$

$$V_2 - ?$$

$$F_{\text{арх}_2} = Mg + mg$$

$$Mg = F_{\text{арх}_1}$$

$$mg = \rho_2 V_2 g$$

$$\rho_1 g S(h + 1) = \rho_1 g S h + \rho_2 V_2 g$$

$$V_2 = \frac{\rho_1 S(h+1-h)}{\rho_2} = \frac{\rho_1 S}{\rho_2} = \frac{1000 \cdot 2550}{1700} = 1500 \text{ м}^3.$$



3. Два сосуда наполнены одинаковым газом и соединены тонкой трубкой с краном. Давление газа в первом сосуде 3 атмосферы, во втором- 8 атмосфер. Масса газа в первом сосуде 600 г, во втором- 1600 г. Температура газа в сосудах была одинакова, но после открытия крана она увеличилась на 20%. Найти установившееся давление в сосуде при открытом кране.

Дано:

$$p_1 = 3 \text{ атм} = 3 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$p_2 = 8 \text{ атм} = 8 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$m_1 = 600 \text{ г} = 0,6 \text{ кг};$$

$$m_2 = 1600 \text{ г} = 1,6 \text{ кг};$$

$$T_1 = T_2;$$

$$T = 1,2 T_1.$$

$$p - ?$$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT;$$

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{m_1}{M p_1} RT_1;$$

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT_2 \Rightarrow V_2 = \frac{m_2}{M p_2} RT_1;$$

$$p = \frac{\frac{m_1 + m_2}{M} R \cdot 1,2 T_1}{\frac{m_1}{M p_1} RT_1 + \frac{m_2}{M p_2} RT_1} = \frac{1,2 p_1 p_2 (m_1 + m_2)}{m_1 p_2 + m_2 p_1} =$$

$$= \frac{1,2 \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 2,2}{0,6 \cdot 8 \cdot 10^5 + 1,6 \cdot 3 \cdot 10^5} = 6,6 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

4. Какой ток покажет амперметр, включенный в схему, изображённую на рисунке, если  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1,25 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 7 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 3 \text{ Ом}$  и э.д.с. источника  $\varepsilon = 5,6 \text{ В}$ ? Сопротивлением амперметра и источника пренебречь.

Дано:

$$R_1 = 1 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 1,25 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 7 \text{ Ом};$$

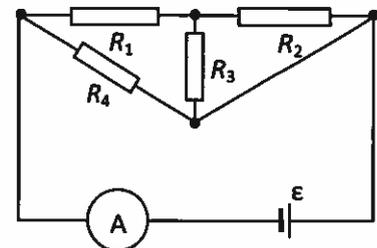
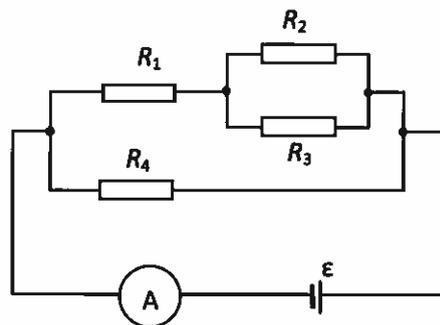
$$R_4 = 3 \text{ Ом};$$

$$\varepsilon = 5,6 \text{ В};$$

$$r = 0.$$

$$I_A - ?$$

Эквивалентная схема:



$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$



$$R_{123} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_4} + \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}{R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}$$

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}$$

$$I = \frac{\varepsilon (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4)}{R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} = 4.6 \text{ A}$$

5. Силу, с которой воздушный поток действует на парус, можно рассчитать по формуле

$F = \frac{AS\rho(v_0 - v)^2}{2}$ , где  $A$  – коэффициент аэродинамической силы,  $S$  – площадь паруса  $S = 4 \text{ м}^2$ ;  $\rho$  – плотность воздуха,  $v_0$  – скорость ветра  $v_0 = 4,8 \text{ м/с}$ ,  $v$  – скорость парусного судна. В какой-то момент времени мгновенная мощность ветра достигает максимального значения. Какова скорость парусника в этот момент?

Дано:

$$F = \frac{AS\rho(v_0 - v)^2}{2};$$

$$N(t') = N_{\text{max}};$$

$$v_0 = 4,8 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

-----  
 $v(t') = ?$

Решение:

$$\left. \begin{array}{l} F = f(v) \\ N = F \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow N = f(v)$$

$$N = \frac{AS\rho}{2} (v_0^2 - 2v_0v + v^2)v = \frac{AS\rho}{2} (v_0^2v - 2v_0v^2 + v^3)$$

$$N = N_{\text{max}} \Rightarrow N'(v) = 0$$

$$N'(v) = \frac{AS\rho}{2} (v_0^2 - 4v_0v + 3v^2) = 0$$

$$v_0^2 - 4v_0v + 3v^2 = 0$$

$$3v^2 - 4v_0v + v_0^2 = 0$$



$$v_{1,2} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{16v_0^2 - 12v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{4v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm 2v_0}{6}$$

$$v_1 = v_0 \text{ (не удовл.) } v_2 = \frac{v_0}{3} = 1,6 \text{ м/с}$$



## ВАРИАНТ 3

1. К концу вертикально висящей пружины, массой которой можно пренебречь подвешивают груз массой 180 г. Затем к середине уже растянутой пружины подвешивают ещё один груз такой же масса. Жесткость пружины 45 Н/м. Длина деформированной пружины оказалась равной 27 см. Определите длину пружины в недеформированном состоянии.

Дано:

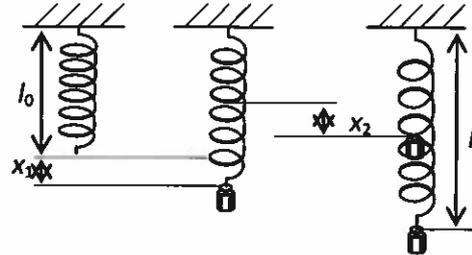
$$m_1 = 180 \text{ г} = 0,18 \text{ кг};$$

$$m_2 = m_1 = m;$$

$$l = 27 \text{ см} = 0,27 \text{ м}$$

$$k = 45 \text{ Н/м}$$

$$l_0 - ?$$



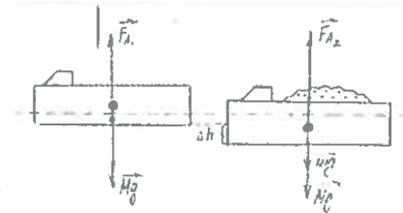
$$l = l_0 + x_1 + x_2$$

$$x_1 = \frac{mg}{k}, x_2 = \frac{mg}{2k}$$

$$l_0 = l - 1,5 \frac{mg}{k}$$

$$l_0 = 0,27 - 1,5 \cdot \frac{0,18 \cdot 10}{45} = 0,21 \text{ м} = 21 \text{ см}$$

2. Для перевозки щебня служит самоходная баржа класса «река-море». По окончании погрузки щебня плотностью  $1600 \text{ кг/м}^3$ , осадка судна увеличилась на 1 м. Площадь днища судна составляет  $2200 \text{ кв.м}$ . Какой объём щебня загружен в баржу?



Дано:

$$\rho_{щ} = 1600 \text{ кг/м}^3$$

$$S = 2200 \text{ м}^2;$$

$$h = 1 \text{ м.}$$

$$V - ?$$

$$F_{\text{арх}2} = Mg + mg$$

$$Mg = F_{\text{арх}1}$$

$$mg = \rho_{щ} V_{щ} g$$

$$\rho_e g S (h + 1) = \rho_e g S h + \rho_{щ} V_{щ} g$$

$$V_{щ} = \frac{\rho_e S (h + 1 - h)}{\rho_{щ}} = \frac{\rho_e S}{\rho_{щ}} = \frac{1000 \cdot 2200}{1600} = 1375 \text{ м}^3.$$



3. Два баллона соединены тонкой трубкой с краном и наполнены одинаковым газом. Объём первого баллона 3л, второго- 8л. В первом баллоне газ находится под давлением 1 атм, во втором- 0,4 атм. Какое давление будет в баллонах при открытом кране, если температура газа не изменяется?

Дано:  
 $T_1 = T_2$ ;  
 $V_1 = 3\text{ л} = 3 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3$ ;  
 $V_2 = 8\text{ л} = 8 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3$ ;  
 $p_1 = 1\text{ атм} = 10^5\text{ Па}$ ;  
 $p_2 = 0,4\text{ атм} = 0,4 \cdot 10^5\text{ Па}$ ;  
 $T = T_1 = T_2$ .  
 $p - ?$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT;$$

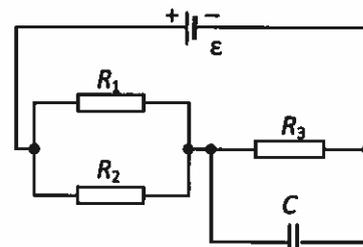
$$p = \frac{(m_1 + m_2)RT}{M(V_1 + V_2)} = \frac{\frac{m_1 RT}{M} + \frac{m_2 RT}{M}}{V_1 + V_2};$$

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT_1 \Rightarrow \frac{m_1}{M} = \frac{p_1 V_1}{RT_1};$$

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT_2 \Rightarrow \frac{m_2}{M} = \frac{p_2 V_2}{RT_2};$$

$$p = \frac{\left(\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2}\right) RT}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 0,4 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-3}} =$$
$$= \frac{3 \cdot 10^5 + 3,2 \cdot 10^5}{11} = 56364\text{ Па} \approx 5,6 \cdot 10^4\text{ Па}$$

4. В цепь, питаемую элементом с внутренним сопротивлением  $r_0 = 1,5\text{ Ом}$ , входят, как показано на рисунке, два сопротивления  $R_1 = R_2 = 30\text{ Ом}$ , включенные параллельно, и сопротивление  $R_3 = 40\text{ Ом}$ . Параллельно сопротивлению  $R_3$  подключен конденсатор емкостью  $C = 5\text{ мкФ}$ , заряд которого  $q = 4,2 \cdot 10^{-6}\text{ Кл}$ . Определить э.д.с.  $\varepsilon$  элемента.



Дано:  
 $r_0 = 1,5\text{ Ом}$ ;  
 $R_1 = R_2 = 30\text{ Ом}$ ;  
 $R_3 = 40\text{ Ом}$ ;  
 $C = 5\text{ мкФ}$ ;  
 $q = 4,2 \cdot 10^{-6}\text{ Кл}$   
 $\varepsilon - ?$



Падение напряжения на сопротивлении  $R_3$  равно  $U = \frac{q}{C} = IR_3$ . Отсюда ток, текущий через это сопротивление,  $I = q/CR_3$ .

Полное сопротивление цепи  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + r_0$ .

Э.Д.С. элемента  $\varepsilon = IR = \frac{q}{CR_3} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + r_0 \right) = 1.2 \text{ В}$

5. Силу, с которой воздушный поток действует на парус, можно рассчитать по формуле

$F = \frac{BS\rho(v_0 - v)^2}{2}$ , где  $B$  – коэффициент аэродинамической силы,  $S$  – площадь паруса  $S = 7 \text{ м}^2$ ;  $\rho$  – плотность воздуха,  $v_0$  – скорость ветра  $v_0 = 6,3 \text{ м/с}$ ,  $v$  – скорость парусного судна. В какой-то момент времени мгновенная мощность ветра достигает максимального значения. Какова скорость парусника в этот момент?

Дано:

$$F = \frac{BS\rho(v_0 - v)^2}{2};$$

$$N(t') = N_{\max};$$

$$v_0 = 6,3 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

-----  
 $v(t') = ?$

Решение:

$$\left. \begin{array}{l} F = f(v) \\ N = F \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow N = f(v)$$

$$N = \frac{BS\rho}{2} (v_0^2 - 2v_0v + v^2)v = \frac{BS\rho}{2} (v_0^2v - 2v_0v^2 + v^3)$$

$$N = N_{\max} \Rightarrow N'(v) = 0$$

$$N'(v) = \frac{BS\rho}{2} (v_0^2 - 4v_0v + 3v^2) = 0$$

$$v_0^2 - 4v_0v + 3v^2 = 0$$

$$3v^2 - 4v_0v + v_0^2 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{16v_0^2 - 12v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{4v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm 2v_0}{6}$$

$$v_1 = v_0 \text{ (не удовл.) } v_2 = \frac{v_0}{3} = 3,1 \text{ м/с}$$



## ВАРИАНТ 4

1. К концу вертикально висящей пружины, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз массой 160 г. Затем к середине уже растянутой пружины подвешивают ещё один груз такой же массы. Длина пружины в недеформированном состоянии 17 см, в растянутом – 23 см. Определите жесткость пружины.

Дано:

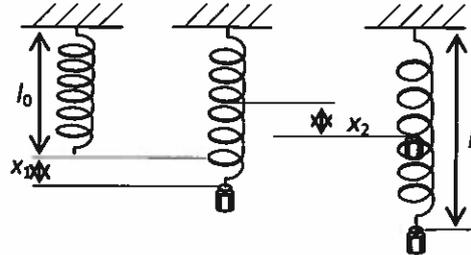
$$m_1 = 160 \text{ г} = 0,16 \text{ кг};$$

$$m_2 = m_1 = m;$$

$$l_0 = 17 \text{ см} = 0,17 \text{ м}$$

$$l = 23 \text{ см} = 0,23 \text{ м}$$

$$k - ?$$



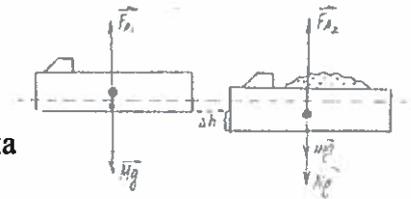
$$l = l_0 + x_1 + x_2$$

$$x_1 = \frac{mg}{k}, x_2 = \frac{mg}{2k}$$

$$k = \frac{1,5 \cdot mg}{l - l_0}$$

$$k = \frac{1,5 \cdot 0,16 \cdot 10}{0,23 - 0,17} = 40 \text{ Н/м}$$

2. Площадь днища судна класса «река-море» самоходной баржи-площадки 2500 кв.м. По окончании погрузки 3500 кубометров керамзитового гравия осадка баржи увеличилась на 70 см. Определите плотность керамзита.



Дано:

$$S =$$

$$2500 \text{ м}^2;$$

$$V_k =$$

$$3500 \text{ м}^3;$$

$$\square = 0,7 \text{ м.}$$

$$\rho_k - ?$$

$$F_{ap2} = Mg + mg$$

$$Mg = F_{ap1}$$

$$mg = \rho_k V_k g$$

$$\rho_g S(\square + 0,7) = \rho_g S \square + \rho_k V_k g$$

$$\rho_k = \frac{\rho_g S(\square + 0,7 - \square)}{V_k} = \frac{1000 \cdot 2500 \cdot 0,7}{3500} = 500 \text{ кг/м}^3.$$



3. Два баллона соединены тонкой трубкой с краном и наполнены одинаковым газом. Объем первого баллона 12л, второго- 18л. В первом баллоне газ находится под давлением 1 атм, во втором- 0,4 атм. Какое давление будет в баллонах при открытом кране, если температура газа не изменяется?

Дано:

$$T_1 = T_2;$$

$$V_1 = 12\text{л} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$$

$$V_2 = 18\text{л} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$$

$$p_1 = 1 \text{ атм} = 10^5 \text{ Па};$$

$$p_2 = 0,4 \text{ атм} = 0,4 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$T = T_1 = T_2.$$

$p$ —?

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT;$$

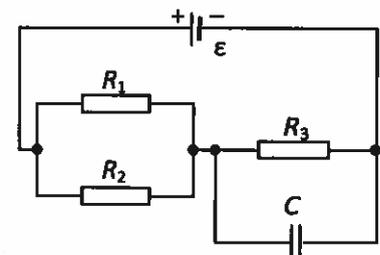
$$p = \frac{(m_1 + m_2)RT}{M(V_1 + V_2)} = \frac{\frac{m_1 RT}{M} + \frac{m_2 RT}{M}}{V_1 + V_2};$$

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT_1 \Rightarrow \frac{m_1}{M} = \frac{p_1 V_1}{RT_1};$$

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT_2 \Rightarrow \frac{m_2}{M} = \frac{p_2 V_2}{RT_2};$$

$$p = \frac{\left(\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2}\right) RT}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-3} + 0,4 \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-3} + 18 \cdot 10^{-3}} =$$
$$= \frac{12 \cdot 10^5 + 7,2 \cdot 10^5}{30} = 0,64 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

4. В цепь, питаемую элементом с внутренним сопротивлением  $r_0 = 3$  Ом, входят, как показано на рисунке, два сопротивления  $R_1 = R_2 = 28$  Ом, включенные параллельно, и сопротивление  $R_3 = 40$  Ом. Параллельно сопротивлению  $R_3$  подключен конденсатор емкостью  $C = 5$  мкФ, заряд которого  $q = 4,2 \cdot 10^{-6}$  Кл. Определить э.д.с.  $\varepsilon$  элемента.



Дано:

$$r_0 = 3 \text{ Ом};$$

$$R_1 = R_2 = 28 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 40 \text{ Ом};$$

$$C = 5 \text{ мкФ};$$

$$q = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$$

$\varepsilon$ —?

Падение напряжения на сопротивлении  $R_3$  равно  $U = \frac{q}{C} = IR_3$ . Отсюда ток, текущий через это сопротивление,  $I = q/CR_3$ .



Полное сопротивление цепи  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + r_0$ .

Э.Д.С. элемента  $\varepsilon = IR = \frac{q}{CR_3} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + r_0 \right) = 1.2 \text{ В}$

5. Силу, с которой воздушный поток действует на парус, можно рассчитать по формуле  $F = \frac{CS\rho(v_0 - v)^2}{2}$ , где  $C$  – коэффициент аэродинамической силы,  $S$  – площадь паруса;  $\rho$  – плотность воздуха,  $v_0$  – скорость ветра,  $v$  – скорость парусного судна. В какой-то момент времени мгновенная мощность ветра достигает максимального значения. Какова скорость парусника в этот момент?

Дано:

$$F = \frac{CS\rho(v_0 - v)^2}{2};$$

$$N(t') = N_{\max};$$

$$v_0;$$

---

$$v(t') = ?$$

Решение:

$$\left. \begin{array}{l} F = f(v) \\ N = F \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow N = f(v)$$

$$N = \frac{CS\rho}{2} (v_0^2 - 2v_0v + v^2)v = \frac{CS\rho}{2} (v_0^2v - 2v_0v^2 + v^3)$$

$$N = N_{\max} \Rightarrow N'(v) = 0$$

$$N'(v) = \frac{CS\rho}{2} (v_0^2 - 4v_0v + 3v^2) = 0$$

$$v_0^2 - 4v_0v + 3v^2 = 0$$

$$3v^2 - 4v_0v + v_0^2 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{16v_0^2 - 12v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{4v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm 2v_0}{6}$$

$$v_1 = v_0 \text{ (не удовл.) } v_2 = \frac{v_0}{3}$$

## ВАРИАНТ 5

1. Перекачка бензина ведется по бензопроводу нефтепроводу диаметром 530 мм и толщиной стенок 8 мм с расходом  $1100 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Определите скорость перекачки бензина.

Дано:

$$D = 0,53 \text{ м};$$

$$h = 0,008 \text{ м};$$

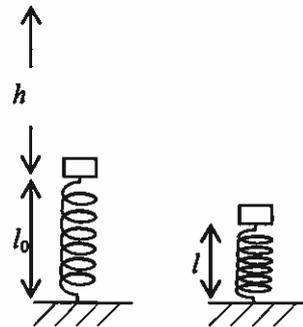
$$Q \approx 0,3 \text{ м}^3/\text{с};$$

$v$ —?

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{SL}{\Delta t} = Sv = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi}{4} (D - 2h)^2 v$$
$$[v] = \frac{\text{м}^3/\text{с}}{\text{м}^2} = \text{м}/\text{с}.$$

$$v = \frac{4Q}{\pi(D-2h)^2} = \frac{4 \cdot 0,3}{3,14(0,53 - 2 \cdot 0,008)^2} \approx 1,4 \text{ м}/\text{с}.$$

2. Инженер рассчитывает пружину, которую необходимо поместить на дно шахты лифта, чтобы при обрыве троса неподвижного лифта на высоте  $h$  над верхним концом пружины, пассажиры при торможении не испытывали перегрузок больше  $10g$ . Масса лифта вместе с пассажирами равна  $M$ . Каким должен быть при этом коэффициент жесткости пружины  $k$ ?



$$1. Mg(h + x) = \frac{kx^2}{2}$$

$$2. kx - Mg = Ma$$

$$a = 10g$$

$$kx = 11Mg$$

$$x = \frac{11}{k} Mg$$

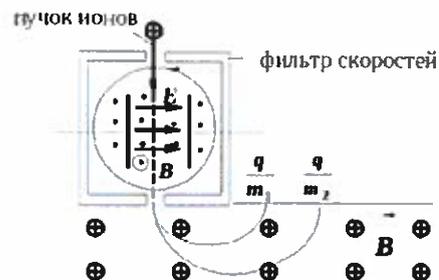
$$3. x^2 = \frac{121 M^2 g^2}{k^2}$$

$$4. Mgh + Mg \frac{11Mg}{k} = \frac{k}{2} \cdot \frac{121 M^2 g^2}{k^2}$$

$$Mgh = \left(\frac{121}{2} - 11\right) \cdot \frac{M^2 g^2}{k}$$

$$k = \frac{49,5Mg}{h}$$

3. Масс-спектрометрия — один из точнейших методов идентификации веществ, используемый практически во всех сферах человеческой деятельности: фармацевтике, медицине, экологии, нефтегазовой промышленности, ядерной





энергетике. Это своеобразное «взвешивание» молекул: компоненты ионизируются, затем определяется отношение массы к заряду ионов. Оказалось, что при разделении ионов со сравнимой массой, например, двух стабильных изотопов кислорода ( $^{16}\text{O}$  и  $^{18}\text{O}$ ), возникают трудности. Рассчитайте радиус кривизны, который необходим, чтобы эти частицы отстояли друг от друга на 1,4 мм.

Ионы, пройдя скрещенные электрическое и магнитное поля, после селектора скоростей попадают только в магнитное поле и движутся по дуге окружности.

$$\begin{cases} v = \frac{E}{B} \\ qvB' = \frac{mv^2}{R} \end{cases} \rightarrow m = \frac{qBB'R}{E}. \quad (1)$$

$$x = D_2 - D_1 = 2(R_2 - R_1)$$

Все величины, кроме  $R$ , в формуле (1) определяются параметрами установки, следовательно, для частиц с одинаковым зарядом справедливо

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_2}{m_1} = 18/16 = 1,125$$

$$R_2 - R_1 = \frac{x}{2} = 0,7 \text{ (мм)}$$

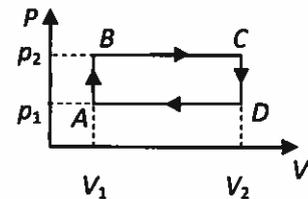
$$0,7 + R_1 = 1,125R_1$$

$$R_1 = 5,6 \text{ мм}$$

$$R_2 = 6,3 \text{ мм}$$

4. Цикл теплового двигателя состоит из двух изохор и двух изобар. В качестве рабочего вещества в двигателе используется идеальный одноатомный газ. Отношение давлений на изобарах равно  $n$  ( $n > 1$ ), отношение объемов на изохорах равно  $m$  ( $m > 1$ ). Найдите КПД такого двигателя.

Дано:  $n = \frac{p_2}{p_1}$ ,  $m = \frac{V_2}{V_1}$ ,  $\eta = \frac{A}{Q} 100\%$ ,  
 Пусть  $p_1, V_1$  – минимальные значения давления и объема. Изобразим  $PV$ - диаграмму  
 $A$  – работа, совершаемая газом за цикл.  
 $Q$  – количество теплоты, подведенное к газу, за цикл



$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$  – работа газа равна площади прямоугольника. Газ получает тепло на участке  $AB$ .

Согласно первому закону термодинамики

$$Q = (\Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + A_{BC}) = \frac{3}{2} \nu R (T_B - T_A) + \frac{3}{2} \nu R (T_C - T_B) + p_2 (V_2 - V_1) =$$

$$= \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) + p_2 (V_2 - V_1) = \frac{5}{2} p_2 V_2 - \frac{3}{2} p_1 V_1 - p_2 V_1 =$$



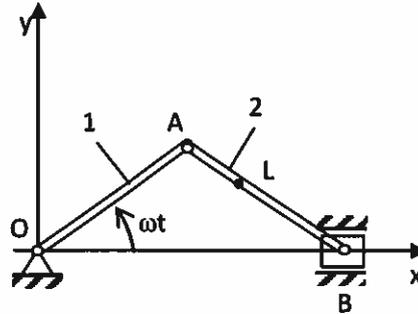
$$= \frac{5}{2}np_1mV_1 - \frac{3}{2}p_1V_1 - np_1V_1 = p_1V_1 \left( \frac{5}{2}nm - \frac{3}{2} - n \right).$$

$$A = (np_1 - p_1)(mV_1 - V_1) = p_1(n-1)V_1(m-1) = p_1V_1(n-1)(m-1).$$

$$\eta = \frac{p_1V_1(n-1)(m-1)}{p_1V_1 \left( \frac{5}{2}nm - \frac{3}{2} - n \right)} = \frac{2(n-1)(m-1)}{5nm - 2n - 3}.$$

5. Рассмотрите кривошипно-ползунный механизм (1-кривошип, 2- шатун).

Впервые их стали применять в античности, на римских пильных мельницах. Там вращение колеса, приводимого в действие силой падающей воды, преобразовывалось в возвратно-поступательное движение полотна пилы. Данный кривошип



вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ рад/с}$ . Найти уравнения движения, уравнение траектории и скорость точки L шатуна, если  $OA = AB = 90 \text{ см}$ ,  $AL = (1/3) AB$ .

Решение. Запишем уравнения движения точки L в координатной форме.

$$1. \begin{cases} x = 1,2 \cos 10t, \text{ м} \\ y = 0,6 \sin 10t, \text{ м} \end{cases}$$

$$x_{\max} = 90 \text{ см} + 30 \text{ см} = 120 \text{ см} = 1,2 \text{ м}$$

$$y_{\max} = 60 \text{ см} = 0,6 \text{ м}$$

2. Уравнение траектории получим, исключив  $t$  из уравнений движения.

$$\frac{x^2}{1,2^2} + \frac{y^2}{0,6^2} = 1$$

3. Скорость точки определим как

$$2. v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = x'(t) = -12 \sin 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v_y = y'(t) = 6 \cos 10t, \quad \text{м/с}$$

$$3. v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{144 \sin^2 10t + 36 \cos^2 10t} = 6\sqrt{4 \sin^2 10t + \cos^2 10t}, \text{ м/с.}$$

## ВАРИАНТ 6

1. Перекачка нефти ведется по нефтепроводу диаметром 530 мм и толщиной стенок 8 мм с расходом  $800 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Определите скорость перекачки нефти.

Дано:

$$D = 0,53 \text{ м};$$

$$h = 0,008 \text{ м};$$

$$Q = 2/9 \text{ м}^3/\text{с};$$

$v = ?$

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{SL}{\Delta t} = Sv = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi}{4} (D - 2h)^2 v$$

$$[v] = \frac{\text{м}^3/\text{с}}{\text{м}^2} = \text{м}/\text{с}.$$

$$v = \frac{4Q}{\pi(D-2h)^2} = \frac{4 \cdot 2/9}{3,14(0,53 - 2 \cdot 0,008)^2} \approx 1,1 \text{ м}/\text{с}.$$

2. Спортсмен массой  $78,75 \text{ кг}$  испытывает сетку, которую используют пожарные при спасении людей. Сетка провисла на  $100 \text{ см}$  при прыжке с высоты  $15 \text{ м}$ . Считая сетку упругой как пружина, вычислите, на сколько она провиснет при прыжке человека массой  $45 \text{ кг}$  с высоты  $29 \text{ м}$ .

Дано:

$$m_1 = 78,75 \text{ кг};$$

$$x_1 = 1 \text{ м};$$

$$h_1 = 15 \text{ м};$$

$$m_2 = 45 \text{ кг};$$

$$h_2 = 29 \text{ м};$$

$x_2 = ?$

$$\frac{m_2 \cdot (h_2 + x_2)}{m_1 \cdot (h_1 + x_1)} = \frac{x_2^2}{x_1^2};$$

$$\frac{45 \cdot (29 + x_2)}{78,75 \cdot (15 + 1)} = x_2^2;$$

$$\frac{(29 + x_2)}{16} = \frac{x_2^2 \cdot 78,75}{45};$$

$$29 + x_2 = x_2^2 \cdot 1,75 \cdot 16;$$

$$28x_2^2 - x_2 - 29 = 0;$$

$$D = 1 + 4 \cdot 28 \cdot 29 = 3249 = 57^2;$$

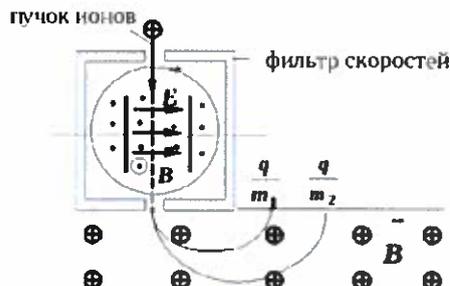
$$x_2 = \frac{1+57}{56} \approx 1,04 \text{ м}.$$

3. Масс-спектрометрия — один из точнейших методов идентификации веществ, используемый практически во всех сферах человеческой деятельности: фармацевтике, медицине, экологии,

Решение. Механическую систему «Земля-спортсмен-сетка» можно считать замкнутой. По закону сохранения энергии при прыжке спортсмена его потенциальная энергия должна полностью перейти в энергию упругой деформации сетки:

$$m_2 g (h_2 + x_2) = \frac{kx_2^2}{2};$$

$$m_1 g (h_1 + x_1) = \frac{kx_1^2}{2};$$





нефтегазовой промышленности, ядерной энергетике. Это своеобразное «взвешивание» молекул: компоненты ионизируются, затем определяется отношение массы к заряду ионов. Оказалось, что при разделении ионов со сравнимой массой, например, двух изотопов аргона ( $^{36}\text{Ar}$  и  $^{38}\text{Ar}$ ), возникают трудности. Рассчитайте радиус кривизны, который необходим, чтобы эти частицы отстояли друг от друга на 1,2 мм.

Ионы, пройдя скрещенные электрическое и магнитное поля, после селектора скоростей попадают только в магнитное поле и движутся по дуге окружности.

$$\begin{cases} v = \frac{E}{B} \\ qvB' = \frac{mv^2}{R} \end{cases} \rightarrow m = \frac{qBB'R}{E}. \quad (1)$$

$$x = D_2 - D_1 = 2(R_2 - R_1)$$

Все величины, кроме  $R$ , в формуле (1) определяются параметрами установки, следовательно, для частиц с одинаковым зарядом справедливо

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_2}{m_1} = 38/36 = 1,056$$

$$R_2 - R_1 = \frac{x}{2} = 0,6 \text{ (мм)}$$

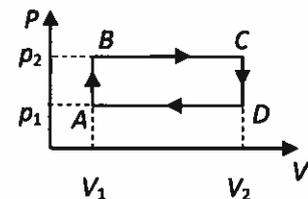
$$0,6 + R_1 = 1,056R_1$$

$$R_1 = 10,7 \text{ мм}$$

$$R_2 = 11,3 \text{ мм}$$

4. Цикл теплового двигателя состоит из двух изохор и двух изобар. В качестве рабочего вещества в двигателе используется идеальный одноатомный газ. Отношение давлений на изобарах равно  $m$  ( $m > 1$ ), отношение объемов на изохорах равно  $n$  ( $n > 1$ ). Найдите КПД такого двигателя.

Дано:  $m = \frac{p_2}{p_1}$ ,  $n = \frac{V_2}{V_1}$ ,  $\eta = \frac{A}{Q} 100\%$ ,  
 Пусть  $p_1, V_1$  – минимальные значения давления и объема. Изобразим  $PV$ - диаграмму  
 $A$  – работа, совершаемая газом за цикл.  
 $Q$  – количество теплоты, подведенное к газу, за цикл  
 $\eta = ?$



$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$  – работа газа равна площади прямоугольника. Газ получает тепло на участке  $AB$ .

Согласно первому закону термодинамики

$$Q = (\Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + A_{BC}) = \frac{3}{2} \nu R (T_B - T_A) + \frac{3}{2} \nu R (T_C - T_B) + p_2 (V_2 - V_1) =$$

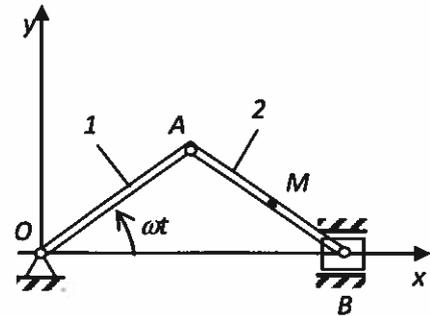
$$= \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) + p_2 (V_2 - V_1) = \frac{5}{2} p_2 V_2 - \frac{3}{2} p_1 V_1 - p_2 V_1 =$$

$$= \frac{5}{2}mp_1nV_1 - \frac{3}{2}p_1V_1 - mp_1V_1 = p_1V_1 \left( \frac{5}{2}nm - \frac{3}{2} - m \right).$$

$$A = (mp_1 - p_1)(nV_1 - V_1) = p_1(m-1)V_1(n-1) = p_1V_1(m-1)(n-1).$$

$$\eta = \frac{p_1V_1(n-1)(m-1)}{p_1V_1 \left( \frac{5}{2}nm - \frac{3}{2} - m \right)} = \frac{2(n-1)(m-1)}{5nm - 2m - 3}.$$

5. Рассмотрите кривошипно-ползунный механизм. (1-кривошип, 2- шатун). Впервые их стали применять в античности, на римских пильных мельницах. Там вращение колеса, приводимого в действие силой падающей воды, преобразовывалось в возвратно-поступательное движение полотна пилы. Данный кривошип вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ рад/с}$ . Найти уравнения движения, уравнение траектории и скорость точки М шатуна, если  $OA = AB = 90 \text{ см}$ ,  $AM = (1/2) AB$ .



Решение. Запишем уравнения движения точки М в координатной форме.

$$1. \begin{cases} x = 1,35 \cos 10t, \text{ м} \\ y = 0,45 \sin 10t, \text{ м} \end{cases}$$

$$x_{\max} = 90 \text{ см} + 45 \text{ см} = 135 \text{ см} = 1,35 \text{ м}$$

$$y_{\max} = 45 \text{ см} = 0,45 \text{ м}$$

2. Уравнение траектории получим, исключив  $t$  из уравнений движения.

$$\frac{x^2}{1,35^2} + \frac{y^2}{0,45^2} = 1$$

3. Скорость точки определим как

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = x'(t) = -13,5 \sin 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v_y = y'(t) = 4,5 \cos 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{182,25 \sin^2 10t + 20,25 \cos^2 10t} = 4,5 \sqrt{9 \sin^2 10t + \cos^2 10t}, \quad \text{м/с}.$$



## ВАРИАНТ 7

1. Бензопровод состоит из двух последовательно соединенных участков: первого с диаметром 500 мм и толщиной стенки 10 мм и второго - с диаметром 250 мм и толщиной стенки 5 мм. Скорость транспортировки бензина в первом участке 1,8 м/с. Какова скорость движения бензина во втором?

Дано:

$$D_1 = 0,5 \text{ м};$$

$$h_1 = 0,01 \text{ м};$$

$$D_2 = 0,25 \text{ м};$$

$$h_2 = 0,005 \text{ м};$$

$$v_1 = 1,8 \text{ м/с}$$

$$v_2 = ?$$

$$V_1 = V_2$$

$$S_1 L_1 = S_2 L_2$$

$$\frac{\pi d_1^2}{4} v_1 \Delta t = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2 \Delta t$$

$$v_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 v_1 = \left(\frac{D_1 - 2h_1}{D_2 - 2h_2}\right)^2 v_1 = \left(\frac{0,5 - 2 \cdot 0,01}{0,25 - 2 \cdot 0,005}\right)^2 \cdot 1,8 \approx 7,2 \text{ м/с}$$

2. Спортсмен прыгает в сетку с высоты 8 м. На какой предельной высоте над полом надо натянуть сетку, чтобы спортсмен не ударился об пол при прыжке. Измерения показали, что сетка прогибается на 50 см при прыжке в нее с высоты 1 м.

Дано:

$$h = 8 \text{ м};$$

$$x_0 = 0,5 \text{ м};$$

$$h_0 = 1 \text{ м};$$

$$x = ?$$

Решение. Механическую систему «Земля-спортсмен-сетка» можно считать замкнутой, поскольку трение при растяжении сетки пренебрежимо мало. По закону сохранения энергии при прыжке спортсмена его потенциальная энергия должна полностью перейти в энергию упругой деформации сетки:

$$mg(h + x) = kx^2/2, \quad (1)$$

$$mg(h_0 + x_0) = kx_0^2/2, \quad (2)$$

где  $k$  - коэффициент упругости;  $m$  - масса спортсмена.

Разделив уравнение (1) на уравнение (2), получим

$$\frac{h+x}{h_0+x_0} = \frac{x^2}{x_0^2}, \text{ откуда } (h_0 + x_0)x^2 - x_0^2x - hx_0^2 = 0. \quad (3)$$

$$1,5x^2 - 0,25x - 2 = 0;$$

$$D = 0,25^2 - 4 \cdot 1,5 \cdot (-2) = \frac{1}{16} + 12 = \frac{193}{16}$$

$$x_{1,2} = \frac{1/4 \pm \sqrt{193}/4}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{193}}{12}$$

$$x \approx 1,24 \text{ м}$$

или решаем квадратное уравнение (3):



$$x = \frac{x_0^2 \pm \sqrt{x_0^4 + 4x_0^2 h(h_0 + x_0)}}{2(h_0 + x_0)}, x_1 = 1,24 \text{ м}, x_2 = -1,07 \text{ м}.$$

Значение корня  $x_2 = -1,07$  м отбрасываем, так как оно противоречит условию задачи.

Ответ:  $x = 1,24$  м.

3. Масс-спектрометрия — один из точнейших методов идентификации веществ, используемый практически во всех сферах человеческой деятельности: фармацевтике, медицине, экологии, нефтегазовой промышленности, ядерной энергетике. Это своеобразное «взвешивание» молекул: компоненты ионизируются, затем определяется отношение массы к заряду ионов. Оказалось, что при разделении ионов со сравнимой массой, например, двух стабильных изотопов азота ( $^{14}\text{N}$  и  $^{15}\text{N}$ ), возникают трудности. Рассчитайте радиус кривизны, который необходим, чтобы эти частицы отстояли друг от друга на 1,3 мм.

Ионы, пройдя скрещенные электрическое и магнитное поля, после селектора скоростей попадают только в магнитное поле и движутся по дуге окружности.

$$\begin{cases} v = \frac{E}{B} \\ qvB' = \frac{mv^2}{R} \end{cases} \rightarrow m = \frac{qBB'R}{E}. \quad (1)$$

$$x = D_2 - D_1 = 2(R_2 - R_1)$$

Все величины, кроме  $R$ , в формуле (1) определяются параметрами установки, следовательно, для частиц с одинаковым зарядом справедливо

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_2}{m_1} = 15/14 = 1,071$$

$$R_2 - R_1 = \frac{x}{2} = 0,65 \text{ (мм)}$$

$$0,65 + R_1 = 1,071R_1$$

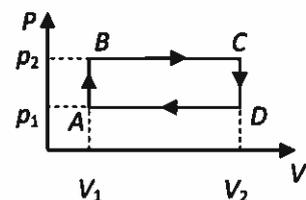
$$R_1 = 9,15 \text{ мм}$$

$$R_2 = 9,8 \text{ мм}$$

4. Цикл теплового двигателя состоит из двух изохор и двух изобар. В качестве рабочего вещества в двигателе используется идеальный одноатомный газ. Отношение давлений на изобарах равно 3, отношение объемов на изохорах равно 2. Найдите КПД такого двигателя.

Дано:  $p_2 = 3p_1$   
 $V_2 = 2V_1$   
 $\eta = ?$

Пусть  $p_1, V_1$  — минимальные значения давления и объема. Изобразим  $PV$ - диаграмму  $\eta = \frac{A}{Q} 100\%$ ,  
 $A$  — работа, совершаемая газом за цикл.  
 $Q$  — количество теплоты, подведенное к газу,



| за цикл  
 $A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$  – работа газа равна площади прямоугольника. Газ получает тепло на участке АВ.

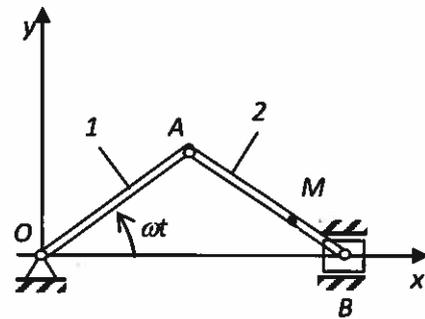
Согласно первому закону термодинамики

$$Q = (\Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + A_{BC}) = \frac{3}{2} \nu R (T_B - T_A) + \frac{3}{2} \nu R (T_C - T_B) + p_2 (V_2 - V_1) = \\ = \frac{3}{2} (3p_1 2V_1 - p_1 V_1) + 3p_1 (2V_1 - V_1) = \frac{3}{2} \cdot 5p_1 V_1 + 3p_1 V_1 = 10,5 p_1 V_1$$

$$A = (3p_1 - p_1)(2V_1 - V_1) = 2p_1 V_1.$$

$$\eta = \frac{2p_1 V_1}{10,5 p_1 V_1} \cdot 100\% \approx 19\%.$$

5. Рассмотрите кривошипно-ползунный механизм (1-кривошип, 2- шатун). Впервые их стали применять в античности, на римских пильных мельницах. Там вращение колеса, приводимого в действие силой падающей воды, преобразовывалось в возвратно-поступательное движение полотна пилы. Данный кривошип вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ рад/с}$ . Найти уравнения движения, уравнение траектории и скорость точки М шатуна, если  $OA = AB = 90 \text{ см}$ ,  $MB = (1/3) AB$ .



Решение. Запишем уравнения движения точки М в координатной форме.

$$1. \begin{cases} x = 1,5 \cos 10t, \text{ м} \\ y = 0,3 \sin 10t, \text{ м} \end{cases}$$

$$x_{\max} = 90 \text{ см} + 60 \text{ см} = 150 \text{ см} = 1,5 \text{ м}$$

$$y_{\max} = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}$$

2. Уравнение траектории получим, исключив  $t$  из уравнений движения.

$$\frac{x^2}{1,5^2} + \frac{y^2}{0,3^2} = 1$$

3. Скорость точки определим как

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = x'(t) = -15 \sin 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v_y = y'(t) = 3 \cos 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{225 \sin^2 10t + 9 \cos^2 10t} = 3\sqrt{25 \sin^2 10t + \cos^2 10t}, \text{ м/с.}$$



## ВАРИАНТ 8

1. Дизельное топливо транспортируют по магистральному трубопроводу диаметром 530 мм и толщиной стенки 5 мм с расходом  $720 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Определите скорость перекачки топлива.

Дано:

$$D = 0,53 \text{ м};$$

$$h = 0,005 \text{ м};$$

$$Q = 720 \text{ м}^3/\text{ч} = 0,2 \text{ м}^3/\text{с}.$$

$v$ —?

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{SL}{\Delta t} = Sv = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi}{4} (D - 2h)^2 v$$

$$[v] = \frac{\text{м}^3/\text{с}}{\text{м}^2} = \text{м}/\text{с}.$$

$$v = \frac{4Q}{\pi(D-2h)^2} = \frac{4 \cdot 0,2}{3,14(0,53-2 \cdot 0,005)^2} \approx 0,9 \text{ м}/\text{с}.$$

2. Чтобы сжать недеформированную пружину на 2 см нужно совершить работу 20 Дж. Какую минимальную работу нужно совершить дополнительно, чтобы сжать эту пружину ещё на 1 см?

Дано:

$$A_1 = 20 \text{ Дж};$$

$$x_1 = 0,02 \text{ м};$$

$$\Delta x = 0,01 \text{ м}.$$

$A_2$ —?

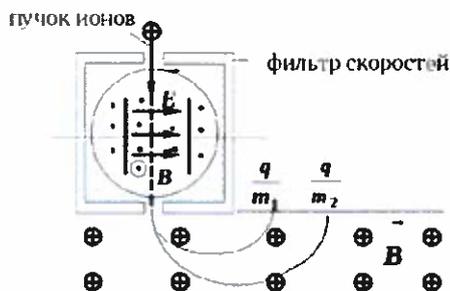
Работа внешней силы равна изменению потенциальной энергии пружины

$$A_2 = W_{p_2} - W_{p_1} = \frac{k(x_1 + \Delta x)^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2},$$

$$A_1 = \frac{kx_1^2}{2}; k = \frac{2A_1}{x_1^2}$$

$$A_2 = \frac{k}{2} (x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - x_1^2) = \frac{A_1\Delta x}{x_1^2} (2x_1 + \Delta x);$$

$$A_2 = \frac{20 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-4}} = 25 \text{ Дж}.$$



3. Масс-спектрометрия — один из точнейших методов идентификации веществ, используемый практически во всех сферах человеческой деятельности: фармацевтике, медицине, экологии, нефтегазовой промышленности, ядерной энергетике. Это своеобразное «взвешивание» молекул: компоненты ионизируются, затем

определяется отношение массы к заряду ионов. Оказалось, что при разделении ионов со сравнимой массой, например, двух стабильных изотопов углерода ( $^{12}\text{C}$  и  $^{13}\text{C}$ ), возникают трудности. Рассчитайте радиус кривизны, который необходим, чтобы эти частицы отстояли друг от друга на 0,4 мм.



Ионы, пройдя скрещенные электрическое и магнитное поля, после селектора скоростей попадают только в магнитное поле и движутся по дуге окружности.

$$\begin{cases} v = \frac{E}{B} \\ qvB' = \frac{mv^2}{R} \end{cases} \rightarrow m = \frac{qBB'R}{E}. \quad (1)$$

$$x = D_2 - D_1 = 2(R_2 - R_1)$$

Все величины, кроме  $R$ , в формуле (1) определяются параметрами установки, следовательно, для частиц с одинаковым зарядом справедливо

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_2}{m_1} = 13/12 = 1,083$$

$$R_2 - R_1 = \frac{x}{2} = 0,2 \text{ (мм)}$$

$$0,2 + R_1 = 1,083R_1$$

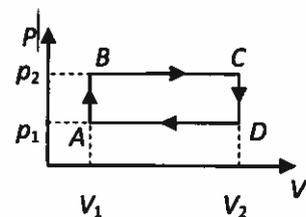
$$R_1 = 2,41 \text{ мм}$$

$$R_2 = 2,61 \text{ мм}$$

4. Цикл теплового двигателя состоит из двух изохор и двух изобар. В качестве рабочего вещества в двигателе используется идеальный одноатомный газ. Отношение давлений на изобарах равно 2, отношение объемов на изохорах равно 3. Найдите КПД такого двигателя.

Дано:  $p_2 = 2p_1$   
 $V_2 = 3V_1$   
 $\eta = ?$

Пусть  $p_1, V_1$  – минимальные значения давления и объема. Изобразим PV- диаграмму  $\eta = \frac{A}{Q} 100\%$ ,  
 $A$  – работа, совершаемая газом за цикл.  
 $Q$  – количество теплоты, подведенное к газу, за цикл



$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$  – работа газа равна площади прямоугольника. Газ получает тепло на участке AB.

Согласно первому закону термодинамики

$$Q = (\Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + A_{BC}) = \frac{3}{2} \nu R (T_B - T_A) + \frac{3}{2} \nu R (T_C - T_B) + p_2 (V_2 - V_1) =$$

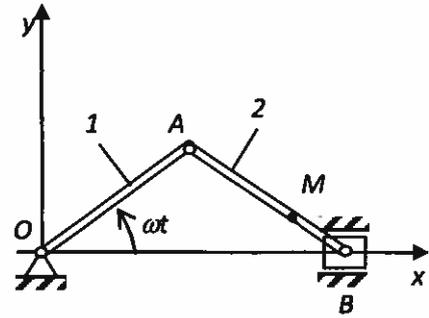
$$= \frac{3}{2} (2p_1 3V_1 - p_1 V_1) + 2p_1 (3V_1 - V_1) = \frac{3}{2} \cdot 5p_1 V_1 + 4p_1 V_1 = 11,5p_1 V_1$$

$$A = (2p_1 - p_1)(3V_1 - V_1) = 2p_1 V_1.$$

$$\eta = \frac{2p_1 V_1}{11,5 p_1 V_1} \cdot 100\% \approx 17\%.$$



5. Рассмотрите кривошипно-ползунный механизм (1-кривошип, 2-шатун). Впервые их стали применять в античности, на римских пильных мельницах. Там вращение колеса, приводимого в действие силой падающей воды, преобразовывалось в возвратно-поступательное движение полотна пилы. Данный кривошип вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega=10 \text{ рад/с}$ . Найти уравнения движения, уравнение траектории и скорость точки М шатуна, если  $OA=AB=90\text{см}$ ,  $AM=(2/3) AB$ .



Решение. Запишем уравнения движения точки М в координатной форме.

$$1. \begin{cases} x = 1,5 \cos 10t, \text{ м} \\ y = 0,3 \sin 10t, \text{ м} \end{cases}$$

$$x_{\max} = 90 \text{ см} + 60 \text{ см} = 150 \text{ см} = 1,5 \text{ м}$$

$$y_{\max} = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}$$

2. Уравнение траектории получим, исключив  $t$  из уравнений движения.

$$\frac{x^2}{1,5^2} + \frac{y^2}{0,3^2} = 1$$

3. Скорость точки определим как

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = x'(t) = -15 \sin 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v_y = y'(t) = 3 \cos 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{225 \sin^2 10t + 9 \cos^2 10t} = 3 \sqrt{25 \sin^2 10t + \cos^2 10t}, \quad \text{м/с.}$$

**ФИЗИКА**  
**ВАРИАНТ 1**

1. К концу вертикально висящей пружины, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз массой 150 г. Затем к середине уже растянутой пружины подвешивают ещё один груз такой же массы. Длина пружины в недеформированном состоянии 15 см, жесткость пружины 50 Н/м. Рассчитайте длину растянутой пружины.

Дано:

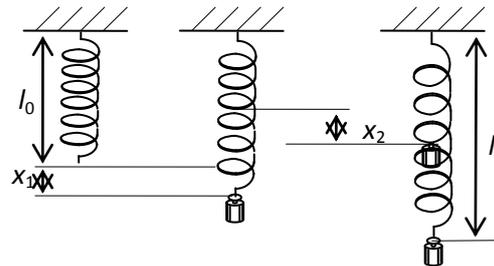
$$m_1 = 150 \text{ г} = 0,15 \text{ кг};$$

$$m_2 = m_1 = m;$$

$$l_0 = 15 \text{ см} = 0,15 \text{ м}$$

$$k = 50 \text{ Н/м}$$

$$l - ?$$



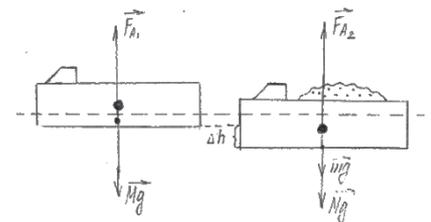
$$l = l_0 + x_1 + x_2$$

$$x_1 = \frac{mg}{k}, x_2 = \frac{mg}{2k}$$

$$l = l_0 + 1,5 \frac{mg}{k}$$

$$l = 0,15 + 1,5 \frac{1,5}{50} = 0,195 \text{ м} = 19,5 \text{ см}$$

2. Площадь днища судна класса «река-море» самоходной баржи-площадки 2000 кв.м. По окончании погрузки 1250 кубометров песка осадка баржи увеличилась на 1 м.



Определите плотность песка.

Дано:

$$S =$$

$$2000 \text{ м}^2;$$

$$V =$$

$$1250 \text{ м}^3;$$

$$h = 1 \text{ м.}$$

$$\rho_n - ?$$

$$F_{\text{арх}2} = Mg + mg$$

$$Mg = F_{\text{арх}1}$$

$$mg = \rho_n V_n g$$

$$\rho_s g S (h + 1) = \rho_s g S h + \rho_n V_n g$$

$$\rho_n = \frac{\rho_g S(h+1-h)}{V_n} = \frac{\rho_g S}{V_n} = \frac{1000 \cdot 2000}{1250} = 1600 \text{ кг/м}^3.$$

3. Два сосуда наполнены одинаковым газом и соединены тонкой трубкой с краном. Вместимость первого сосуда 3л, второго- 7л. Давление газа в первом сосуде 4 атмосферы, во втором- 5 атмосфер. Температура газа в сосудах была одинакова, но после открытия крана она увеличилась на 15%. Найти установившееся давление в сосуде при открытом кране.

Дано:

$$T_1 = T_2;$$

$$V_1 = 3\text{л} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$$

$$V_2 = 7\text{л} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$$

$$p_1 = 4 \text{ атм} = 4 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$p_2 = 5 \text{ атм} = 5 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$T = 1,15T_1.$$

$p$ —?

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT;$$

$$p = \frac{(m_1 + m_2)RT}{M(V_1 + V_2)} = \frac{\frac{m_1 RT}{M} + \frac{m_2 RT}{M}}{V_1 + V_2};$$

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT_1 \Rightarrow \frac{m_1}{M} = \frac{p_1 V_1}{RT_1};$$

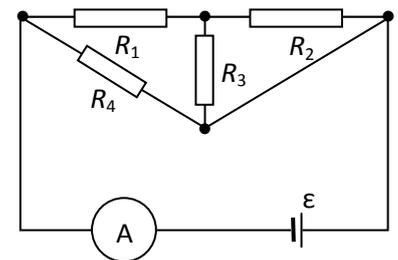
$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT_2 \Rightarrow \frac{m_2}{M} = \frac{p_2 V_2}{RT_2};$$

$$p = \frac{\left(\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2}\right) RT}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} \cdot 1,15$$

$$= \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^5 \cdot 7 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-3}} \cdot 1,15 =$$

$$= \frac{12 \cdot 10^5 + 35 \cdot 10^5}{10} \cdot 1,15 = 540500 \text{ Па} = 5,4 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

4. Какой ток покажет амперметр, включенный в схему, изображённую на рисунке, если  $R_1 = 1,25 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 7 \text{ Ом}$  и э.д.с. источника  $\varepsilon = 2,8 \text{ В}$ ? Сопротивлением амперметра и источника пренебречь.



Дано:

$$R_1 = 1,25 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 1 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 3 \text{ Ом};$$

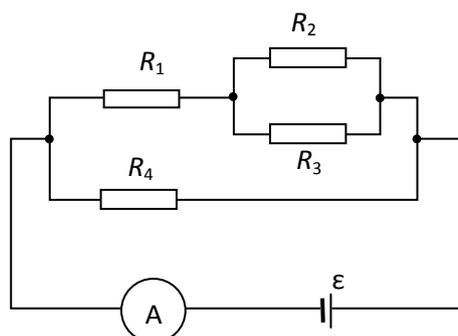
$$R_4 = 7 \text{ Ом};$$

$$\varepsilon = 2,8 \text{ В};$$

$$r = 0.$$

$I_A$ —?

Эквивалентная схема:





$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$R_{123} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_4} + \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}{R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}$$

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}$$

$$I = \frac{\varepsilon (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4)}{R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}$$

$$I = \frac{2,8 \cdot (1,25 + 3 + 3,75 + 7 + 21)}{7 \cdot (1,25 + 3,75 + 3)} = 1,8A$$

5. Силу, с которой воздушный поток действует на парус, можно рассчитать по формуле

$F = \frac{CS\rho(v_0-v)^2}{2}$ , где  $C$  – коэффициент аэродинамической силы,  $S$  – площадь паруса  $S = 5 \text{ м}^2$ ;  $\rho$  – плотность воздуха,  $v_0$  – скорость ветра  $v_0 = 6 \text{ м/с}$ ,  $v$  – скорость парусного судна. В какой-то момент времени мгновенная мощность ветра достигает максимального значения. Какова скорость парусника в этот момент?

Дано:

$$F = \frac{CS\rho(v_0-v)^2}{2};$$

$$N(t') = N_{\text{max}};$$

$$v_0 = 6 \text{ м/с}$$

---

$$v(t') = ?$$

Решение:

$$\left. \begin{array}{l} F = f(v) \\ N = F \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow N = f(v)$$

$$N = \frac{CS\rho}{2} (v_0^2 - 2v_0v + v^2)v = \frac{CS\rho}{2} (v_0^2v - 2v_0v^2 + v^3)$$

$$N = N_{\text{max}} \Rightarrow N'(v) = 0$$

$$N'(v) = \frac{CS\rho}{2} (v_0^2 - 4v_0v + 3v^2) = 0$$



$$v_0^2 - 4v_0v + 3v^2 = 0$$

$$3v^2 - 4v_0v + v_0^2 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{16v_0^2 - 12v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{4v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm 2v_0}{6}$$

$v_1 = v_0$  (не удовлетворяет условию)

$$v_2 = \frac{v_0}{3} = 2 \text{ м/с}$$

## ВАРИАНТ 2

1. К концу вертикально висящей пружины, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз. Затем к середине уже растянутой пружины подвешивают ещё один такой же груз. Длина пружины в недеформированном состоянии 20 см, в растянутом - 25 см. Жесткость пружины 60 Н/м. Определите массу груза.

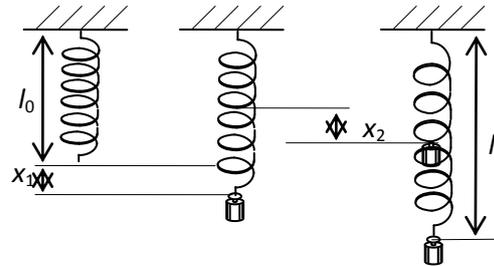
Дано:

$$l_0 = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

$$l = 25 \text{ см} = 0,25 \text{ м}$$

$$k = 60 \text{ Н/м}$$

$m$  – ?



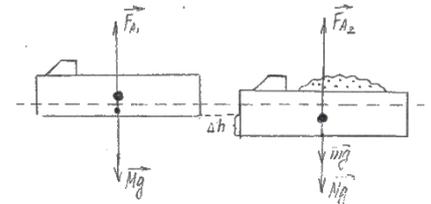
$$l = l_0 + x_1 + x_2$$

$$x_1 = \frac{mg}{k}, x_2 = \frac{mg}{2k}$$

$$m = \frac{k(l - l_0)}{1,5g}$$

$$m = \frac{60 \cdot (0,25 - 0,2)}{1,5 \cdot 10} = 0,2 \text{ кг}$$

2. Самоходная баржа-площадка является сухогрузом и служит для перевозки гравия. Площадь дна судна составляет 2550 кв.м. По окончании погрузки гравия плотностью 1700 кг/м<sup>3</sup>, осадка баржи увеличилась на 1 м. Какой объём гравия был погружен в баржу?



Дано:

$$S = 2550 \text{ м}^2;$$

$$\rho_2 = 1700 \text{ кг/м}^3$$

$$h = 1 \text{ м.}$$

$V_2$  – ?

$$F_{ap2} = Mg + mg$$

$$Mg = F_{ap1}$$

$$mg = \rho_2 V_2 g$$

$$\rho_2 g S (h + 1) = \rho_2 g S h + \rho_2 V_2 g$$

$$V_2 = \frac{\rho_2 S (h + 1 - h)}{\rho_2} = \frac{\rho_2 S}{\rho_2} = \frac{1000 \cdot 2550}{1700} = 1500 \text{ м}^3.$$

3. Два сосуда наполнены одинаковым газом и соединены тонкой трубкой с краном. Давление газа в первом сосуде 3 атмосферы, во втором- 8 атмосфер. Масса газа в первом сосуде 600 г, во втором- 1600 г. Температура газа в сосудах была одинакова, но после открытия крана она увеличилась на 20%. Найти установившееся давление в сосуде при открытом кране.

Дано:

$$p_1 = 3 \text{ атм} = 3 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$p_2 = 8 \text{ атм} = 8 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$m_1 = 600 \text{ г} = 0,6 \text{ кг};$$

$$m_2 = 1600 \text{ г} = 1,6 \text{ кг};$$

$$T_1 = T_2;$$

$$T = 1,2 T_1.$$

$$p - ?$$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT;$$

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{m_1}{M p_1} RT_1;$$

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT_2 \Rightarrow V_2 = \frac{m_2}{M p_2} RT_1;$$

$$p = \frac{\frac{m_1 + m_2}{M} R \cdot 1,2 T_1}{\frac{m_1}{M p_1} RT_1 + \frac{m_2}{M p_2} RT_1} = \frac{1,2 p_1 p_2 (m_1 + m_2)}{m_1 p_2 + m_2 p_1} =$$

$$= \frac{1,2 \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 2,2}{0,6 \cdot 8 \cdot 10^5 + 1,6 \cdot 3 \cdot 10^5} = 6,6 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

4. Какой ток покажет амперметр, включенный в схему, изображённую на рисунке, если  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1,25 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 7 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 3 \text{ Ом}$  и э.д.с. источника  $\varepsilon = 5,6 \text{ В}$ ? Сопротивлением амперметра и источника пренебречь.

Дано:

$$R_1 = 1 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 1,25 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 7 \text{ Ом};$$

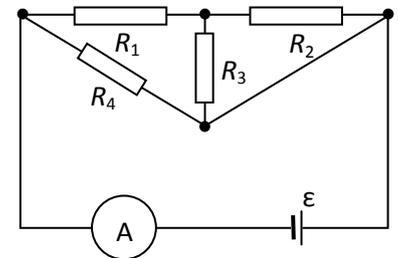
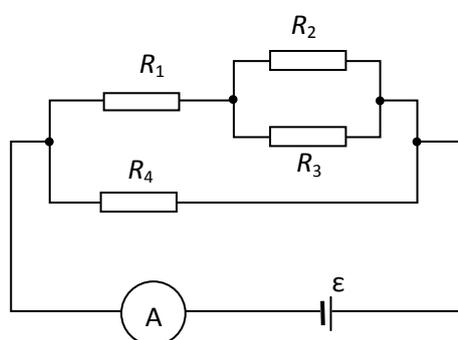
$$R_4 = 3 \text{ Ом};$$

$$\varepsilon = 5,6 \text{ В};$$

$$r = 0.$$

$$I_A - ?$$

Эквивалентная схема:



$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$



$$R_{123} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_4} + \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}{R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}$$

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}$$

$$I = \frac{\varepsilon (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4)}{R_4 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} = 4.6 \text{ A}$$

5. Силу, с которой воздушный поток действует на парус, можно рассчитать по формуле

$F = \frac{AS\rho(v_0 - v)^2}{2}$ , где  $A$  – коэффициент аэродинамической силы,  $S$  – площадь паруса  $S = 4 \text{ м}^2$ ;  $\rho$  – плотность воздуха,  $v_0$  – скорость ветра  $v_0 = 4,8 \text{ м/с}$ ,  $v$  – скорость парусного судна. В какой-то момент времени мгновенная мощность ветра достигает максимального значения. Какова скорость парусника в этот момент?

Дано:

$$F = \frac{AS\rho(v_0 - v)^2}{2};$$

$$N(t') = N_{\text{max}};$$

$$v_0 = 4,8 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

-----  
 $v(t') = ?$

Решение:

$$\left. \begin{aligned} F &= f(v) \\ N &= F \cdot v \end{aligned} \right\} \Rightarrow N = f(v)$$

$$N = \frac{AS\rho}{2} (v_0^2 - 2v_0v + v^2)v = \frac{AS\rho}{2} (v_0^2v - 2v_0v^2 + v^3)$$

$$N = N_{\text{max}} \Rightarrow N'(v) = 0$$

$$N'(v) = \frac{AS\rho}{2} (v_0^2 - 4v_0v + 3v^2) = 0$$

$$v_0^2 - 4v_0v + 3v^2 = 0$$

$$3v^2 - 4v_0v + v_0^2 = 0$$



$$v_{1,2} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{16v_0^2 - 12v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{4v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm 2v_0}{6}$$

$$v_1 = v_0 \text{ (не удовл.) } v_2 = \frac{v_0}{3} = 1,6 \text{ м/с}$$

**ВАРИАНТ 3**

1. К концу вертикально висящей пружины, массой которой можно пренебречь подвешивают груз массой 180 г. Затем к середине уже растянутой пружины подвешивают ещё один груз такой же масса. Жесткость пружины 45 Н/м. Длина деформированной пружины оказалась равной 27 см. Определите длину пружины в недеформированном состоянии.

Дано:

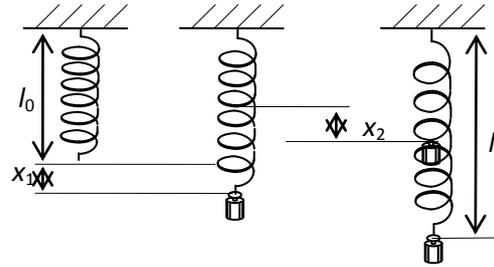
$$m_1 = 180 \text{ г} = 0,18 \text{ кг};$$

$$m_2 = m_1 = m;$$

$$l = 27 \text{ см} = 0,27 \text{ м}$$

$$k = 45 \text{ Н/м}$$

$$l_0 - ?$$



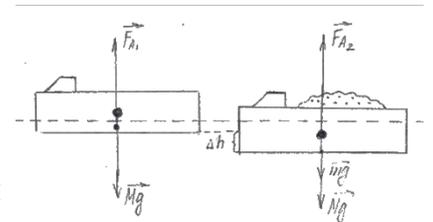
$$l = l_0 + x_1 + x_2$$

$$x_1 = \frac{mg}{k}, x_2 = \frac{mg}{2k}$$

$$l_0 = l - 1,5 \frac{mg}{k}$$

$$l_0 = 0,27 - 1,5 \cdot \frac{0,18 \cdot 10}{45} = 0,21 \text{ м} = 21 \text{ см}$$

2. Для перевозки щебня служит самоходная баржа класса «река-море». По окончании погрузки щебня плотностью  $1600 \text{ кг/м}^3$ , осадка судна увеличилась на 1 м. Площадь днища судна составляет  $2200 \text{ кв.м.}$  Какой объём щебня загружен в баржу?



Дано:

$$\rho_{щ} = 1600 \text{ кг/м}^3$$

$$S = 2200 \text{ м}^2;$$

$$h = 1 \text{ м.}$$

$$V - ?$$

$$F_{\text{арх}2} = Mg + mg$$

$$Mg = F_{\text{арх}1}$$

$$mg = \rho_{щ} V_{щ} g$$

$$\rho_{\text{в}} g S (h + 1) = \rho_{\text{в}} g S h + \rho_{щ} V_{щ} g$$

$$V_{щ} = \frac{\rho_{\text{в}} S (h + 1 - h)}{\rho_{щ}} = \frac{\rho_{\text{в}} S}{\rho_{щ}} = \frac{1000 \cdot 2200}{1600} = 1375 \text{ м}^3.$$

3. Два баллона соединены тонкой трубкой с краном и наполнены одинаковым газом. Объём первого баллона 3л, второго- 8л. В первом баллоне газ находится под давлением 1 атм, во втором- 0,4 атм. Какое давление будет в баллонах при открытом кране, если температура газа не изменяется?

Дано:  
 $T_1 = T_2$ ;  
 $V_1 = 3\text{л} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ ;  
 $V_2 = 8\text{л} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ ;  
 $p_1 = 1 \text{ атм} = 10^5 \text{ Па}$ ;  
 $p_2 = 0,4 \text{ атм} = 0,4 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ;  
 $T = T_1 = T_2$ .  
 $p - ?$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT;$$

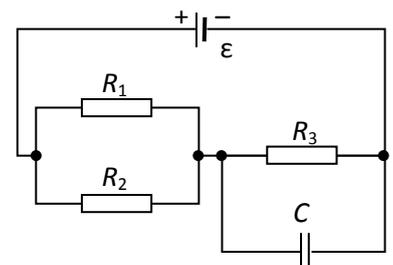
$$p = \frac{(m_1 + m_2)RT}{M(V_1 + V_2)} = \frac{\frac{m_1}{M}RT + \frac{m_2}{M}RT}{V_1 + V_2};$$

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT_1 \Rightarrow \frac{m_1}{M} = \frac{p_1 V_1}{RT_1};$$

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT_2 \Rightarrow \frac{m_2}{M} = \frac{p_2 V_2}{RT_2};$$

$$p = \frac{\left(\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2}\right) RT}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 0,4 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-3}} =$$
$$= \frac{3 \cdot 10^5 + 3,2 \cdot 10^5}{11} = 56364 \text{ Па} \approx 5,6 \cdot 10^4 \text{ Па}$$

4. В цепь, питаемую элементом с внутренним сопротивлением  $r_0 = 1,5 \text{ Ом}$ , входят, как показано на рисунке, два сопротивления  $R_1 = R_2 = 30 \text{ Ом}$ , включенные параллельно, и сопротивление  $R_3 = 40 \text{ Ом}$ . Параллельно сопротивлению  $R_3$  подключен конденсатор емкостью  $C = 5 \text{ мкФ}$ , заряд которого  $q = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ . Определить э.д.с.  $\varepsilon$  элемента.



Дано:  
 $r_0 = 1,5 \text{ Ом}$ ;  
 $R_1 = R_2 = 30 \text{ Ом}$ ;  
 $R_3 = 40 \text{ Ом}$ ;  
 $C = 5 \text{ мкФ}$ ;  
 $q = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$   
 $\varepsilon - ?$



Падение напряжения на сопротивлении  $R_3$  равно  $U = \frac{q}{C} = IR_3$ . Отсюда ток, текущий через это сопротивление,  $I = q/CR_3$ .

Полное сопротивление цепи  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + r_0$ .

Э.Д.С. элемента  $\varepsilon = IR = \frac{q}{CR_3} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + r_0 \right) = 1.2 \text{ В}$

5. Силу, с которой воздушный поток действует на парус, можно рассчитать по формуле

$F = \frac{BS\rho(v_0-v)^2}{2}$ , где  $B$  – коэффициент аэродинамической силы,  $S$  – площадь паруса  $S = 7 \text{ м}^2$ ;  $\rho$  – плотность воздуха,  $v_0$  – скорость ветра  $v_0 = 6,3 \text{ м/с}$ ,  $v$  – скорость парусного судна. В какой-то момент времени мгновенная мощность ветра достигает максимального значения. Какова скорость парусника в этот момент?

Дано:

$$F = \frac{BS\rho(v_0-v)^2}{2};$$

$$N(t') = N_{\max};$$

$$v_0 = 6,3 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

-----  
 $v(t') = ?$

Решение:

$$\left. \begin{array}{l} F = f(v) \\ N = F \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow N = f(v)$$

$$N = \frac{BS\rho}{2} (v_0^2 - 2v_0v + v^2)v = \frac{BS\rho}{2} (v_0^2v - 2v_0v^2 + v^3)$$

$$N = N_{\max} \Rightarrow N'(v) = 0$$

$$N'(v) = \frac{BS\rho}{2} (v_0^2 - 4v_0v + 3v^2) = 0$$

$$v_0^2 - 4v_0v + 3v^2 = 0$$

$$3v^2 - 4v_0v + v_0^2 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{16v_0^2 - 12v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{4v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm 2v_0}{6}$$

$$v_1 = v_0 \text{ (не удовл.) } v_2 = \frac{v_0}{3} = 3,1 \text{ м/с}$$

**ВАРИАНТ 4**

1. К концу вертикально висящей пружины, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз массой 160 г. Затем к середине уже растянутой пружины подвешивают ещё один груз такой же массы. Длина пружины в недеформированном состоянии 17 см, в растянутом – 23 см. Определите жесткость пружины.

Дано:

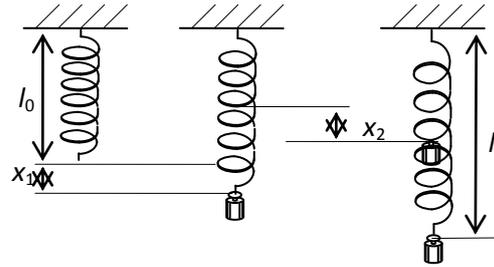
$$m_1 = 160\text{г} = 0,16\text{кг};$$

$$m_2 = m_1 = m;$$

$$l_0 = 17\text{см} = 0,17\text{м}$$

$$l = 23\text{см} = 0,23\text{м}$$

$$k - ?$$



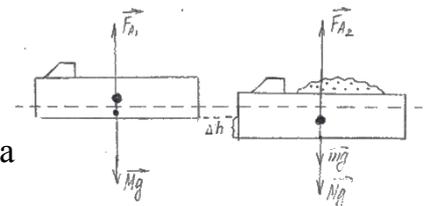
$$l = l_0 + x_1 + x_2$$

$$x_1 = \frac{mg}{k}, x_2 = \frac{mg}{2k}$$

$$k = \frac{1,5 \cdot mg}{l - l_0}$$

$$k = \frac{1,5 \cdot 0,16 \cdot 10}{0,23 - 0,17} = 40\text{Н/м}$$

2. Площадь днища судна класса «река-море» самоходной баржи-площадки 2500 кв.м. По окончании погрузки 3500 кубометров керамзитового гравия осадка баржи увеличилась на 70 см. Определите плотность керамзита.



Дано:

$$S =$$

$$2500\text{ м}^2;$$

$$V_{\kappa} =$$

$$3500\text{ м}^3;$$

$$\square = 0,7\text{ м.}$$

$$\rho_{\kappa} - ?$$

$$F_{ap2} = Mg + mg$$

$$Mg = F_{ap1}$$

$$mg = \rho_{\kappa} V_{\kappa} g$$

$$\rho_{\text{в}} g S (\square + 0,7) = \rho_{\text{в}} g S \square + \rho_{\kappa} V_{\kappa} g$$

$$\rho_{\kappa} = \frac{\rho_{\text{в}} S (\square + 0,7 - \square)}{V_{\kappa}} = \frac{1000 \cdot 2500 \cdot 0,7}{3500} = 500\text{ кг/м}^3.$$

3. Два баллона соединены тонкой трубкой с краном и наполнены одинаковым газом. Объем первого баллона 12л, второго- 18л. В первом баллоне газ находится под давлением 1 атм, во втором- 0,4 атм. Какое давление будет в баллонах при открытом кране, если температура газа не изменяется?

Дано:  
 $T_1 = T_2$ ;  
 $V_1 = 12\text{ л} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ ;  
 $V_2 = 18\text{ л} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ ;  
 $p_1 = 1 \text{ атм} = 10^5 \text{ Па}$ ;  
 $p_2 = 0,4 \text{ атм} = 0,4 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ;  
 $T = T_1 = T_2$ .  
 $p - ?$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT;$$

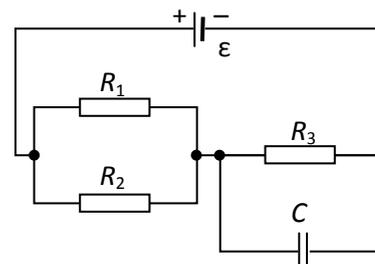
$$p = \frac{(m_1 + m_2)RT}{M(V_1 + V_2)} = \frac{\frac{m_1}{M}RT + \frac{m_2}{M}RT}{V_1 + V_2};$$

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT_1 \Rightarrow \frac{m_1}{M} = \frac{p_1 V_1}{RT_1};$$

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT_2 \Rightarrow \frac{m_2}{M} = \frac{p_2 V_2}{RT_2};$$

$$p = \frac{\left(\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2}\right) RT}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-3} + 0,4 \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-3} + 18 \cdot 10^{-3}} =$$
$$= \frac{12 \cdot 10^5 + 7,2 \cdot 10^5}{30} = 0,64 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

4. В цепь, питаемую элементом с внутренним сопротивлением  $r_0 = 3$  Ом, входят, как показано на рисунке, два сопротивления  $R_1 = R_2 = 28$  Ом, включенные параллельно, и сопротивление  $R_3 = 40$  Ом. Параллельно сопротивлению  $R_3$  подключен конденсатор емкостью  $C = 5$  мкФ, заряд которого  $q = 4,2 \cdot 10^{-6}$  Кл. Определить э.д.с.  $\varepsilon$  элемента.



Дано:  
 $r_0 = 3$  Ом;  
 $R_1 = R_2 = 28$  Ом;  
 $R_3 = 40$  Ом;  
 $C = 5$  мкФ;  
 $q = 4,2 \cdot 10^{-6}$  Кл  
 $\varepsilon - ?$

Падение напряжения на сопротивлении  $R_3$  равно  $U = \frac{q}{C} = IR_3$ . Отсюда ток, текущий через это сопротивление,  $I = q/CR_3$ .



Полное сопротивление цепи  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + r_0$ .

$$\text{Э.Д.С. элемента } \varepsilon = IR = \frac{q}{CR_3} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + r_0 \right) = 1.2 \text{ В}$$

5. Силу, с которой воздушный поток действует на парус, можно рассчитать по формуле  $F = \frac{CS\rho(v_0 - v)^2}{2}$ , где  $C$  – коэффициент аэродинамической силы,  $S$  – площадь паруса;  $\rho$  – плотность воздуха,  $v_0$  – скорость ветра,  $v$  – скорость парусного судна. В какой-то момент времени мгновенная мощность ветра достигает максимального значения. Какова скорость парусника в этот момент?

Дано:

$$F = \frac{CS\rho(v_0 - v)^2}{2};$$

$$N(t') = N_{\max};$$

$$v_0;$$

---

$$v(t') - ?$$

Решение:

$$\left. \begin{array}{l} F = f(v) \\ N = F \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow N = f(v)$$

$$N = \frac{CS\rho}{2} (v_0^2 - 2v_0v + v^2)v = \frac{CS\rho}{2} (v_0^2v - 2v_0v^2 + v^3)$$

$$N = N_{\max} \Rightarrow N'(v) = 0$$

$$N'(v) = \frac{CS\rho}{2} (v_0^2 - 4v_0v + 3v^2) = 0$$

$$v_0^2 - 4v_0v + 3v^2 = 0$$

$$3v^2 - 4v_0v + v_0^2 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{16v_0^2 - 12v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{4v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm 2v_0}{6}$$

$$v_1 = v_0 \text{ (не удовл.) } v_2 = \frac{v_0}{3}$$

**ВАРИАНТ 5**

1. Перекачка бензина ведется по бензопроводу нефтепроводу диаметром 530 мм и толщиной стенок 8 мм с расходом 1100 м<sup>3</sup>/ч. Определите скорость перекачки бензина.

Дано:

$$D = 0,53 \text{ м};$$

$$h = 0,008 \text{ м};$$

$$Q \approx 0,3 \text{ м}^3/\text{с}.$$

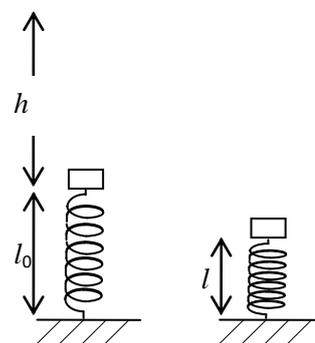
$v$  — ?

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{SL}{\Delta t} = Sv = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi}{4} (D - 2h)^2 v$$

$$[v] = \frac{\text{м}^3/\text{с}}{\text{м}^2} = \text{м}/\text{с}.$$

$$v = \frac{4Q}{\pi(D-2h)^2} = \frac{4 \cdot 0,3}{3,14(0,53-2 \cdot 0,008)^2} \approx 1,4 \text{ м}/\text{с}.$$

2. Инженер рассчитывает пружину, которую необходимо поместить на дно шахты лифта, чтобы при обрыве троса неподвижного лифта на высоте  $h$  над верхним концом пружины, пассажиры при торможении не испытывали перегрузок больше  $10g$ . Масса лифта вместе с пассажирами равна  $M$ . Каким должен быть при этом коэффициент жесткости пружины  $k$ ?



$$1. \quad Mg(h + x) = \frac{kx^2}{2}$$

$$2. \quad kx - Mg = Ma$$

$$a = 10g$$

$$kx = 11Mg$$

$$x = \frac{11}{k} Mg$$

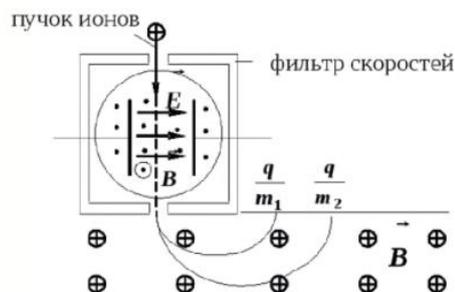
$$3. \quad x^2 = \frac{121 M^2 g^2}{k^2}$$

$$4. \quad Mgh + Mg \frac{11Mg}{k} = \frac{k}{2} \cdot \frac{121 M^2 g^2}{k^2}$$

$$Mgh = \left(\frac{121}{2} - 11\right) \cdot \frac{M^2 g^2}{k}$$

$$k = \frac{49,5Mg}{h}$$

3. Масс-спектрометрия — один из точнейших методов идентификации веществ, используемый практически во всех сферах человеческой деятельности: фармацевтике, медицине, экологии, нефтегазовой промышленности, ядерной





энергетике. Это своеобразное «взвешивание» молекул: компоненты ионизируются, затем определяется отношение массы к заряду ионов. Оказалось, что при разделении ионов со сравнимой массой, например, двух стабильных изотопов кислорода ( $^{16}\text{O}$  и  $^{18}\text{O}$ ), возникают трудности. Рассчитайте радиус кривизны, который необходим, чтобы эти частицы отстояли друг от друга на 1,4 мм.

Ионы, пройдя скрещенные электрическое и магнитное поля, после селектора скоростей попадают только в магнитное поле и движутся по дуге окружности.

$$\begin{cases} v = \frac{E}{B} \\ qvB' = \frac{mv^2}{R} \end{cases} \rightarrow m = \frac{qBB'R}{E}. \quad (1)$$

$$x = D_2 - D_1 = 2(R_2 - R_1)$$

Все величины, кроме  $R$ , в формуле (1) определяются параметрами установки, следовательно, для частиц с одинаковым зарядом справедливо

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_2}{m_1} = 18/16 = 1,125$$

$$R_2 - R_1 = \frac{x}{2} = 0,7 \text{ (мм)}$$

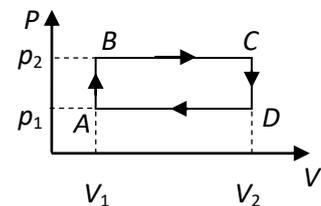
$$0,7 + R_1 = 1,125R_1$$

$$R_1 = 5,6 \text{ мм}$$

$$R_2 = 6,3 \text{ мм}$$

4. Цикл теплового двигателя состоит из двух изохор и двух изобар. В качестве рабочего вещества в двигателе используется идеальный одноатомный газ. Отношение давлений на изобарах равно  $n$  ( $n > 1$ ), отношение объемов на изохорах равно  $m$  ( $m > 1$ ). Найдите КПД такого двигателя.

Дано:  $n = \frac{p_2}{p_1}$ ;  $m = \frac{V_2}{V_1}$ . Пусть  $p_1, V_1$  – минимальные значения давления и объема. Изобразим  $PV$ - диаграмму  $\eta = \frac{A}{Q} 100\%$ ,  
 $A$  – работа, совершаемая газом за цикл.  
 $Q$  – количество теплоты, подведенное к газу, за цикл



$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$  – работа газа равна площади прямоугольника. Газ получает тепло на участке  $AB$ .

Согласно первому закону термодинамики

$$\begin{aligned} Q &= (\Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + A_{BC}) = \frac{3}{2}vR(T_B - T_A) + \frac{3}{2}vR(T_C - T_B) + p_2(V_2 - V_1) = \\ &= \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + p_2(V_2 - V_1) = \frac{5}{2}p_2V_2 - \frac{3}{2}p_1V_1 - p_2V_1 = \end{aligned}$$

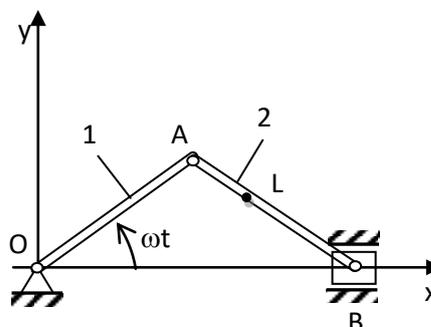
$$= \frac{5}{2}np_1mV_1 - \frac{3}{2}p_1V_1 - np_1V_1 = p_1V_1 \left( \frac{5}{2}nm - \frac{3}{2} - n \right).$$

$$A = (np_1 - p_1)(mV_1 - V_1) = p_1(n - 1)V_1(m - 1) = p_1V_1(n - 1)(m - 1).$$

$$\eta = \frac{p_1V_1(n-1)(m-1)}{p_1V_1\left(\frac{5}{2}nm - \frac{3}{2} - n\right)} = \frac{2(n-1)(m-1)}{5nm - 2n - 3}.$$

5. Рассмотрите кривошипно-ползунный механизм (1-кривошип, 2- шатун).

Впервые их стали применять в античности, на римских пильных мельницах. Там вращение колеса, приводимого в действие силой падающей воды, преобразовывалось в возвратно-поступательное движение полотна пилы. Данный кривошип



вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ рад/с}$ . Найти уравнения движения, уравнение траектории и скорость точки L шатуна, если  $OA = AB = 90 \text{ см}$ ,  $AL = (1/3) AB$ .

Решение. Запишем уравнения движения точки L в координатной форме.

$$1. \quad \begin{cases} x = 1,2 \cos 10t, \text{ м} \\ y = 0,6 \sin 10t, \text{ м} \end{cases}$$

$$x_{\max} = 90 \text{ см} + 30 \text{ см} = 120 \text{ см} = 1,2 \text{ м}$$

$$y_{\max} = 60 \text{ см} = 0,6 \text{ м}$$

2. Уравнение траектории получим, исключив  $t$  из уравнений движения.

$$\frac{x^2}{1,2^2} + \frac{y^2}{0,6^2} = 1$$

3. Скорость точки определим как

$$2. \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = x'(t) = -12 \sin 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v_y = y'(t) = 6 \cos 10t, \quad \text{м/с}$$

$$3. \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{144 \sin^2 10t + 36 \cos^2 10t} = 6\sqrt{4 \sin^2 10t + \cos^2 10t}, \text{ м/с}.$$

**ВАРИАНТ 6**

1. Перекачка нефти ведется по нефтепроводу диаметром 530 мм и толщиной стенок 8 мм с расходом  $800 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Определите скорость перекачки нефти.

Дано:

$$D = 0,53 \text{ м};$$

$$h = 0,008 \text{ м};$$

$$Q = 2/9 \text{ м}^3/\text{с};$$

$v$ —?

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{SL}{\Delta t} = Sv = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi}{4} (D - 2h)^2 v$$

$$[v] = \frac{\text{м}^3/\text{с}}{\text{м}^2} = \text{м}/\text{с}.$$

$$v = \frac{4Q}{\pi(D-2h)^2} = \frac{4 \cdot 2/9}{3,14(0,53-2 \cdot 0,008)^2} \approx 1,1 \text{ м}/\text{с}.$$

2. Спортсмен массой 78,75 кг испытывает сетку, которую используют пожарные при спасении людей. Сетка провисла на 100 см при прыжке с высоты 15 м. Считая сетку упругой как пружина, вычислите, на сколько она провиснет при прыжке человека массой 45 кг с высоты 29 м.

Дано:

$$m_1 = 78,75 \text{ кг};$$

$$x_1 = 1 \text{ м};$$

$$h_1 = 15 \text{ м};$$

$$m_2 = 45 \text{ кг};$$

$$h_2 = 29 \text{ м};$$

$x_2$ —?

$$\frac{m_2 \cdot (h_2 + x_2)}{m_1 \cdot (h_1 + x_1)} = \frac{x_2^2}{x_1^2}.$$

$$\frac{45}{78,75} \cdot \frac{(29 + x_2)}{(15 + 1)} = \frac{x_2^2}{1};$$

$$\frac{(29 + x_2)}{16} = \frac{x_2^2 \cdot 78,75}{45};$$

$$29 + x_2 = x_2^2 \cdot 1,75 \cdot 16;$$

$$28x_2^2 - x_2 - 29 = 0;$$

$$D = 1 + 4 \cdot 28 \cdot 29 = 3249 = 57^2;$$

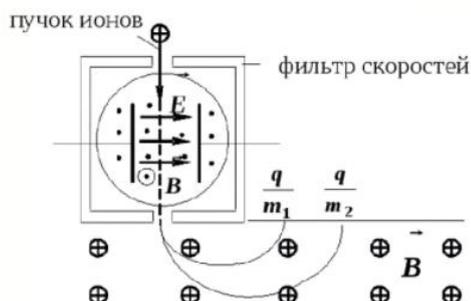
$$x_2 = \frac{1+57}{56} \approx 1,04 \text{ м}.$$

3. Масс-спектрометрия — один из точнейших методов идентификации веществ, используемый практически во всех сферах человеческой деятельности: фармацевтике, медицине, экологии,

Решение. Механическую систему «Земля-спортсмен-сетка» можно считать замкнутой. По закону сохранения энергии при прыжке спортсмена его потенциальная энергия должна полностью перейти в энергию упругой деформации сетки:

$$m_2 g (h_2 + x_2) = \frac{kx_2^2}{2};$$

$$m_1 g (h_1 + x_1) = \frac{kx_1^2}{2};$$





нефтегазовой промышленности, ядерной энергетике. Это своеобразное «взвешивание» молекул: компоненты ионизируются, затем определяется отношение массы к заряду ионов. Оказалось, что при разделении ионов со сравнимой массой, например, двух изотопов аргона ( $^{36}\text{Ar}$  и  $^{38}\text{Ar}$ ), возникают трудности. Рассчитайте радиус кривизны, который необходим, чтобы эти частицы отстояли друг от друга на 1,2 мм.

Ионы, пройдя скрещенные электрическое и магнитное поля, после селектора скоростей попадают только в магнитное поле и движутся по дуге окружности.

$$\begin{cases} v = \frac{E}{B} \\ qvB' = \frac{mv^2}{R} \end{cases} \rightarrow m = \frac{qBB'R}{E} \quad (1)$$

$$x = D_2 - D_1 = 2(R_2 - R_1)$$

Все величины, кроме  $R$ , в формуле (1) определяются параметрами установки, следовательно, для частиц с одинаковым зарядом справедливо

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_2}{m_1} = 38/36 = 1,056$$

$$R_2 - R_1 = \frac{x}{2} = 0,6 \text{ (мм)}$$

$$0,6 + R_1 = 1,056R_1$$

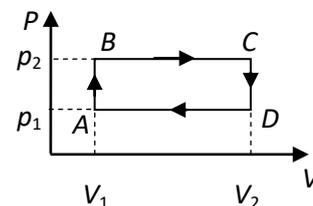
$$R_1 = 10,7 \text{ мм}$$

$$R_2 = 11,3 \text{ мм}$$

4. Цикл теплового двигателя состоит из двух изохор и двух изобар. В качестве рабочего вещества в двигателе используется идеальный одноатомный газ. Отношение давлений на изобарах равно  $m$  ( $m > 1$ ), отношение объемов на изохорах равно  $n$  ( $n > 1$ ). Найдите КПД такого двигателя.

Дано:  $m = \frac{p_2}{p_1}$ ,  $n = \frac{V_2}{V_1}$ ,  $\eta - ?$

Пусть  $p_1, V_1$  – минимальные значения давления и объема. Изобразим  $PV$ - диаграмму  $\eta = \frac{A}{Q} 100\%$ ,  
 $A$  – работа, совершаемая газом за цикл.  
 $Q$  – количество теплоты, подведенное к газу, за цикл



$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$  – работа газа равна площади прямоугольника. Газ получает тепло на участке  $AB$ .

Согласно первому закону термодинамики

$$Q = (\Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + A_{BC}) = \frac{3}{2} \nu R (T_B - T_A) + \frac{3}{2} \nu R (T_C - T_B) + p_2 (V_2 - V_1) =$$

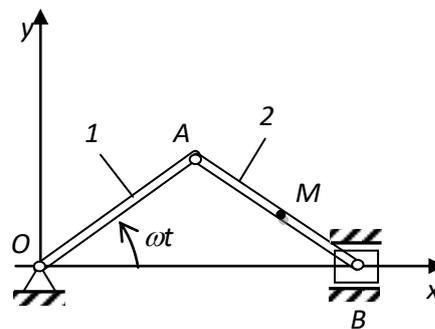
$$= \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) + p_2 (V_2 - V_1) = \frac{5}{2} p_2 V_2 - \frac{3}{2} p_1 V_1 - p_2 V_1 =$$

$$= \frac{5}{2}mp_1nV_1 - \frac{3}{2}p_1V_1 - mp_1V_1 = p_1V_1 \left( \frac{5}{2}nm - \frac{3}{2} - m \right).$$

$$A = (mp_1 - p_1)(nV_1 - V_1) = p_1(m - 1)V_1(n - 1) = p_1V_1(m - 1)(n - 1).$$

$$\eta = \frac{p_1V_1(n-1)(m-1)}{p_1V_1\left(\frac{5}{2}nm - \frac{3}{2} - m\right)} = \frac{2(n-1)(m-1)}{5nm - 2m - 3}.$$

5. Рассмотрите кривошипно-ползунный механизм. (1-кривошип, 2- шатун). Впервые их стали применять в античности, на римских пильных мельницах. Там вращение колеса, приводимого в действие силой падающей воды, преобразовывалось в возвратно-поступательное движение полотна пилы. Данный кривошип вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ рад/с}$ . Найти уравнения движения, уравнение траектории и скорость точки М шатуна, если  $OA = AB = 90 \text{ см}$ ,  $AM = (1/2) AB$ .



Решение. Запишем уравнения движения точки М в координатной форме.

$$1. \begin{cases} x = 1,35 \cos 10t, \text{ м} \\ y = 0,45 \sin 10t, \text{ м} \end{cases}$$

$$x_{\max} = 90 \text{ см} + 45 \text{ см} = 135 \text{ см} = 1,35 \text{ м}$$

$$y_{\max} = 45 \text{ см} = 0,45 \text{ м}$$

2. Уравнение траектории получим, исключив  $t$  из уравнений движения.

$$\frac{x^2}{1,35^2} + \frac{y^2}{0,45^2} = 1$$

3. Скорость точки определим как

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = x'(t) = -13,5 \sin 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v_y = y'(t) = 4,5 \cos 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{182,25 \sin^2 10t + 20,25 \cos^2 10t} = 4,5 \sqrt{9 \sin^2 10t + \cos^2 10t}, \quad \text{м/с}.$$



## ВАРИАНТ 7

1. Бензопровод состоит из двух последовательно соединенных участков: первого с диаметром 500 мм и толщиной стенки 10 мм и второго - с диаметром 250 мм и толщиной стенки 5 мм. Скорость транспортировки бензина в первом участке 1,8 м/с. Какова скорость движения бензина во втором?

Дано:

$$D_1 = 0,5 \text{ м};$$

$$h_1 = 0,01 \text{ м};$$

$$D_2 = 0,25 \text{ м};$$

$$h_2 = 0,005 \text{ м};$$

$$v_1 = 1,8 \text{ м/с}$$

$$v_2 = ?$$

$$V_1 = V_2$$

$$S_1 L_1 = S_2 L_2$$

$$\frac{\pi d_1^2}{4} v_1 \Delta t = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2 \Delta t$$

$$v_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 v_1 = \left(\frac{D_1 - 2h_1}{D_2 - 2h_2}\right)^2 v_1 = \left(\frac{0,5 - 2 \cdot 0,01}{0,25 - 2 \cdot 0,005}\right)^2 \cdot 1,8 \approx \approx 7,2 \text{ м/с}$$

2. Спортсмен прыгает в сетку с высоты 8 м. На какой предельной высоте над полом надо натянуть сетку, чтобы спортсмен не ударился об пол при прыжке. Измерения показали, что сетка прогибается на 50 см при прыжке в нее с высоты 1 м.

Дано:

$$h = 8 \text{ м};$$

$$x_0 = 0,5 \text{ м};$$

$$h_0 = 1 \text{ м};$$

$$x = ?$$

Решение. Механическую систему «Земля-спортсмен-сетка» можно считать замкнутой, поскольку трение при растяжении сетки пренебрежимо мало. По закону сохранения энергии при прыжке спортсмена его потенциальная энергия должна полностью перейти в энергию упругой деформации сетки:

$$mg(h+x) = kx^2/2, \quad (1)$$

$$mg(h_0+x_0) = kx_0^2/2, \quad (2)$$

где  $k$  - коэффициент упругости;  $m$  - масса спортсмена.

Разделив уравнение (1) на уравнение (2), получим

$$\frac{h+x}{h_0+x_0} = \frac{x^2}{x_0^2}, \text{ откуда } (h_0+x_0)x^2 - x_0^2x - hx_0^2 = 0. \quad (3)$$

$$1,5x^2 - 0,25x - 2 = 0;$$

$$D = 0,25^2 - 4 \cdot 1,5 \cdot (-2) = \frac{1}{16} + 12 = \frac{193}{16}$$

$$x_{1,2} = \frac{1/4 \pm \sqrt{193}/4}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{193}}{12}$$

$$x \approx 1,24 \text{ м}$$

или решаем квадратное уравнение (3):



$$x = \frac{x_0^2 \pm \sqrt{x_0^4 + 4x_0^2 h(h_0 + x_0)}}{2(h_0 + x_0)}, x_1 = 1,24 \text{ м}, x_2 = -1,07 \text{ м}.$$

Значение корня  $x_2 = -1,07$  м отбрасываем, так как оно противоречит условию задачи.

Ответ:  $x = 1,24$  м.

3. Масс-спектрометрия — один из точнейших методов идентификации веществ, используемый практически во всех сферах человеческой деятельности: фармацевтике, медицине, экологии, нефтегазовой промышленности, ядерной энергетике. Это своеобразное «взвешивание» молекул: компоненты ионизируются, затем определяется отношение массы к заряду ионов. Оказалось, что при разделении ионов со сравнимой массой, например, двух стабильных изотопов азота ( $^{14}\text{N}$  и  $^{15}\text{N}$ ), возникают трудности. Рассчитайте радиус кривизны, который необходим, чтобы эти частицы отстояли друг от друга на 1,3 мм.

Ионы, пройдя скрещенные электрическое и магнитное поля, после селектора скоростей попадают только в магнитное поле и движутся по дуге окружности.

$$\begin{cases} v = \frac{E}{B} \\ qvB' = \frac{mv^2}{R} \end{cases} \rightarrow m = \frac{qBB'R}{E}. \quad (1)$$

$$x = D_2 - D_1 = 2(R_2 - R_1)$$

Все величины, кроме  $R$ , в формуле (1) определяются параметрами установки, следовательно, для частиц с одинаковым зарядом справедливо

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_2}{m_1} = 15/14 = 1,071$$

$$R_2 - R_1 = \frac{x}{2} = 0,65 \text{ (мм)}$$

$$0,65 + R_1 = 1,071R_1$$

$$R_1 = 9,15 \text{ мм}$$

$$R_2 = 9,8 \text{ мм}$$

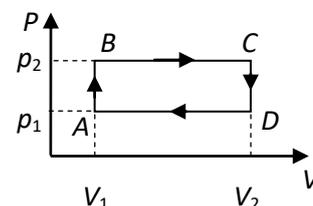
4. Цикл теплового двигателя состоит из двух изохор и двух изобар. В качестве рабочего вещества в двигателе используется идеальный одноатомный газ. Отношение давлений на изобарах равно 3, отношение объемов на изохорах равно 2. Найдите КПД такого двигателя.

Дано:  $p_2 = 3p_1$   
 $V_2 = 2V_1$   
 $\eta - ?$

Пусть  $p_1, V_1$  — минимальные значения давления и объема. Изобразим  $PV$ - диаграмму

$$\eta = \frac{A}{Q} 100\%,$$

$A$  — работа, совершаемая газом за цикл.  
 $Q$  — количество теплоты, подведенное к газу,



| за цикл  
 $A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$  – работа газа равна площади прямоугольника. Газ получает тепло на участке АВ.

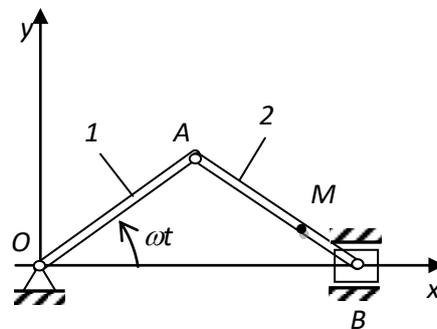
Согласно первому закону термодинамики

$$\begin{aligned}
 Q &= (\Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + A_{BC}) = \frac{3}{2} \nu R(T_B - T_A) + \frac{3}{2} \nu R(T_C - T_B) + p_2(V_2 - V_1) = \\
 &= \frac{3}{2} (3p_1 2V_1 - p_1 V_1) + 3p_1(2V_1 - V_1) = \frac{3}{2} \cdot 5p_1 V_1 + 3p_1 V_1 = 10,5 p_1 V_1
 \end{aligned}$$

$$A = (3p_1 - p_1)(2V_1 - V_1) = 2p_1 V_1.$$

$$\eta = \frac{2p_1 V_1}{10,5 p_1 V_1} \cdot 100\% \approx 19\%.$$

5. Рассмотрите кривошипно-ползунный механизм (1-кривошип, 2- шатун). Впервые их стали применять в античности, на римских пильных мельницах. Там вращение колеса, приводимого в действие силой падающей воды, преобразовывалось в возвратно-поступательное движение полотна пилы. Данный кривошип вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ рад/с}$ . Найти уравнения движения, уравнение траектории и скорость точки М шатуна, если  $OA = AB = 90 \text{ см}$ ,  $MB = (1/3) AB$ .



Решение. Запишем уравнения движения точки М в координатной форме.

$$1. \begin{cases} x = 1,5 \cos 10t, \text{ м} \\ y = 0,3 \sin 10t, \text{ м} \end{cases}$$

$$x_{\max} = 90 \text{ см} + 60 \text{ см} = 150 \text{ см} = 1,5 \text{ м}$$

$$y_{\max} = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}$$

2. Уравнение траектории получим, исключив  $t$  из уравнений движения.

$$\frac{x^2}{1,5^2} + \frac{y^2}{0,3^2} = 1$$

3. Скорость точки определим как

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = x'(t) = -15 \sin 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v_y = y'(t) = 3 \cos 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{225 \sin^2 10t + 9 \cos^2 10t} = 3\sqrt{25 \sin^2 10t + \cos^2 10t}, \text{ м/с.}$$

## ВАРИАНТ 8

1. Дизельное топливо транспортируют по магистральному трубопроводу диаметром 530 мм и толщиной стенки 5 мм с расходом  $720 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Определите скорость перекачки топлива.

Дано:

$$D = 0,53 \text{ м};$$

$$h = 0,005 \text{ м};$$

$$Q = 720 \text{ м}^3/\text{ч} = 0,2 \text{ м}^3/\text{с}.$$

$v$ —?

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{SL}{\Delta t} = Sv = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi}{4} (D - 2h)^2 v$$
$$[v] = \frac{\text{м}^3/\text{с}}{\text{м}^2} = \text{м}/\text{с}.$$

$$v = \frac{4Q}{\pi(D-2h)^2} = \frac{4 \cdot 0,2}{3,14(0,53-2 \cdot 0,005)^2} \approx 0,9 \text{ м}/\text{с}.$$

2. Чтобы сжать недеформированную пружину на 2 см нужно совершить работу 20 Дж. Какую минимальную работу нужно совершить дополнительно, чтобы сжать эту пружину ещё на 1 см?

Дано:

$$A_1 = 20 \text{ Дж};$$

$$x_1 = 0,02 \text{ м};$$

$$\Delta x = 0,01 \text{ м}.$$

$A_2$ —?

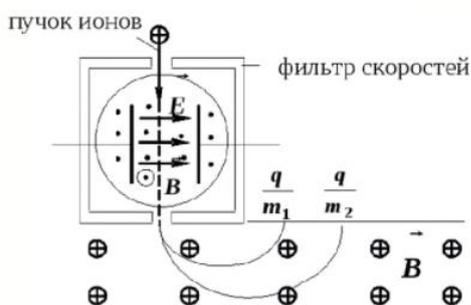
Работа внешней силы равна изменению потенциальной энергии пружины

$$A_2 = W_{p_2} - W_{p_1} = \frac{k(x_1 + \Delta x)^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2};$$

$$A_1 = \frac{kx_1^2}{2}; k = \frac{2A_1}{x_1}$$

$$A_2 = \frac{k}{2} (x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - x_1^2) = \frac{A_1\Delta x}{x_1^2} (2x_1 + \Delta x);$$

$$A_2 = \frac{20 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-4}} = 25 \text{ Дж}.$$



3. Масс-спектрометрия — один из точнейших методов идентификации веществ, используемый практически во всех сферах человеческой деятельности: фармацевтике, медицине, экологии, нефтегазовой промышленности, ядерной энергетике. Это своеобразное «взвешивание» молекул: компоненты ионизируются, затем

определяется отношение массы к заряду ионов. Оказалось, что при разделении ионов со сравнимой массой, например, двух стабильных изотопов углерода ( $^{12}\text{C}$  и  $^{13}\text{C}$ ), возникают трудности. Рассчитайте радиус кривизны, который необходим, чтобы эти частицы отстояли друг от друга на 0,4 мм.



Ионы, пройдя скрещенные электрическое и магнитное поля, после селектора скоростей попадают только в магнитное поле и движутся по дуге окружности.

$$\begin{cases} v = \frac{E}{B} \\ qvB' = \frac{mv^2}{R} \end{cases} \rightarrow m = \frac{qBB'R}{E}. \quad (1)$$

$$x = D_2 - D_1 = 2(R_2 - R_1)$$

Все величины, кроме  $R$ , в формуле (1) определяются параметрами установки, следовательно, для частиц с одинаковым зарядом справедливо

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_2}{m_1} = 13/12 = 1,083$$

$$R_2 - R_1 = \frac{x}{2} = 0,2 \text{ (мм)}$$

$$0,2 + R_1 = 1,083R_1$$

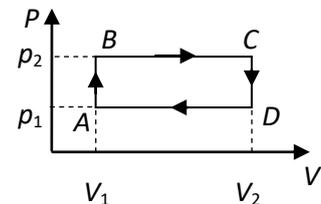
$$R_1 = 2,41 \text{ мм}$$

$$R_2 = 2,61 \text{ мм}$$

4. Цикл теплового двигателя состоит из двух изохор и двух изобар. В качестве рабочего вещества в двигателе используется идеальный одноатомный газ. Отношение давлений на изобарах равно 2, отношение объемов на изохорах равно 3. Найдите КПД такого двигателя.

Дано:  $p_2 = 2p_1$   
 $V_2 = 3V_1$   
 $\eta = ?$

Пусть  $p_1, V_1$  – минимальные значения давления и объема. Изобразим  $PV$ - диаграмму  
 $\eta = \frac{A}{Q} 100\%$ ,  
 $A$  – работа, совершаемая газом за цикл.  
 $Q$  – количество теплоты, подведенное к газу, за цикл



$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$  – работа газа равна площади прямоугольника. Газ получает тепло на участке АВ.

Согласно первому закону термодинамики

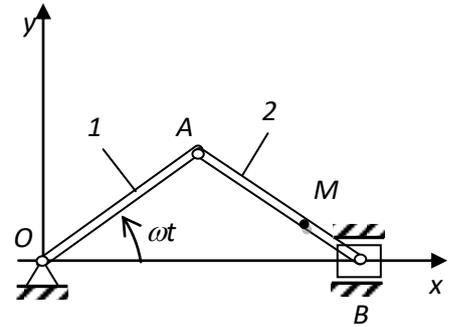
$$Q = (\Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + A_{BC}) = \frac{3}{2}vR(T_B - T_A) + \frac{3}{2}vR(T_C - T_B) + p_2(V_2 - V_1) =$$

$$= \frac{3}{2}(2p_1 3V_1 - p_1 V_1) + 2p_1(3V_1 - V_1) = \frac{3}{2} \cdot 5p_1 V_1 + 4p_1 V_1 = 11,5p_1 V_1$$

$$A = (2p_1 - p_1)(3V_1 - V_1) = 2p_1 V_1.$$

$$\eta = \frac{2p_1 V_1}{11,5 p_1 V_1} \cdot 100\% \approx 17\%.$$

5. Рассмотрите кривошипно-ползунный механизм (1-кривошип, 2-шатун). Впервые их стали применять в античности, на римских пильных мельницах. Там вращение колеса, приводимого в действие силой падающей воды, преобразовывалось в возвратно-поступательное движение полотна пилы. Данный кривошип вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ рад/с}$ . Найти уравнения движения, уравнение траектории и скорость точки М шатуна, если  $OA = AB = 90 \text{ см}$ ,  $AM = (2/3) AB$ .



Решение. Запишем уравнения движения точки М в координатной форме.

$$1. \begin{cases} x = 1,5 \cos 10t, \text{ м} \\ y = 0,3 \sin 10t, \text{ м} \end{cases}$$

$$x_{\max} = 90 \text{ см} + 60 \text{ см} = 150 \text{ см} = 1,5 \text{ м}$$

$$y_{\max} = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}$$

2. Уравнение траектории получим, исключив  $t$  из уравнений движения.

$$\frac{x^2}{1,5^2} + \frac{y^2}{0,3^2} = 1$$

3. Скорость точки определим как

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = x'(t) = -15 \sin 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v_y = y'(t) = 3 \cos 10t, \quad \text{м/с}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{225 \sin^2 10t + 9 \cos^2 10t} = 3\sqrt{25 \sin^2 10t + \cos^2 10t}, \quad \text{м/с.}$$