Решения заданий заключительного тура олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю Естественные науки по предмету Математика в 2020/2021 учебном году

МАТЕМАТИКА
ВАРИАНТ 1

1. Доказать неравенство $\ln n + \sqrt{n^2+1} < n + \sqrt{\ln^2 n + 1}$. (5 баллов)

Решение. Данное неравенство равносильно

$\sqrt{n^2+1} - \sqrt{\ln^2 n + 1} < n - \ln n$, откуда по формуле разности квадратов

$\dfrac{(n^2+1)-(\ln^2 n+1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{\ln^2 n+1}} < n - \ln n$. Приводя подобные, получим:

$\dfrac{n^2-\ln^2 n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{\ln^2 n+1}} < n - \ln n$. Сокращая (с учетом $n > \ln n$)

$\dfrac{n+\ln n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{\ln^2 n+1}} < 1$ и домножая на положительный знаменатель, приходим к неравенству

$n + \ln n < \sqrt{n^2+1} + \sqrt{\ln^2 n + 1}$, которое выполняется для всех $n > 1$, так как

$n < \sqrt{n^2+1}, \quad \ln n < \sqrt{\ln^2 n + 1}$.

Неравенство доказано.

2. Найти количество всех натуральных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей. (8 баллов)

Решение. Наибольшее возможное число, удовлетворяющее условию задачи 9876543210. Кроме того, число должно быть не менее чем двузначным. Все остальные такие числа могут быть получены из 9876543210 вычеркиванием одной, двух, трех, четырех, пяти, шести, семи или восьми цифр из десяти. Тогда общее количество

$$1+C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3+C_{10}^4+C_{10}^5+C_{10}^6+C_{10}^7+C_{10}^8=$$
$$=1+C_{10}^1+(C_{10}^2+C_{10}^3+C_{10}^4)\cdot 2+C_{10}^8=1+10+(45+120+210)\cdot 2+252=1013.$$

Ответ. 1013.

3. Найти сумму первых 10 элементов, встречающихся как среди членов арифметической прогрессии $\{5, 8, 11, 14, \ldots\}$, так и среди членов геометрической прогрессии $\{10, 20, 40, 80, \ldots\}$. (10 баллов)

Решение. Члены арифметической прогрессии $\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \ldots\}$ задаются формулой

$$a_n = 5 + 3n, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Члены геометрической прогрессии $\{10, 20, 40, 80, \ldots\}$ задаются формулой

$$b_n = 10 \cdot 2^k, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Для общих элементов должно выполняться равенство $5 + 3n = 10 \cdot 2^k$, откуда

$$n = \frac{10\cdot 2^k - 5}{3} = \frac{5\cdot(2^{k+1}-1)}{3}, \text{ то есть } (2^{k+1}-1) \vdots 3.$$

Ясно, что $2^{k+1}-1$ кратно 3 при нечетных k (остаток от деления 2^{k+1} на 3 равен 2 или 1).

При $k=1$, $n=5$ общий элемент $a_5 = b_1 = 20$;

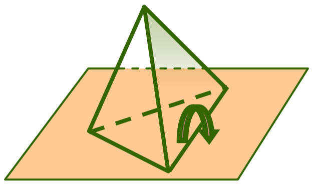
при $k=3$, $n=25$ общий элемент $a_{25} = b_3 = 80$;

при $k=5$, $n=105$ общий элемент $a_{105}=b_5=320$ и т.д.

Таким образом, искомые элементы: 20, 80, 320, … – члены исходной геометрической прогрессии с нечетными номерами. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 4 и первым членом 20. Сумма 10 первых членов может быть найдена по формуле $S=c_1\dfrac{q^n-1}{q-1}=20\cdot\dfrac{4^{10}-1}{4-1}=20\cdot\dfrac{\left(2^{10}\right)^2-1}{3}=20\cdot\dfrac{1024^2-1}{3}=6990500.$

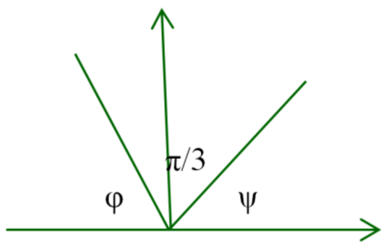
Ответ. 6 990 500.

4. Две смежные грани тетраэдра, представляющие собой правильные треугольники со стороной 1, образуют двугранный угол 60 градусов. Тетраэдр поворачивается вокруг общего ребра этих граней. Найти наибольшую площадь проекции вращающегося тетраэдра на плоскость, содержащую данное ребро. (12 баллов)



Решение. Обозначим площадь каждой из данных граней S.

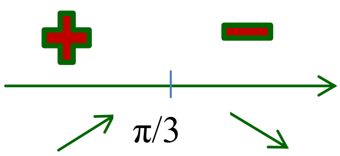
Если грань располагается в плоскости проекции, то проекция тетраэдра равна площади этой грани $\Pi=S$.



При повороте на угол $0<\varphi<30^\circ$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos\varphi<S$.

При повороте на угол $30^\circ<\varphi<90^\circ$ площадь проекции равна

$$\Pi=S\cos\varphi+S\cos\psi=S\cos\varphi+S\cos(\pi-\pi/3-\varphi)=S\cos\varphi+S\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right).$$



$\Pi'=S\left(-\sin\varphi+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\varphi\right)\right)$, $\Pi'=0$ при $\varphi=\pi/3$. Максимум функции в рассматриваемом интервале достигается при $\varphi=\pi/3$

$$\Pi=2S\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=2S\cdot\frac{1}{2}=S$$

При повороте на угол $90^\circ<\varphi<120^\circ$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos(\pi/2-\varphi)=S\sin\varphi<S$.

При $\varphi=2\pi/3$ площадь $\Pi=S$.

Ответ. $\Pi=S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

5. Найти наибольшее значение выражения $(\sin x+\sin 2y+\sin 3z)(\cos x+\cos 2y+\cos 3z)$. (15 баллов)

Решение. Заметим, что для любых a, b и c выполняются неравенства

$$ab\le\frac{a^2+b^2}{2} \qquad (*)$$

(это неравенство равносильно $2ab \le a^2 + b^2$, или $0 \le (a-b)^2$) и

$$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2): \qquad (**)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \le$$

$$\le a^2+b^2+c^2+2\frac{a^2+b^2}{2}+2\frac{a^2+c^2}{2}+2\frac{b^2+c^2}{2} = 3(a^2+b^2+c^2).$$

Тогда

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) \overset{(*)}{\le} \frac{1}{2}\left((\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\right) \overset{(**)}{\le}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(3(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)+3(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\right)=$$

$$\le \frac{3}{2}\left((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)\right)=\frac{9}{2}.$$

При $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{4}$ достигается равенство:

$$(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}.$$

Таким образом, наибольшее значение выражения $\frac{9}{2}=4{,}5$, достигается, например, при $x=2y=3z=\frac{\pi}{4}$, то есть $x=\frac{\pi}{4}$; $y=\frac{\pi}{8}$; $z=\frac{\pi}{12}$.

Ответ. 4,5.

ВАРИАНТ 2

1. Доказать неравенство $n+\sqrt{3^{2n}+2}<3^n+\sqrt{n^2+2}$. (5 баллов)

Решение.
Данное неравенство равносильно
$\sqrt{3^{2n}+2}-\sqrt{n^2+2}<3^n-n$,
откуда по формуле разности квадратов
$\dfrac{3^{2n}+2-n^2-2}{\sqrt{3^{2n}+2}+\sqrt{n^2+2}}<3^n-n$.
Приводя подобные, получим:
$\dfrac{3^{2n}-n^2}{\sqrt{3^{2n}+2}+\sqrt{n^2+2}}<3^n-n$. Сокращая (с учетом $3^n>n$)
$\dfrac{3^n+n}{\sqrt{3^{2n}+2}+\sqrt{n^2+2}}<1$ и домножая на положительный знаменатель, приходим к неравенству
$3^n+n<\sqrt{3^{2n}+2}+\sqrt{n^2+2}$,
которое выполняется для всех $n>1$, так как
$3^n<\sqrt{(3^n)^2+2},\quad n<\sqrt{n^2+2}$.
Неравенство доказано.

2. Найти сумму всех четырехзначных чисел, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1,2,3,4,5, причем каждая цифра встречается не более одного раза. (8 баллов)

Решение. Любая из этих цифр встречается в любом разряде столько раз, сколькими способами можно распределить остальные четыре цифры по оставшимся трем разрядам. Это число $4\cdot3\cdot2=24$. Следовательно, сумма цифр, стоящих в каждом из четырех разрядов, взятая по всем четырехзначным числам, удовлетворяющим условиям задачи, равна $24\cdot(1+2+3+4+5)=24\cdot15=360$, а сумма самих четырехзначных чисел $360\cdot(10^3+10^2+10+1)=360\cdot1111=399960$.

Ответ. 399960.

3. Найти сумму первых 10 элементов, встречающихся как среди членов арифметической прогрессии $\{4,7,10,13,\ldots\}$, так и среди членов геометрической прогрессии $\{10,20,40,80,\ldots\}$. (10 баллов)

Решение. Члены арифметической прогрессии $\{4,7,10,13,16,19,\ldots\}$ задаются формулой

$$a_n=4+3n,\ n=0,1,2,\ldots$$

Члены геометрической прогрессии $\{10,20,40,80,\ldots\}$ задаются формулой

$$b_n=10\cdot2^k,\ k=0,1,2,\ldots$$

Для общих элементов должно выполняться равенство $4+3n=10\cdot2^k$, откуда

$$n=\frac{10\cdot2^k-4}{3}=\frac{2\cdot(5\cdot2^k-2)}{3}, \text{ то есть } (5\cdot2^k-2)\vdots3.$$

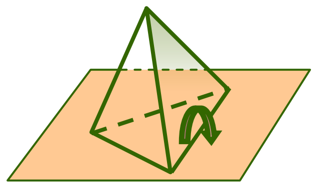
Ясно, что $(5\cdot2^k-2)$ кратно 3 при четных k (остаток от деления 2^k на 3 равен 2 или 1).
При $k=0$, $n=2$ общий элемент $a_2=b_0=10$;
при $k=2$, $n=12$ общий элемент $a_{12}=b_2=40$;

при $k=4$, $n=52$ общий элемент $a_{52}=b_4=160$ и т.д.
Таким образом, искомые элементы: 10, 40, 160, … – члены исходной геометрической прогрессии с четными номерами. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 4 и первым членом 10. Сумма 10 первых членов может быть найдена по формуле

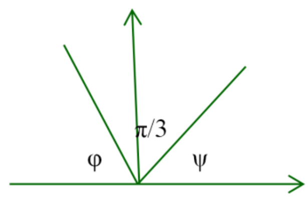
$$S=c_1\frac{q^n-1}{q-1}=10\cdot\frac{4^{10}-1}{4-1}=10\cdot\frac{\left(2^{10}\right)^2-1}{3}=10\cdot\frac{1024^2-1}{3}=3495250.$$

Ответ. 3 495 250.

4. Две смежные грани тетраэдра, представляющие собой равнобедренные прямоугольные треугольники с гипотенузой 2, образуют двугранный угол 60 градусов. Тетраэдр поворачивается вокруг общего ребра этих граней. Найти наибольшую площадь проекции вращающегося тетраэдра на плоскость, содержащую данное ребро. (12 баллов)



Решение. Обозначим площадь каждой из данных граней S. Если грань располагается в плоскости проекции, то проекция тетраэдра равна площади этой грани $\Pi=S$.

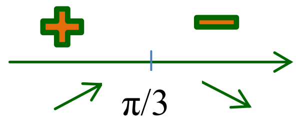


При повороте на угол $0<\varphi<30^\circ$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos\varphi<S$.

При повороте на угол $30^\circ<\varphi<90^\circ$ площадь проекции равна

$$\Pi=S\cos\varphi+S\cos\psi=S\cos\varphi+S\cos(\pi-\pi/3-\varphi)=S\cos\varphi+S\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right).$$

$$\Pi'=S\left(-\sin\varphi+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right)\right),\quad \Pi'=0 \text{ при } \varphi=\pi/3.$$



Максимум функции в рассматриваемом интервале достигается при

$\varphi=\pi/3$, и $\quad \Pi=2S\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=2S\cdot\frac{1}{2}=S$

При повороте на угол $90^\circ<\varphi<120^\circ$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos(\pi/2-\varphi)=S\sin\varphi<S$.

При $\varphi=2\pi/3$ площадь $\Pi=S$.

Ответ. $\Pi=S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}^2=1$.

5. Найти наибольшее значение выражения $(\sin 3x+\sin 2y+\sin z)(\cos 3x+\cos 2y+\cos z)$. (15 баллов)

Решение. Заметим, что для любых a, b и c выполняются неравенства

$$ab\le\frac{a^2+b^2}{2} \qquad (*)$$

(это неравенство равносильно $2ab\le a^2+b^2$, или $0\le(a-b)^2$) и

$$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2):\qquad (**)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \le$$
$$\le a^2+b^2+c^2+2\frac{a^2+b^2}{2}+2\frac{a^2+c^2}{2}+2\frac{b^2+c^2}{2} = 3(a^2+b^2+c^2).$$

Тогда

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) \overset{(*)}{\le} \frac{1}{2}\left((\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\right) \overset{(**)}{\le}$$
$$\le \frac{1}{2}\left(3(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)+3(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\right) =$$
$$\le \frac{3}{2}\left((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)\right) = \frac{9}{2}.$$

При $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ достигается равенство:

$$\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}.$$

Таким образом, наибольшее значение выражения $\dfrac{9}{2}=4{,}5$, достигается, например, при $3x=2y=z=\dfrac{\pi}{4}$, то есть $x=\dfrac{\pi}{12}$; $y=\dfrac{\pi}{8}$; $z=\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ. 4,5

ВАРИАНТ 3
МАТЕМАТИКА

1. Доказать неравенство $\ln n+\sqrt{n^2+3}<n+\sqrt{\ln^2 n+3}$. (5 баллов)

Решение.
Данное неравенство равносильно
$\sqrt{n^2+2}-\sqrt{\ln^2 n+2}<n-\ln n$,
откуда по формуле разности квадратов
$\dfrac{(n^2+2)-(\ln^2 n+2)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{\ln^2 n+2}}<n-\ln n$.
Приводя подобные, получим:
$\dfrac{n^2-\ln^2 n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{\ln^2 n+2}}<n-\ln n$. Сокращая (с учетом $n>\ln n$)
$\dfrac{n+\ln n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{\ln^2 n+2}}<1$ и домножая на положительный знаменатель, приходим к неравенству
$n+\ln n<\sqrt{n^2+2}+\sqrt{\ln^2 n+2}$,
которое выполняется для всех $n>1$, так как
$n<\sqrt{n^2+2}, \quad \ln n<\sqrt{\ln^2 n+2}$.
Неравенство доказано.

2. Найти количество всех натуральных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей. (8 баллов)

Решение. Наибольшее возможное число, удовлетворяющее условию задачи 123456789. Кроме того, число должно быть не менее чем двузначным. Все остальные такие числа могут быть получены из 123456789 вычеркиванием одной, двух, трех, четырех, пяти, шести или семи цифр из девяти. Тогда общее количество

$$1+C_9^1+C_9^2+C_9^3+C_9^4+C_9^5+C_9^6+C_9^7=1+9+(36+84+126)\cdot 2=502.$$

Ответ. 502.

3. Найти сумму первых 10 элементов, встречающихся как среди членов арифметической прогрессии $\{5,8,11,13,\ldots\}$, так и среди членов геометрической прогрессии $\{20,40,80,160,\ldots\}$. (10 баллов)

Решение. Члены арифметической прогрессии $\{5,8,11,14,17,20,23,\ldots\}$ задаются формулой

$$a_n=5+3n,\ n=0,1,2,\ldots$$

Члены геометрической прогрессии $\{20,40,80,160,\ldots\}$ задаются формулой

$$b_n=20\cdot 2^k,\ k=0,1,2,\ldots$$

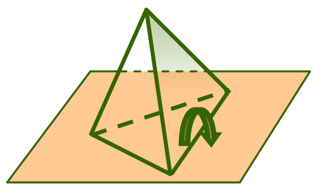
Для общих элементов должно выполняться равенство $5+3n=20\cdot 2^k$, откуда $n=\dfrac{20\cdot 2^k-5}{3}=\dfrac{5\cdot(2^{k+2}-1)}{3}$, то есть $(2^{k+2}-1)\vdots 3$.
Ясно, что $2^{k+2}-1$ кратно 3 при четных k (остаток от деления 2^{k+2} на 3 равен 1 или 2).
При $k=0$, $n=5$ общий элемент $a_5=b_0=20$;

при $k=2$, $n=25$ общий элемент $a_{25}=b_2=80$;
при $k=4$, $n=105$ общий элемент $a_{105}=b_4=320$ и т.д.

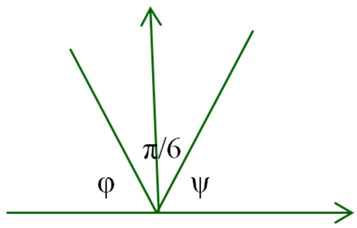
Таким образом, искомые элементы: 20, 80, 320, … – члены исходной геометрической прогрессии с четными номерами. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 4 и первым членом 20. Сумма 10 первых членов может быть найдена по формуле $S=c_1\dfrac{q^n-1}{q-1}=20\cdot\dfrac{4^{10}-1}{4-1}=20\cdot\dfrac{\left(2^{10}\right)^2-1}{3}=20\cdot\dfrac{1024^2-1}{3}=6990500.$

Ответ. 6 990 500.

4. Две смежные грани тетраэдра, представляющие собой правильные треугольники со стороной 3, образуют двугранный угол 30 градусов. Тетраэдр поворачивается вокруг общего ребра этих граней. Найти наибольшую площадь проекции вращающегося тетраэдра на плоскость, содержащую данное ребро. (12 баллов)



Решение. Обозначим площадь каждой из данных граней S.
Если грань располагается в плоскости проекции, то проекция тетраэдра равна площади этой грани $\Pi=S$.

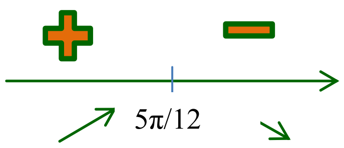


При повороте на угол $0<\varphi<60^\circ$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos\varphi<S$.

При повороте на угол $60^\circ<\varphi<90^\circ$ площадь проекции равна

$$\Pi=S\cos\varphi+S\cos\psi=S\cos\varphi+S\cos(\pi-\pi/6-\varphi)=S\cos\varphi+S\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\varphi\right).$$

$\Pi'=S\left(-\sin\varphi+\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-\varphi\right)\right)$, $\Pi'=0$ при $\varphi=5\pi/12$. Максимум функции в рассматриваемом



интервале достигается при $\varphi=\pi/3$ площадь $\Pi=2S\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)<S$, так как $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)<\cos\left(\dfrac{4\pi}{12}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

При повороте на угол $90^\circ<\varphi<150^\circ$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos(\pi/2-\varphi)=S\sin\varphi<S$.
При $\varphi=5\pi/6$ площадь $\Pi=S$.

Ответ. $\Pi=S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

5. Найти наибольшее значение выражения $(\sin 2x+\sin y+\sin 3z)(\cos 2x+\cos y+\cos 3z)$. (15 баллов)

Решение. Заметим, что для любых a, b и c выполняются неравенства

$$ab\le\frac{a^2+b^2}{2} \qquad (*)$$

(это неравенство равносильно $2ab\le a^2+b^2$, или $0\le(a-b)^2$) и

$$(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2): \qquad (**)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \le$$
$$\le a^2+b^2+c^2+2\frac{a^2+b^2}{2}+2\frac{a^2+c^2}{2}+2\frac{b^2+c^2}{2} = 3(a^2+b^2+c^2).$$

Тогда

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) \overset{(*)}{\le} \frac{1}{2}\Big((\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\Big) \overset{(**)}{\le}$$
$$\le \frac{1}{2}\Big(3(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)+3(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\Big) =$$
$$\le \frac{3}{2}\Big((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)\Big) = \frac{9}{2}.$$

При $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{4}$ достигается равенство:

$$(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}.$$

Таким образом, наибольшее значение выражения $\frac{9}{2}=4{,}5$, достигается, например, при $2x=y=3z=\frac{\pi}{4}$, то есть $x=\frac{\pi}{8}$; $y=\frac{\pi}{4}$; $z=\frac{\pi}{12}$.

Ответ. 4,5

ВАРИАНТ 4
МАТЕМАТИКА

1. Доказать неравенство $n+\sqrt{3^{2n}+3}<3^n+\sqrt{n^2+3}$. (5 баллов)

Решение.
Данное неравенство равносильно
$\sqrt{3^{2n}+3}-\sqrt{n^2+3}<3^n-n$,
откуда по формуле разности квадратов
$\dfrac{3^{2n}+3-n^2-3}{\sqrt{3^{2n}+3}+\sqrt{n^2+3}}<3^n-n$.
Приводя подобные, получим:
$\dfrac{3^{2n}-n^2}{\sqrt{3^{2n}+3}+\sqrt{n^2+3}}<3^n-n$. Сокращая (с учетом $3^n>n$)
$\dfrac{3^n+n}{\sqrt{3^{2n}+3}+\sqrt{n^2+3}}<1$ и домножая на положительный знаменатель, приходим к неравенству
$3^n+n<\sqrt{3^{2n}+3}+\sqrt{n^2+3}$,
которое выполняется для всех $n>1$, так как
$3^n<\sqrt{(3^n)^2+3},\quad n<\sqrt{n^2+3}$.
Неравенство доказано.

2. Найти сумму всех четырехзначных чисел, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1,2,3,4,5, причем каждая цифра встречается не более одного раза. (8 баллов)

Решение. Любая из этих цифр встречается в любом разряде столько раз, сколькими способами можно распределить остальные четыре цифры по оставшимся трем разрядам. Это число $4\cdot3\cdot2=24$. Следовательно, сумма цифр, стоящих в каждом из четырех разрядов, взятая по всем четырехзначным числам, удовлетворяющим условиям задачи, равна $24\cdot(1+2+3+4+5)=24\cdot15=360$, а сумма самих четырехзначных чисел $360\cdot(10^3+10^2+10+1)=360\cdot1111=399960$.

Ответ. 399960.

3. Найти сумму первых 10 элементов, встречающихся как среди членов арифметической прогрессии $\{4,7,10,13,\ldots\}$, так и среди членов геометрической прогрессии $\{20,40,80,160,\ldots\}$. (10 баллов)

Решение. Члены арифметической прогрессии $\{4,7,10,13,16,19,\ldots\}$ задаются формулой

$$a_n=4+3n,\ n=0,1,2,\ldots$$

Члены геометрической прогрессии $\{20,40,80,\ldots\}$ задаются формулой

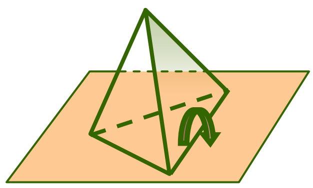
$$b_n=20\cdot2^k,\ k=0,1,2,\ldots$$

Для общих элементов должно выполняться равенство $4+3n=20\cdot2^k$, откуда $n=\dfrac{20\cdot2^k-4}{3}=\dfrac{4\cdot(5\cdot2^k-1)}{3}$, то есть $(5\cdot2^k-1)\vdots3$.
Ясно, что $5\cdot2^k-1$ кратно 3 при нечетных k (остаток от деления 2^k на 3 равен 2 или 1).
При $k=1$, $n=12$ общий элемент $a_{12}=b_1=40$;

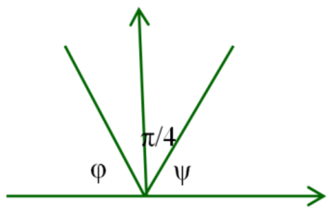
при $k=3$, $n=52$ общий элемент $a_{52}=b_3=160$;
при $k=5$, $n=212$ общий элемент $a_{212}=b_5=640$ и т.д.
Таким образом, искомые элементы: 40, 160, 640, … – члены исходной геометрической прогрессии с нечетными номерами. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 4 и первым членом 40. Сумма 10 первых членов может быть найдена по формуле $S=c_1\dfrac{q^n-1}{q-1}=40\cdot\dfrac{4^{10}-1}{4-1}=40\cdot\dfrac{\left(2^{10}\right)^2-1}{3}=40\cdot\dfrac{1024^2-1}{3}=13981000.$

Ответ. 13 981 000.

4. Две смежные грани тетраэдра, представляющие собой правильные треугольники со стороной 1, образуют двугранный угол 45 градусов. Тетраэдр поворачивается вокруг общего ребра этих граней. Найти наибольшую площадь проекции вращающегося тетраэдра на плоскость, содержащую данное ребро. (12 баллов)



Решение. Обозначим площадь каждой из данных граней S.
Если грань располагается в плоскости проекции, то проекция тетраэдра равна площади этой грани $\Pi=S$.

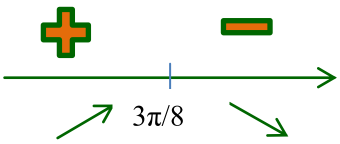


При повороте на угол $0<\varphi<45^\circ$ площадь проекции равна
$\Pi=S\cos\varphi<S$.

При повороте на угол $45^\circ<\varphi<90^\circ$ площадь проекции равна

$$\Pi=S\cos\varphi+S\cos\psi=S\cos\varphi+S\cos(\pi-\pi/4-\varphi)=S\cos\varphi+S\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\varphi\right).$$

$\Pi'=S\left(-\sin\varphi+\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\varphi\right)\right)$, $\Pi'=0$ при $\varphi=3\pi/8$. Максимум функции в рассматриваемом



интервале достигается при $\varphi=3\pi/8$, и $\Pi=2S\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)<S$, так как $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)<\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

При повороте на угол $90^\circ<\varphi<135^\circ$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos(\pi/2-\varphi)=S\sin\varphi<S$.
При $\varphi=3\pi/4$ площадь $\Pi=S$.

Ответ. $\Pi=S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

5. Найти наибольшее значение выражения $(\sin 2x+\sin 3y+\sin 4z)(\cos 2x+\cos 3y+\cos 4z)$. (15 баллов)

Решение. Заметим, что для любых a, b и c выполняются неравенства

$$ab\le\frac{a^2+b^2}{2} \qquad (*)$$

(это неравенство равносильно $2ab\le a^2+b^2$, или $0\le(a-b)^2$) и

$$(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2): \qquad (**)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \le$$

$$\le a^2+b^2+c^2+2\frac{a^2+b^2}{2}+2\frac{a^2+c^2}{2}+2\frac{b^2+c^2}{2} = 3(a^2+b^2+c^2).$$

Тогда

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) \overset{(*)}{\le} \frac{1}{2}\left((\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\right) \overset{(**)}{\le}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(3(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)+3(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\right) =$$

$$\le \frac{3}{2}\left((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)\right) = \frac{9}{2}.$$

При $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{4}$ достигается равенство:

$$(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}.$$

Таким образом, наибольшее значение выражения $\frac{9}{2}=4{,}5$, достигается, например, при $2x=3y=4z=\frac{\pi}{4}$, то есть $x=\frac{\pi}{8}$; $y=\frac{\pi}{12}$; $z=\frac{\pi}{16}$.

Ответ. 4,5.

ВАРИАНТ 5

1. Решить уравнение $\left(\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^3+\left(\sin^2 y+\dfrac{1}{\sin^2 y}\right)^3=16\cos z$ (5 баллов)

Решение. Область определения неравенства ограничивается условиями $\sin x\neq 0,\ \sin y\neq 0$.

Заметим, что $u+\dfrac{1}{u}\geq 2$ для любых положительных u, так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2+1}{u}\geq 2 \quad\Leftrightarrow\quad u^2+1\geq 2u \quad\Leftrightarrow\quad u^2+1-2u\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (u-1)^2\geq 0 \quad,$$

причем равенство достигается при $u=1$.

Таким образом, наименьшее значение левой части уравнения $2^3+2^3=16$.

Правая часть уравнения не больше 16, следовательно, равенство возможно только при условии, что и левая, и правая части уравнения равны 16. Это означает, что $\sin^2 x=\sin^2 y=\cos z=1$, то есть $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ z=2\pi m$, где $n, k, m\in Z$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ z=2\pi m$, где $n, k, m\in Z$.

2. Девятизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 18 и B > 222222222. Найти наибольшее и наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих этим условиям. (Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, отличных от единицы). (8 баллов)

Решение. Очевидно, что последняя цифра числа B не может быть нулем, так как при перестановке она становится первой цифрой числа A. $18=2\cdot 3^2$, поэтому число B будет взаимно простым с 18 в том и только том случае, если оно не делится ни на 2, ни на 3.

Если b – последняя цифра числа B, то число A выражается через B с помощью формулы

$$A = 10^8\cdot b + 1/10\cdot(B-b) \text{ (ясно, что } B-b \text{ делится на 10).}$$

Очевидно, что чем больше последняя цифра числа B, тем большее число A ему соответствует. Для того, чтобы A было наибольшим, необходимо, чтобы последняя цифра числа B принимала наибольшее возможное значение, т.е. b = 9.

Если B' и B оканчиваются на 9 и $B' > B$, то

$$A' = 9\cdot 10^8 + 1/10\cdot(B'-9) > 9\cdot 10^8 + 1/10\cdot(B-9) = A.$$

Значит, чем больше число B, тем большее число A ему соответствует (для чисел B, оканчивающихся девяткой).

Наибольшее возможное девятизначное число равно 999999999. Это число не делится на 2, но делится на 3. Уменьшим предпоследнюю цифру на 1 и получим B = 999999989. Это число удовлетворяет всем условиям: оканчивается на 9, взаимно просто с 18 и является наибольшим среди всех таких чисел. Следовательно, ему соответствует наибольшее возможное число $A_{\max}$ = 999999998.

Аналогично определяется наименьшее число: первая цифра A (т.е. последняя цифра B) должна быть наименьшей возможной, поэтому b = 1. Среди чисел B, оканчивающихся единицей, наименьшее A соответствует наименьшему B. Если последняя цифра − единица, то самое маленькое число, удовлетворяющее неравенству B> 222222222, − это 222222231. Но сумма цифр такого числа равна 18 и оно делится на 3. Изменяя предпоследнюю цифру на 1, получим число B = 222222241, которое удовлетворяет всем условиям: оканчивается единицей, взаимно просто с 18 и является наименьшим среди всех таких чисел. Ему соответствует наименьшее возможное число $A_{\min}$ = 122222224.

Ответ. $A_{\min}$ = 122222224, $A_{\max}$ = 999999998.

3. Решить неравенство $2021x \le 2022\cdot\sqrt[2022]{x^{2021}}-1$. (10 баллов)

Решение. $x \ge 0$. Преобразуем неравенство к виду:

$\dfrac{2021x+1}{2022} \le \sqrt[2022]{x^{2021}}$, откуда

$\dfrac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2021\ экземпляр)}+1}{2022} \le \sqrt[2022]{x^{2021}}$.

Но по соотношению для среднего арифметического и среднего геометрического

$\dfrac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2021\ экземпляр)}+1}{2022} \ge \sqrt[2022]{\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{(2021\ экземпляр)}\cdot 1} = \sqrt[2022]{x^{2021}}$, следовательно, единственным решением неравенства является $x=1$.

Ответ. $x=1$.

4. Построить график функции $y = x^3 + \dfrac{x^3}{1+x^3} + \dfrac{x^3}{(1+x^3)^2} + \dfrac{x^3}{(1+x^3)^3} + \ldots + \dfrac{x^3}{(1+x^3)^n} + \ldots$.

(12 баллов)

Решение. Функция определена при $x \ne -1$.

при $x=0$ $y=0$.

Для остальных значений x преобразуем данное в условии выражение:

$$y = x^3 + \frac{x^3}{1+x^3} + \frac{x^3}{(1+x^3)^2} + \frac{x^3}{(1+x^3)^3} + \ldots + \frac{x^3}{(1+x^3)^n} + \ldots =$$

$$= x^3\left(1 + \frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{(1+x^3)^2} + \frac{1}{(1+x^3)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+x^3)^n} + \ldots\right) =$$

по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{1+x^3}$,

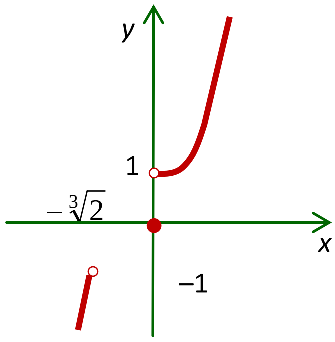
сходящейся при $|q| = \left|\dfrac{1}{1+x^3}\right| < 1$

$$= x^3\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+x^3}}\right) = \frac{x^3(1+x^3)}{1+x^3-1} = 1+x^3.$$

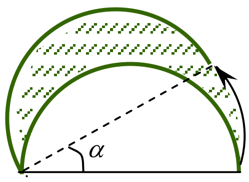
График этой функции – кубическая парабола, сдвинутая на 1 вверх. Для определения промежутка, на котором это преобразование имеет место, решим неравенство $\left|\frac{1}{1+x^3}\right|<1$. Оно равносильно $1<|1+x^3|$, или $\left[\begin{array}{l}1+x^3>1;\\1+x^3<-1\end{array}\right.$, то есть $\left[\begin{array}{l}x^3>0;\\x^3<-2,\end{array}\right.$ откуда следует $\left[\begin{array}{l}x>0;\\x<-\sqrt[3]{2}.\end{array}\right.$

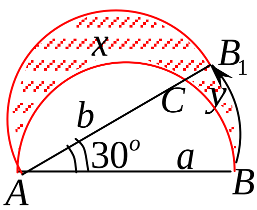
Окончательно:

$$y=\begin{cases}1+x^3, & x<-\sqrt[3]{2};\\0, & x=0;\\1+x^3, & x>0.\end{cases}$$



5. Найти площадь заштрихованной фигуры, описываемой полуокружностью, вращаемой относительно одного из концов на угол $\alpha=30^o$. (15 баллов)





Решение. Пусть площадь полукруга $S_0=\frac{\pi R^2}{2}$, площадь луночки $AB_1C=x$, луночки $CB_1B=y$ и сектора $ACB=a$. Тогда, если площадь сегмента AC равна b, то имеем: $x+b=S_0=b+a\Rightarrow x=a$.

Вся заштрихованная площадь равна $x+y=a+y$, но $a+y$ - это площадь кругового сектора ABB_1 радиуса $2R$. Таким образом, площадь $ABB_1=\frac{1}{2}(2R)^2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi R^2}{3}$.

Ответ. $\frac{\pi R^2}{3}$.

ВАРИАНТ 6

1. Решить уравнение $\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^3+\left(\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}\right)^3=16\sin^2 z$. (5 баллов)

Решение. Область определения неравенства ограничивается условиями $\sin x\neq 0,\ \cos y\neq 0$.

Заметим, что $u+\frac{1}{u}\geq 2$ для любых положительных u, так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2+1}{u}\geq 2 \quad\Leftrightarrow\quad u^2+1\geq 2u \quad\Leftrightarrow\quad u^2+1-2u\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (u-1)^2\geq 0 \quad,$$

причем равенство достигается при $u=1$.

Таким образом, наименьшее значение левой части уравнения $2^3+2^3=16$.

Правая часть уравнения не больше 16, следовательно, равенство возможно только при условии, что и левая, и правая части уравнения равны 16. Это означает, что $\sin^2 x=\cos^2 y=\sin^2 z=1$, то есть $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ y=\pi m,\ z=\frac{\pi}{2}+\pi k,$, где $n,k,m\in Z$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ y=\pi m,\ z=\frac{\pi}{2}+\pi k,$, где $n,k,m\in Z$.

2. Восьмизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 12 и B > 44444444. Найти наибольшее и наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих этим условиям. (Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, отличных от единицы). (8 баллов)

Решение. Очевидно, что последняя цифра числа B не может быть нулем, так как при перестановке она становится первой цифрой числа A. $B=2^2\cdot 3$, поэтому число B будет взаимно простым с 12 в том и только том случае, если оно не делится ни на 2, ни на 3.

Если b – последняя цифра числа B, то число $A = 10^7\cdot b + 1/10\cdot(B-b)$ (ясно, что $B - b$ делится на 10).

Очевидно, что чем больше последняя цифра числа B, тем большее число A ему соответствует. Для того, чтобы A было наибольшим, необходимо, чтобы последняя цифра числа B принимала наибольшее возможное значение, т.е. b = 9.

Если B' и B оканчиваются на 9 и $B' > B$, то

$$A' = 9\cdot 10^7+ 1/10\cdot(B'-9) > 9\cdot 10^7+ 1/10\cdot(B-9) = A.$$

Значит, чем больше число B, тем большее число A ему соответствует (для чисел B, оканчивающихся девяткой).

Наибольшее возможное значение B равно 99999999. Это число не делится на 2, но делится на 3. Уменьшим предпоследнюю цифру на 1 и получим B = 999999989. Это число удовлетворяет всем условиям: оканчивается на 9, взаимно просто с 12 и является наибольшим среди всех таких чисел. Следовательно, ему соответствует наибольшее возможное число A_{max} = 999999998.

Аналогично определяется наименьшее число: первая цифра A (т.е. последняя цифра B) должна быть наименьшей возможной, поэтому b = 1. Среди чисел B, оканчивающихся единицей, наименьшее A соответствует наименьшему B. Если последняя цифра − единица, то самое маленькое число, которое удовлетворяет неравенству B> 44444444, − это 44444451. Но оно делится на 3, так как сумма цифр равна 30. Изменяя предпоследнюю цифру на 1, получим число B = 44444461, которое удовлетворяет всем условиям: оканчивается единицей, взаимно просто с 12 и является наименьшим среди всех таких чисел. Ему соответствует наименьшее возможное число A_{min} = 14444446.

Ответ. $A_{\min} = 14444446$, $A_{\max} = 99999998$

3. Решить неравенство $2021\cdot\sqrt[2021]{x^{2020}}-1\geq 2020x$ для $x\geq 0$. (10 баллов)

Решение. Преобразуем неравенство к виду:

$\dfrac{2020x+1}{2021}\leq\sqrt[2021]{x^{2020}}$, откуда

$\dfrac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2020\ \text{экземпляров})}+1}{2021}\leq\sqrt[2021]{x^{2020}}$.

Но по соотношению для среднего арифметического и среднего геометрического $\dfrac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2020\ \text{экземпляров})}+1}{2021}\geq\sqrt[2021]{\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{(2020\ \text{экземпляров})}\cdot 1}=\sqrt[2021]{x^{2020}}$, следовательно, единственным решением неравенства является $x=1$.

Ответ. $x=1$.

4. Построить график функции $y=\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^3}+\ldots+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^n}+\ldots$.

(12 баллов)

Решение. Функция определена при $x\neq -1$.

при $x=0$ $y=0$.

Для остальных значений x преобразуем данное в условии выражение:

$$y=\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}+\frac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^3}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^n}+\ldots=$$

$$=\sqrt[3]{x}\left(1+\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})^2}+\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})^3}+\ldots+\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})^n}+\ldots\right)=$$

по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$,

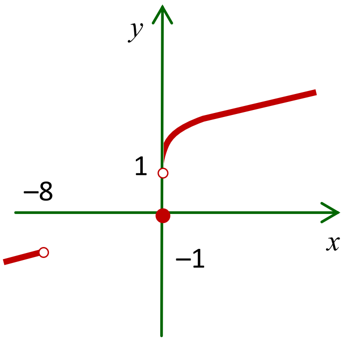
сходящейся при $|q|=\left|\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\right|<1$,

$$=\sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}}}\right)=\frac{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x})}{1+\sqrt[3]{x}-1}=1+\sqrt[3]{x}\ .$$

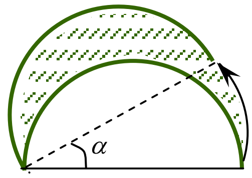
Для определения промежутка, на котором это преобразование имеет место решим неравенство $\left|\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\right|<1$. Оно равносильно $1<|1+\sqrt[3]{x}\,|$, или $\left[\begin{array}{l}1+\sqrt[3]{x}>1;\\ 1+\sqrt[3]{x}<-1\end{array}\right.$, то есть $\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}>0;\\ \sqrt[3]{x}<-2,\end{array}\right.$ откуда следует $\left[\begin{array}{l}x>0;\\ x<-8.\end{array}\right.$

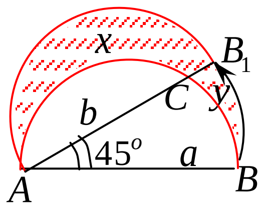
Окончательно:

$$y=\begin{cases}1+\sqrt[3]{x}, & x<-8;\\ 0, & x=0;\\ 1+\sqrt[3]{x}, & x>0.\end{cases}$$



5. Найти площадь заштрихованной фигуры, описываемой полуокружностью, вращаемой относительно одного из концов на угол $\alpha=45^o$. (15 баллов)





Решение. Пусть площадь полукруга $S_0=\frac{\pi R^2}{2}$, площадь луночки $AB_1C=x$, луночки $CB_1B=y$ и сектора $ACB=a$. Тогда, если площадь сегмента AC равна b, то имеем: $x+b=S_0=b+a\Rightarrow x=a$.

Вся заштрихованная площадь равна $x+y=a+y$, но $a+y$ - это площадь кругового сектора ABB_1 радиуса $2R$. Таким образом, площадь $ABB_1=\frac{1}{2}(2R)^2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi R^2}{2}$.

Ответ. $\frac{\pi R^2}{2}$.

.

ВАРИАНТ 7

1. Решить уравнение $\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^3+\left(\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}\right)^3=16\cos z$. (5 баллов)

Решение. Область определения неравенства ограничивается условиями $\sin x \neq 0,\ \cos y \neq 0$. Заметим, что $u+\frac{1}{u}\geq 2$ для любых положительных u, так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2+1}{u}\geq 2 \quad\Leftrightarrow\quad u^2+1\geq 2u \quad\Leftrightarrow\quad u^2+1-2u\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (u-1)^2\geq 0 \quad,$$

причем равенство достигается при $u=1$.

Таким образом, наименьшее значение левой части уравнения $2^3+2^3=16$.

Правая часть уравнения не больше 16, следовательно, равенство возможно только при условии, что и левая, и правая части уравнения равны 16. Это означает, что $\sin^2 x=\cos^2 y=\cos z=1$, то есть $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ y=\pi k,\ \ z=2\pi m$, где $n, k, m\in Z$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ y=\pi k,\ \ z=2\pi m$, где $n, k, m\in Z$.

2. Девятизначное натуральное число *A*, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа *B* перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число *B* взаимно просто с числом 24 и *B* > 666666666. Найти наибольшее и наименьшее из чисел *A*, удовлетворяющих этим условиям. (Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, отличных от единицы). (8 баллов)

Решение. Очевидно, что последняя цифра числа *B* не может быть нулем, так как при перестановке она становится первой цифрой числа *A*. $24=2^3\cdot 3$, поэтому число *B* будет взаимно простым с 24 в том и только том случае, если оно не делится ни на 2, ни на 3.

Если *b* – последняя цифра числа *B*, то число *A* выражается через *B* с помощью формулы

$$A = 10^8\cdot b + 1/10\cdot(B-b) \text{ (ясно, что } B - b \text{ делится на 10).}$$

Очевидно, что чем больше последняя цифра числа *B*, тем большее число *A* ему соответствует. Для того, чтобы *A* было наибольшим, необходимо, чтобы последняя цифра числа *B* принимала наибольшее возможное значение, т.е. *b* = 9.

Если B' и *B* оканчиваются на 9 и $B' > B$, то

$$A' = 9\cdot 10^8 + 1/10\cdot(B'-9) > 9\cdot 10^8 + 1/10\cdot(B-9) = A.$$

Значит, чем больше число *B*, тем большее число *A* ему соответствует (для чисел *B*, оканчивающихся девяткой).

Наибольшее возможное девятизначное число равно 999999999. Это число не делится на 2, но делится на 3. Уменьшим предпоследнюю цифру на 1 и получим *B* = 999999989. Это число удовлетворяет всем условиям: оканчивается на 9, взаимно просто с 24 и является наибольшим среди всех таких чисел. Следовательно, ему соответствует наибольшее возможное число $A_{\max}$ = 999999998.

Аналогично определяется наименьшее число: первая цифра *A* (т.е. последняя цифра *B*) должна быть наименьшей возможной, поэтому *b* = 1. Среди чисел *B*, оканчивающихся единицей, наименьшее *A* соответствует наименьшему *B*. Если последняя цифра − единица, то самое маленькое число, удовлетворяющее неравенству $B > 666666666$, − это 666666671. Оно удовлетворяет всем условиям: оканчивается единицей, взаимно просто с 24 и является наименьшим среди всех таких чисел. Ему соответствует наименьшее возможное число $A_{\min}$ = 166666667.

Ответ. $A_{\min} = 166666667$, $A_{\max} = 999999998$

3. Решить уравнение $2021x = 2022\cdot\sqrt[2022]{x^{2021}} - 1$. (10 баллов)

Решение. $x \ge 0$. Преобразуем уравнение к виду:

$$\frac{2021x+1}{2022} = \sqrt[2022]{x^{2021}}, \text{ откуда}$$

$$\frac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2021\ \textit{экземпляр})}+1}{2022} = \sqrt[2022]{x^{2021}}.$$

Но по соотношению для среднего арифметического и среднего геометрического

$$\frac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2021\ \textit{экземпляр})}+1}{2022} \ge \sqrt[2022]{\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{(2021\ \textit{экземпляр})}\cdot 1} = \sqrt[2022]{x^{2021}},$$ следовательно, единственным решением неравенства является $x=1$.

Ответ. $x=1$.

4. Построить график функции $y=\sqrt[5]{x}+\dfrac{\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}+\dfrac{\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^2}+\dfrac{\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^3}+\ldots+\dfrac{\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^n}+\ldots$.

(12 баллов)

Решение. Функция определена при $x \ne -1$.

при $x=0$ $y=0$.

Для остальных значений x преобразуем данное в условии выражение:

$$y=\sqrt[5]{x}+\frac{\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}+\frac{\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^2}+\frac{\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^3}+\ldots+\frac{\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^n}+\ldots=$$

$$=\sqrt[5]{x}\left(1+\frac{1}{1+\sqrt[5]{x}}+\frac{1}{(1+\sqrt[5]{x})^2}+\frac{1}{(1+\sqrt[5]{x})^3}+\ldots+\frac{1}{(1+\sqrt[5]{x})^n}+\ldots\right)=$$

по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{1}{1+\sqrt[5]{x}}$,

сходящейся при $|q|=\left|\dfrac{1}{1+\sqrt[5]{x}}\right|<1$,

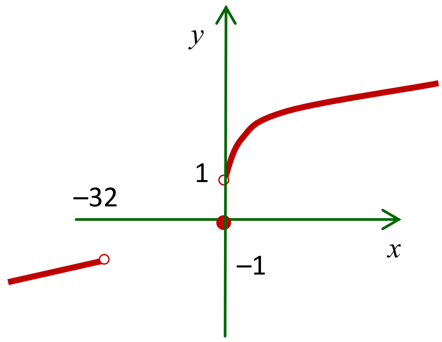
$$=\sqrt[5]{x}\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\sqrt[5]{x}}}\right)=\frac{\sqrt[5]{x}(1+\sqrt[5]{x})}{1+\sqrt[5]{x}-1}=1+\sqrt[5]{x}.$$

Для определения промежутка, на котором это преобразование имеет место, решим неравенство $\left|\dfrac{1}{1+\sqrt[5]{x}}\right|<1$. Оно равносильно $1<|1+\sqrt[5]{x}|$, или

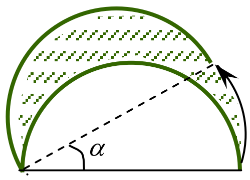
$\left[\begin{array}{l}1+\sqrt[5]{x}>1;\\ 1+\sqrt[5]{x}<-1\end{array}\right.$, то есть $\left[\begin{array}{l}\sqrt[5]{x}>0;\\ \sqrt[5]{x}<-2,\end{array}\right.$ откуда следует $\left[\begin{array}{l}x>0;\\ x<-32.\end{array}\right.$

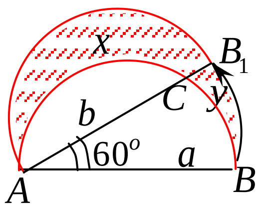
Окончательно:

$$y=\begin{cases}1+\sqrt[5]{x}, & x<-32;\\ 0, & x=0;\\ 1+\sqrt[5]{x}, & x>0.\end{cases}$$



5. Найти площадь заштрихованной фигуры, описываемой полуокружностью, вращаемой относительно одного из концов на угол $\alpha=60^o$. (15 баллов)





Решение. Пусть площадь полукруга $S_0=\dfrac{\pi R^2}{2}$, площадь луночки $AB_1C=x$, луночки $CB_1B=y$ и сектора $ACB=a$. Тогда, если площадь сегмента AC равна b, то имеем: $x+b=S_0=b+a\Rightarrow x=a$.

Вся заштрихованная площадь равна $x+y=a+y$, но $a+y$ - это площадь кругового сектора ABB_1 радиуса $2R$. Таким образом, площадь $ABB_1=\dfrac{1}{2}(2R)^2\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi R^2}{3}$.

Ответ. $\dfrac{2\pi R^2}{3}$.

ВАРИАНТ 8

1. Решить уравнение $\left(\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^3+\left(\cos^2 y+\dfrac{1}{\cos^2 y}\right)^3=16\sin z$. (5 баллов)

Решение. Область определения неравенства ограничивается условиями $\cos x\neq 0,\ \cos y\neq 0$.

Заметим, что $u+\dfrac{1}{u}\geq 2$ для любых положительных u, так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2+1}{u}\geq 2 \quad\Leftrightarrow\quad u^2+1\geq 2u \quad\Leftrightarrow\quad u^2+1-2u\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (u-1)^2\geq 0 \quad ,$$

причем равенство достигается при $u=1$.

Таким образом, наименьшее значение левой части уравнения $2^3+2^3=16$.

Правая часть уравнения не больше 16, следовательно, равенство возможно только при условии, что и левая, и правая части уравнения равны 16. Это означает, что $\cos^2 x=\cos^2 y=\sin z=1$, то есть $x=\pi n,\ \ y=\pi k,\ \ z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m$, где $n, k, m\in Z$.

Ответ. $x=\pi n,\ \ y=\pi k,\ \ z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m$, где $n, k, m\in Z$.

2. Восьмизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 36 и B > 77777777. Найти наибольшее и наименьшее из чисел A, удовлетворяющих этим условиям. (Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, отличных от единицы). (8 баллов)

Решение. Очевидно, что последняя цифра числа B не может быть нулем, так как при перестановке она становится первой цифрой числа A. В разложении 36 на простые множители присутствуют только числа 2 и 3, поэтому число B будет взаимно простым с 36 в том и только том случае, если оно не делится ни на 2, ни на 3.

Если b – последняя цифра числа B, то число $A = 10^7\cdot b + 1/10\cdot(B-b)$ (ясно, что $B - b$ делится на 10).

Очевидно, что чем больше последняя цифра числа B, тем большее число A ему соответствует. Для того чтобы A было наибольшим, необходимо, чтобы последняя цифра числа B принимала наибольшее возможное значение, т.е. $b = 9$.

Если B' и B оканчиваются на 9 и $B' > B$, то

$$A' = b'\cdot 10^7 + 1/10\cdot(B' - b') > b'\cdot 10^7 \geq (b+1)\cdot 10^7 =$$
$$= b\cdot 10^7 + 10^7 > b\cdot 10^7 + 1/10\cdot(B - b) = A.$$

Значит, чем больше число B, тем большее число A ему соответствует (для чисел B, оканчивающихся девяткой).

Наибольшее возможное значение B равно 99999999. Это число не делится на 2, но делится на 3. Уменьшим предпоследнюю цифру на 1 и получим B = 999999989. Это число удовлетворяет всем условиям: оканчивается на 9, взаимно просто с 36 и является наибольшим среди всех таких чисел. Следовательно, ему соответствует наибольшее возможное число A_{max} = 999999998.

Аналогично определяется наименьшее число: первая цифра A (т.е. последняя цифра B) должна быть наименьшей возможной, поэтому b = 1. Среди чисел B, оканчивающихся единицей, наименьшее A соответствует наименьшему B. Если последняя цифра − единица, то самое маленькое число, которое удовлетворяет неравенству B > 77777777, − это 77777781. Но оно делится на 3, так как сумма цифр равна 51. Изменяя предпоследнюю цифру на 1, получим число B = 77777791, которое удовлетворяет всем условиям: оканчивается единицей, взаимно просто с 36 и является наименьшим среди всех таких чисел. Ему соответствует наименьшее возможное число $A_{\min} = 17777779$.

Ответ. $A_{\min} = 17777779$, $A_{\max} = 99999998$

3. Решить уравнение $2021\cdot\sqrt[2021]{x^{2020}}-1=2020x$ для $x\geq 0$. (10 баллов)

Решение. Преобразуем уравнение к виду:

$\dfrac{2020x+1}{2021}=\sqrt[2021]{x^{2020}}$, откуда

$\dfrac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2020\ экземпляров)}+1}{2021}=\sqrt[2021]{x^{2020}}$.

Но по соотношению для среднего арифметического и среднего геометрического

$\dfrac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2020\ экземпляров)}+1}{2021}\geq\sqrt[2021]{\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{(2020\ экземпляров)}\cdot 1}=\sqrt[2021]{x^{2020}}$, следовательно, единственным решением уравнения является $x=1$.

Ответ. $x=1$.

4. Построить график функции $y=x^5+\dfrac{x^5}{1+x^5}+\dfrac{x^5}{(1+x^5)^2}+\dfrac{x^5}{(1+x^5)^3}+\ldots+\dfrac{x^5}{(1+x^5)^n}+\ldots$.

(12 баллов)

Решение. Функция определена при $x\neq -1$.

при $x=0$ $y=0$.

Для остальных значений x преобразуем данное в условии выражение:

$$y=x^5+\frac{x^5}{1+x^5}+\frac{x^5}{(1+x^5)^2}+\frac{x^5}{(1+x^5)^3}+\ldots+\frac{x^5}{(1+x^5)^n}+\ldots=$$

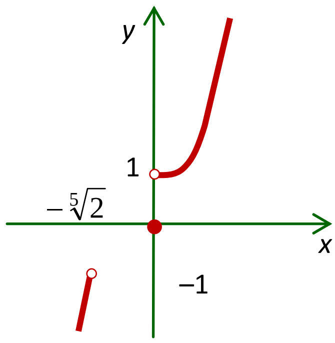
$$=x^5\left(1+\frac{1}{1+x^5}+\frac{1}{(1+x^5)^2}+\frac{1}{(1+x^5)^3}+\ldots+\frac{1}{(1+x^5)^n}+\ldots\right)=$$

по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{1}{1+x^5}$,

сходящейся при $|q|=\left|\dfrac{1}{1+x^5}\right|<1$,

$$=x^5\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^5}}\right)=\frac{x^5(1+x^5)}{1+x^5-1}=1+x^5.$$

Для определения промежутка, на котором это преобразование имеет место решим неравенство $\left|\dfrac{1}{1+x^5}\right|<1$. Оно равносильно $1<|1+x^5|$, или

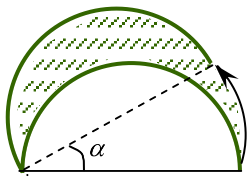


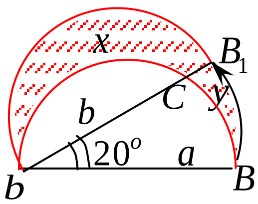
$\left[\begin{array}{l}1+x^5>1; \\ 1+x^5<-1\end{array}\right.$, то есть $\left[\begin{array}{l}x^5>0; \\ x^5<-2,\end{array}\right.$ откуда следует $\left[\begin{array}{l}x>0; \\ x<-\sqrt[5]{2}.\end{array}\right.$

Окончательно:

$$y=\begin{cases}1+x^5, & x<-\sqrt[5]{2}; \\ 0, & x=0; \\ 1+x^5, & x>0.\end{cases}$$

5. Найти площадь заштрихованной фигуры, описываемой полуокружностью, вращаемой относительно одного из концов на угол $\alpha=20^o$. (15 баллов)





Решение. Пусть площадь полукруга $S_0=\frac{\pi R^2}{2}$, площадь луночки $AB_1C=x$, луночки $CB_1B=y$ и сектора $ACB=a$. Тогда, если площадь сегмента AC равна b, то имеем: $x+b=S_0=b+a\Rightarrow x=a$.

Вся заштрихованная площадь равна $x+y=a+y$, но $a+y$ - это площадь кругового сектора ABB_1 радиуса $2R$. Таким образом, площадь $ABB_1=\frac{1}{2}(2R)^2\frac{\pi}{9}=\frac{2\pi R^2}{9}$.

Ответ. $\frac{2\pi R^2}{9}$.

Решения заданий заключительного тура олимпиады школьников «Гранит науки» по профилю Естественные науки по предмету Математика в 2020/2021 учебном году

МАТЕМАТИКА
ВАРИАНТ 1

1. Доказать неравенство $\ln n+\sqrt{n^2+1}<n+\sqrt{\ln^2 n+1}$. (5 баллов)

Решение. Данное неравенство равносильно

$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{\ln^2 n+1}<n-\ln n$, откуда по формуле разности квадратов

$\dfrac{(n^2+1)-(\ln^2 n+1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{\ln^2 n+1}}<n-\ln n$. Приводя подобные, получим:

$\dfrac{n^2-\ln^2 n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{\ln^2 n+1}}<n-\ln n$. Сокращая (с учетом $n>\ln n$)

$\dfrac{n+\ln n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{\ln^2 n+1}}<1$ и домножая на положительный знаменатель, приходим к неравенству

$n+\ln n<\sqrt{n^2+1}+\sqrt{\ln^2 n+1}$, которое выполняется для всех $n>1$, так как

$n<\sqrt{n^2+1},\quad \ln n<\sqrt{\ln^2 n+1}$.

Неравенство доказано.

2. Найти количество всех натуральных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей. (8 баллов)

Решение. Наибольшее возможное число, удовлетворяющее условию задачи 9876543210. Кроме того, число должно быть не менее чем двузначным. Все остальные такие числа могут быть получены из 9876543210 вычеркиванием одной, двух, трех, четырех, пяти, шести, семи или восьми цифр из десяти. Тогда общее количество

$$1+C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3+C_{10}^4+C_{10}^5+C_{10}^6+C_{10}^7+C_{10}^8=$$

$$=1+C_{10}^1+(C_{10}^2+C_{10}^3+C_{10}^4)\cdot 2+C_{10}^8=1+10+(45+120+210)\cdot 2+252=1013.$$

Ответ. 1013.

3. Найти сумму первых 10 элементов, встречающихся как среди членов арифметической прогрессии $\{5,8,11,14,\ldots\}$, так и среди членов геометрической прогрессии $\{10,20,40,80,\ldots\}$. (10 баллов)

Решение. Члены арифметической прогрессии $\{5,8,11,14,17,20,23,\ldots\}$ задаются формулой

$$a_n=5+3n,\ n=0,1,2,\ldots$$

Члены геометрической прогрессии $\{10,20,40,80,\ldots\}$ задаются формулой

$$b_n=10\cdot 2^k,\ k=0,1,2,\ldots$$

Для общих элементов должно выполняться равенство $5+3n=10\cdot 2^k$, откуда

$$n=\frac{10\cdot 2^k-5}{3}=\frac{5\cdot(2^{k+1}-1)}{3}\text{, то есть } (2^{k+1}-1)\vdots 3.$$

Ясно, что $2^{k+1}-1$ кратно 3 при нечетных k (остаток от деления 2^{k+1} на 3 равен 2 или 1).

При $k=1$, $n=5$ общий элемент $a_5=b_1=20$;

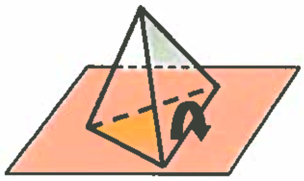
при $k=3$, $n=25$ общий элемент $a_{25}=b_3=80$;

при $k=5$, $n=105$ общий элемент $a_{105}=b_5=320$ и т.д.

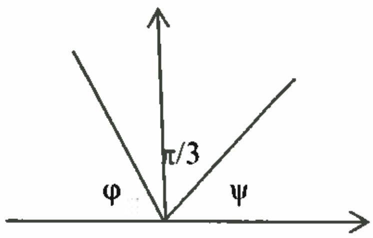
Таким образом, искомые элементы: 20, 80, 320, … – члены исходной геометрической прогрессии с нечетными номерами. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 4 и первым членом 20. Сумма 10 первых членов может быть найдена по формуле $S=c_1\dfrac{q^n-1}{q-1}=20\cdot\dfrac{4^{10}-1}{4-1}=20\cdot\dfrac{\left(2^{10}\right)^2-1}{3}=20\cdot\dfrac{1024^2-1}{3}=6990500.$

Ответ. 6 990 500.

4. Две смежные грани тетраэдра, представляющие собой правильные треугольники со стороной 1, образуют двугранный угол 60 градусов. Тетраэдр поворачивается вокруг общего ребра этих граней. Найти наибольшую площадь проекции вращающегося тетраэдра на плоскость, содержащую данное ребро. (12 баллов)



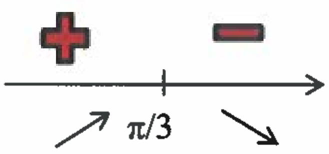
Решение. Обозначим площадь каждой из данных граней S.
Если грань располагается в плоскости проекции, то проекция тетраэдра равна площади этой грани $\Pi=S$.



При повороте на угол $0<\varphi<30°$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos\varphi<S$.

При повороте на угол $30°<\varphi<90°$ площадь проекции равна

$$\Pi=S\cos\varphi+S\cos\psi=S\cos\varphi+S\cos(\pi-\pi/3-\varphi)=S\cos\varphi+S\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right).$$



$\Pi'=S\left(-\sin\varphi+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\varphi\right)\right)$, $\Pi'=0$ при $\varphi=\pi/3$. Максимум функции в рассматриваемом интервале достигается при $\varphi=\pi/3$

$\Pi=2S\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2S\cdot\dfrac{1}{2}=S$

При повороте на угол $90°<\varphi<120°$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos(\pi/2-\varphi)=S\sin\varphi<S$.

При $\varphi=2\pi/3$ площадь $\Pi=S$.

Ответ. $\Pi=S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

5. Найти наибольшее значение выражения $(\sin x+\sin 2y+\sin 3z)(\cos x+\cos 2y+\cos 3z)$. (15 баллов)

Решение. Заметим, что для любых a, b и c выполняются неравенства

$$ab\le\frac{a^2+b^2}{2} \qquad (*)$$

(это неравенство равносильно $2ab \le a^2+b^2$, или $0 \le (a-b)^2$) и

$$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2): \qquad (**)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \le$$
$$\le a^2+b^2+c^2+2\frac{a^2+b^2}{2}+2\frac{a^2+c^2}{2}+2\frac{b^2+c^2}{2}=3(a^2+b^2+c^2).$$

Тогда

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\overset{(*)}{\le}\frac{1}{2}\left((\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\right)\overset{(**)}{\le}$$
$$\le\frac{1}{2}\left(3(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)+3(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\right)=$$
$$\le\frac{3}{2}\left((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)\right)=\frac{9}{2}.$$

При $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{4}$ достигается равенство:

$$(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}.$$

Таким образом, наибольшее значение выражения $\frac{9}{2}=4{,}5$, достигается, например, при $x=2y=3z=\frac{\pi}{4}$, то есть $x=\frac{\pi}{4}$; $y=\frac{\pi}{8}$; $z=\frac{\pi}{12}$.

Ответ. 4,5.

ВАРИАНТ 2

1. Доказать неравенство $n+\sqrt{3^{2n}+2}<3^n+\sqrt{n^2+2}$. (5 баллов)

Решение.
Данное неравенство равносильно
$\sqrt{3^{2n}+2}-\sqrt{n^2+2}<3^n-n$,
откуда по формуле разности квадратов
$\dfrac{3^{2n}+2-n^2-2}{\sqrt{3^{2n}+2}+\sqrt{n^2+2}}<3^n-n$.
Приводя подобные, получим:
$\dfrac{3^{2n}-n^2}{\sqrt{3^{2n}+2}+\sqrt{n^2+2}}<3^n-n$. Сокращая (с учетом $3^n>n$)
$\dfrac{3^n+n}{\sqrt{3^{2n}+2}+\sqrt{n^2+2}}<1$ и домножая на положительный знаменатель, приходим к неравенству
$3^n+n<\sqrt{3^{2n}+2}+\sqrt{n^2+2}$,
которое выполняется для всех $n>1$, так как
$3^n<\sqrt{(3^n)^2+2},\quad n<\sqrt{n^2+2}$.
Неравенство доказано.

2. Найти сумму всех четырехзначных чисел, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1,2,3,4,5, причем каждая цифра встречается не более одного раза. (8 баллов)

Решение. Любая из этих цифр встречается в любом разряде столько раз, сколькими способами можно распределить остальные четыре цифры по оставшимся трем разрядам. Это число $4\cdot 3\cdot 2=24$. Следовательно, сумма цифр, стоящих в каждом из четырех разрядов, взятая по всем четырехзначным числам, удовлетворяющим условиям задачи, равна $24\cdot(1+2+3+4+5)=24\cdot 15=360$, а сумма самих четырехзначных чисел $360\cdot(10^3+10^2+10+1)=360\cdot 1111=399960$.

Ответ. 399960.

3. Найти сумму первых 10 элементов, встречающихся как среди членов арифметической прогрессии $\{4,7,10,13,\ldots\}$, так и среди членов геометрической прогрессии $\{10,20,40,80,\ldots\}$. (10 баллов)

Решение. Члены арифметической прогрессии $\{4,7,10,13,16,19,\ldots\}$ задаются формулой

$$a_n=4+3n,\ n=0,1,2,\ldots$$

Члены геометрической прогрессии $\{10,20,40,80,\ldots\}$ задаются формулой

$$b_n=10\cdot 2^k,\ k=0,1,2,\ldots$$

Для общих элементов должно выполняться равенство $4+3n=10\cdot 2^k$, откуда

$$n=\frac{10\cdot 2^k-4}{3}=\frac{2\cdot(5\cdot 2^k-2)}{3},\text{ то есть } (5\cdot 2^k-2)\vdots 3.$$

Ясно, что $(5\cdot 2^k-2)$ кратно 3 при четных k (остаток от деления 2^k на 3 равен 2 или 1).

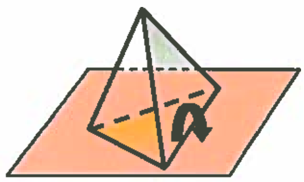
При $k=0$, $n=2$ общий элемент $a_2=b_0=10$;

при $k=2$, $n=12$ общий элемент $a_{12}=b_2=40$;

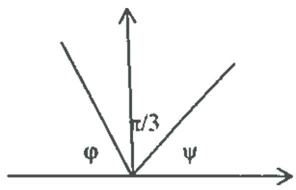
при $k=4$, $n=52$ общий элемент $a_{52}=b_4=160$ и т.д.
Таким образом, искомые элементы: 10, 40, 160, … – члены исходной геометрической прогрессии с четными номерами. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 4 и первым членом 10. Сумма 10 первых членов может быть найдена по формуле $S=c_1\dfrac{q^n-1}{q-1}=10\cdot\dfrac{4^{10}-1}{4-1}=10\cdot\dfrac{\left(2^{10}\right)^2-1}{3}=10\cdot\dfrac{1024^2-1}{3}=3495250.$

Ответ. 3 495 250.

4. Две смежные грани тетраэдра, представляющие собой равнобедренные прямоугольные треугольники с гипотенузой 2, образуют двугранный угол 60 градусов. Тетраэдр поворачивается вокруг общего ребра этих граней. Найти наибольшую площадь проекции вращающегося тетраэдра на плоскость, содержащую данное ребро. (12 баллов)



Решение. Обозначим площадь каждой из данных граней S. Если грань располагается в плоскости проекции, то проекция тетраэдра равна площади этой грани $\Pi=S$.

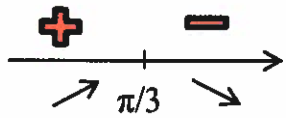


При повороте на угол $0<\varphi<30°$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos\varphi<S$.

При повороте на угол $30°<\varphi<90°$ площадь проекции равна

$$\Pi=S\cos\varphi+S\cos\psi=S\cos\varphi+S\cos(\pi-\pi/3-\varphi)=S\cos\varphi+S\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right).$$

$$\Pi'=S\left(-\sin\varphi+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right)\right),\ \Pi'=0 \text{ при } \varphi=\pi/3.$$



Максимум функции в рассматриваемом интервале достигается при

$\varphi=\pi/3$, и $\Pi=2S\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2S\cdot\dfrac{1}{2}=S$

При повороте на угол $90°<\varphi<120°$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos(\pi/2-\varphi)=S\sin\varphi<S$.

При $\varphi=2\pi/3$ площадь $\Pi=S$.

Ответ. $\Pi=S=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}^2=1$.

5. Найти наибольшее значение выражения $(\sin 3x+\sin 2y+\sin z)(\cos 3x+\cos 2y+\cos z)$. (15 баллов)

Решение. Заметим, что для любых a, b и c выполняются неравенства

$$ab\le\frac{a^2+b^2}{2} \qquad (*)$$

(это неравенство равносильно $2ab\le a^2+b^2$, или $0\le(a-b)^2$) и

$$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2): \qquad (**)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \le$$
$$\le a^2+b^2+c^2+2\frac{a^2+b^2}{2}+2\frac{a^2+c^2}{2}+2\frac{b^2+c^2}{2} = 3(a^2+b^2+c^2).$$

Тогда

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) \overset{(*)}{\le} \frac{1}{2}\left((\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\right) \overset{(**)}{\le}$$
$$\le \frac{1}{2}\left(3(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)+3(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\right)=$$
$$\le \frac{3}{2}\left((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)\right)=\frac{9}{2}.$$

При $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{4}$ достигается равенство:

$$(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}.$$

Таким образом, наибольшее значение выражения $\frac{9}{2}=4{,}5$, достигается, например, при $3x=2y=z=\frac{\pi}{4}$, то есть $x=\frac{\pi}{12}$; $y=\frac{\pi}{8}$; $z=\frac{\pi}{4}$.

Ответ. 4,5

ВАРИАНТ 3
МАТЕМАТИКА

1. Доказать неравенство $\ln n+\sqrt{n^2+3}<n+\sqrt{\ln^2 n+3}$. (5 баллов)

Решение.
Данное неравенство равносильно
$\sqrt{n^2+2}-\sqrt{\ln^2 n+2}<n-\ln n$,
откуда по формуле разности квадратов
$\dfrac{(n^2+2)-(\ln^2 n+2)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{\ln^2 n+2}}<n-\ln n$.
Приводя подобные, получим:
$\dfrac{n^2-\ln^2 n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{\ln^2 n+2}}<n-\ln n$. Сокращая (с учетом $n>\ln n$)
$\dfrac{n+\ln n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{\ln^2 n+2}}<1$ и домножая на положительный знаменатель, приходим к неравенству
$n+\ln n<\sqrt{n^2+2}+\sqrt{\ln^2 n+2}$,
которое выполняется для всех $n>1$, так как
$n<\sqrt{n^2+2}, \quad \ln n<\sqrt{\ln^2 n+2}$.
Неравенство доказано.

2. Найти количество всех натуральных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей. (8 баллов)

Решение. Наибольшее возможное число, удовлетворяющее условию задачи 123456789. Кроме того, число должно быть не менее чем двузначным. Все остальные такие числа могут быть получены из 123456789 вычеркиванием одной, двух, трех, четырех, пяти, шести или семи цифр из девяти. Тогда общее количество

$$1+C_9^1+C_9^2+C_9^3+C_9^4+C_9^5+C_9^6+C_9^7=1+9+(36+84+126)\cdot 2=502.$$

Ответ. 502.

3. Найти сумму первых 10 элементов, встречающихся как среди членов арифметической прогрессии $\{5,8,11,13,\ldots\}$, так и среди членов геометрической прогрессии $\{20,40,80,160,\ldots\}$. (10 баллов)

Решение. Члены арифметической прогрессии $\{5,8,11,14,17,20,23,\ldots\}$ задаются формулой

$$a_n=5+3n,\ n=0,1,2,\ldots$$

Члены геометрической прогрессии $\{20,40,80,160,\ldots\}$ задаются формулой

$$b_n=20\cdot 2^k,\ k=0,1,2,\ldots$$

Для общих элементов должно выполняться равенство $5+3n=20\cdot 2^k$, откуда $n=\dfrac{20\cdot 2^k-5}{3}=\dfrac{5\cdot(2^{k+2}-1)}{3}$, то есть $(2^{k+2}-1)\,\vdots\,3$.

Ясно, что $2^{k+2}-1$ кратно 3 при четных k (остаток от деления 2^{k+2} на 3 равен 1 или 2).

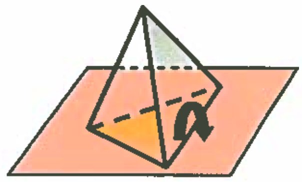
При $k=0$, $n=5$ общий элемент $a_5=b_0=20$;

при $k=2$, $n=25$ общий элемент $a_{25}=b_2=80$;
при $k=4$, $n=105$ общий элемент $a_{105}=b_4=320$ и т.д.

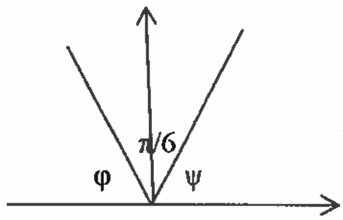
Таким образом, искомые элементы: 20, 80, 320, … – члены исходной геометрической прогрессии с четными номерами. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 4 и первым членом 20. Сумма 10 первых членов может быть найдена по формуле
$S=c_1\dfrac{q^n-1}{q-1}=20\cdot\dfrac{4^{10}-1}{4-1}=20\cdot\dfrac{\left(2^{10}\right)^2-1}{3}=20\cdot\dfrac{1024^2-1}{3}=6990500.$

Ответ. 6 990 500.

4. Две смежные грани тетраэдра, представляющие собой правильные треугольники со стороной 3, образуют двугранный угол 30 градусов. Тетраэдр поворачивается вокруг общего ребра этих граней. Найти наибольшую площадь проекции вращающегося тетраэдра на плоскость, содержащую данное ребро. (12 баллов)



Решение. Обозначим площадь каждой из данных граней S.
Если грань располагается в плоскости проекции, то проекция тетраэдра равна площади этой грани $\Pi=S$.

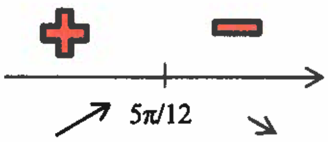


При повороте на угол $0<\varphi<60°$ площадь проекции равна
$\Pi=S\cos\varphi<S$.

При повороте на угол $60°<\varphi<90°$ площадь проекции равна

$\Pi=S\cos\varphi+S\cos\psi=S\cos\varphi+S\cos(\pi-\pi/6-\varphi)=S\cos\varphi+S\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-\varphi\right)$.

$\Pi'=S\left(-\sin\varphi+\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-\varphi\right)\right)$, $\Pi'=0$ при $\varphi=5\pi/12$. Максимум функции в рассматриваемом



интервале достигается при $\varphi=\pi/3$ площадь $\Pi=2S\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)<S$,
так как $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)<\cos\left(\dfrac{4\pi}{12}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

При повороте на угол $90°<\varphi<150°$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos(\pi/2-\varphi)=S\sin\varphi<S$.
При $\varphi=5\pi/6$ площадь $\Pi=S$.

Ответ. $\Pi=S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

5. Найти наибольшее значение выражения $(\sin 2x+\sin y+\sin 3z)(\cos 2x+\cos y+\cos 3z)$. (15 баллов)

Решение. Заметим, что для любых a, b и c выполняются неравенства
$$ab\le\frac{a^2+b^2}{2} \qquad (*)$$
(это неравенство равносильно $2ab\le a^2+b^2$, или $0\le(a-b)^2$) и
$$(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2): \qquad (**)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \le$$
$$\le a^2+b^2+c^2+2\frac{a^2+b^2}{2}+2\frac{a^2+c^2}{2}+2\frac{b^2+c^2}{2}=3(a^2+b^2+c^2).$$

Тогда

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\overset{(*)}{\le}\frac{1}{2}\left((\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\right)\overset{(**)}{\le}$$
$$\le\frac{1}{2}\left(3(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)+3(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\right)=$$
$$\le\frac{3}{2}\left((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)\right)=\frac{9}{2}.$$

При $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{4}$ достигается равенство:

$$(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}.$$

Таким образом, наибольшее значение выражения $\frac{9}{2}=4{,}5$, достигается, например, при $2x=y=3z=\frac{\pi}{4}$, то есть $x=\frac{\pi}{8};\ y=\frac{\pi}{4};\ z=\frac{\pi}{12}$.

Ответ. 4,5

ВАРИАНТ 4
МАТЕМАТИКА

1. Доказать неравенство $n+\sqrt{3^{2n}+3}<3^n+\sqrt{n^2+3}$. (5 баллов)

Решение.
Данное неравенство равносильно
$\sqrt{3^{2n}+3}-\sqrt{n^2+3}<3^n-n$,
откуда по формуле разности квадратов
$\dfrac{3^{2n}+3-n^2-3}{\sqrt{3^{2n}+3}+\sqrt{n^2+3}}<3^n-n$.
Приводя подобные, получим:
$\dfrac{3^{2n}-n^2}{\sqrt{3^{2n}+3}+\sqrt{n^2+3}}<3^n-n$. Сокращая (с учетом $3^n>n$)
$\dfrac{3^n+n}{\sqrt{3^{2n}+3}+\sqrt{n^2+3}}<1$ и домножая на положительный знаменатель, приходим к неравенству
$3^n+n<\sqrt{3^{2n}+3}+\sqrt{n^2+3}$,
которое выполняется для всех $n>1$, так как
$3^n<\sqrt{(3^n)^2+3},\quad n<\sqrt{n^2+3}$.
Неравенство доказано.

2. Найти сумму всех четырехзначных чисел, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1,2,3,4,5, причем каждая цифра встречается не более одного раза. (8 баллов)

Решение. Любая из этих цифр встречается в любом разряде столько раз, сколькими способами можно распределить остальные четыре цифры по оставшимся трем разрядам. Это число $4\cdot 3\cdot 2=24$. Следовательно, сумма цифр, стоящих в каждом из четырех разрядов, взятая по всем четырехзначным числам, удовлетворяющим условиям задачи, равна $24\cdot(1+2+3+4+5)=24\cdot 15=360$, а сумма самих четырехзначных чисел $360\cdot(10^3+10^2+10+1)=360\cdot 1111=399960$.

Ответ. 399960.

3. Найти сумму первых 10 элементов, встречающихся как среди членов арифметической прогрессии $\{4,7,10,13,\ldots\}$, так и среди членов геометрической прогрессии $\{20,40,80,160,\ldots\}$. (10 баллов)

Решение. Члены арифметической прогрессии $\{4,7,10,13,16,19,\ldots\}$ задаются формулой

$$a_n=4+3n,\ n=0,1,2,\ldots$$

Члены геометрической прогрессии $\{20,40,80,\ldots\}$ задаются формулой

$$b_n=20\cdot 2^k,\ k=0,1,2,\ldots$$

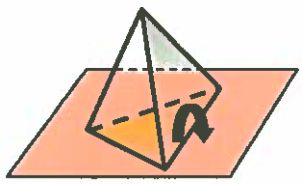
Для общих элементов должно выполняться равенство $4+3n=20\cdot 2^k$, откуда $n=\dfrac{20\cdot 2^k-4}{3}=\dfrac{4\cdot(5\cdot 2^k-1)}{3}$, то есть $(5\cdot 2^k-1)\vdots 3$.

Ясно, что $5\cdot 2^k-1$ кратно 3 при нечетных k (остаток от деления 2^k на 3 равен 2 или 1).
При $k=1$, $n=12$ общий элемент $a_{12}=b_1=40$;

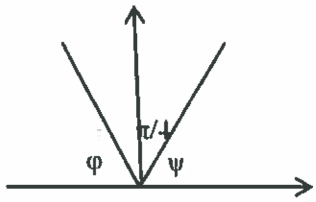
при $k=3$, $n=52$ общий элемент $a_{52}=b_3=160$;
при $k=5$, $n=212$ общий элемент $a_{212}=b_5=640$ и т.д.
Таким образом, искомые элементы: 40, 160, 640, … – члены исходной геометрической прогрессии с нечетными номерами. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 4 и первым членом 40. Сумма 10 первых членов может быть найдена по формуле
$S=c_1\dfrac{q^n-1}{q-1}=40\cdot\dfrac{4^{10}-1}{4-1}=40\cdot\dfrac{\left(2^{10}\right)^2-1}{3}=40\cdot\dfrac{1024^2-1}{3}=13981000$.

Ответ. 13 981 000.

4. Две смежные грани тетраэдра, представляющие собой правильные треугольники со стороной 1, образуют двугранный угол 45 градусов. Тетраэдр поворачивается вокруг общего ребра этих граней. Найти наибольшую площадь проекции вращающегося тетраэдра на плоскость, содержащую данное ребро. (12 баллов)



Решение. Обозначим площадь каждой из данных граней S.
Если грань располагается в плоскости проекции, то проекция тетраэдра равна площади этой грани $\Pi=S$.

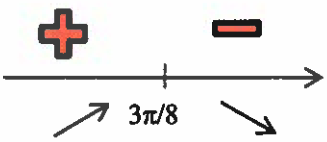


При повороте на угол $0<\varphi<45^{\circ}$ площадь проекции равна
$\Pi=S\cos\varphi<S$.

При повороте на угол $45^{\circ}<\varphi<90^{\circ}$ площадь проекции равна

$\Pi=S\cos\varphi+S\cos\psi=S\cos\varphi+S\cos(\pi-\pi/4-\varphi)=S\cos\varphi+S\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-\varphi\right)$.

$\Pi'=S\left(-\sin\varphi+\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\varphi\right)\right)$, $\Pi'=0$ при $\varphi=3\pi/8$. Максимум функции в рассматриваемом



интервале достигается при $\varphi=3\pi/8$, и $\Pi=2S\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)<S$, так как $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)<\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

При повороте на угол $90^{\circ}<\varphi<135^{\circ}$ площадь проекции равна $\Pi=S\cos(\pi/2-\varphi)=S\sin\varphi<S$.
При $\varphi=3\pi/4$ площадь $\Pi=S$.

Ответ. $\Pi=S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

5. Найти наибольшее значение выражения $(\sin 2x+\sin 3y+\sin 4z)(\cos 2x+\cos 3y+\cos 4z)$. (15 баллов)

Решение. Заметим, что для любых a, b и c выполняются неравенства

$$ab\le\frac{a^2+b^2}{2} \qquad (*)$$

(это неравенство равносильно $2ab\le a^2+b^2$, или $0\le(a-b)^2$) и

$$(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2): \qquad (**)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \le$$
$$\le a^2+b^2+c^2+2\frac{a^2+b^2}{2}+2\frac{a^2+c^2}{2}+2\frac{b^2+c^2}{2} = 3(a^2+b^2+c^2).$$

Тогда

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) \overset{(*)}{\le} \frac{1}{2}\left((\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\right) \overset{(**)}{\le}$$
$$\le \frac{1}{2}\left(3(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)+3(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\right) =$$
$$\le \frac{3}{2}\left((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)\right) = \frac{9}{2}.$$

При $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{4}$ достигается равенство:

$$(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}.$$

Таким образом, наибольшее значение выражения $\frac{9}{2}=4{,}5$, достигается, например, при $2x=3y=4z=\frac{\pi}{4}$, то есть $x=\frac{\pi}{8}$; $y=\frac{\pi}{12}$; $z=\frac{\pi}{16}$.

Ответ. 4,5.

ВАРИАНТ 5

1. Решить уравнение $\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^3+\left(\sin^2 y+\frac{1}{\sin^2 y}\right)^3=16\cos z$ (5 баллов)

Решение. Область определения неравенства ограничивается условиями $\sin x\neq 0,\ \sin y\neq 0$.
Заметим, что $u+\frac{1}{u}\geq 2$ для любых положительных u, так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2+1}{u}\geq 2 \ \Leftrightarrow\ u^2+1\geq 2u \ \Leftrightarrow\ u^2+1-2u\geq 0 \ \Leftrightarrow\ (u-1)^2\geq 0 ,$$

причем равенство достигается при $u=1$.

Таким образом, наименьшее значение левой части уравнения $2^3+2^3=16$.

Правая часть уравнения не больше 16, следовательно, равенство возможно только при условии, что и левая, и правая части уравнения равны 16. Это означает, что $\sin^2 x=\sin^2 y=\cos z=1$, то есть $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ z=2\pi m$, где $n,k,m\in Z$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ z=2\pi m$, где $n,k,m\in Z$.

2. Девятизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 18 и B > 222222222. Найти наибольшее и наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих этим условиям. (Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, отличных от единицы). (8 баллов)

Решение. Очевидно, что последняя цифра числа B не может быть нулем, так как при перестановке она становится первой цифрой числа A. $18=2\cdot 3^2$, поэтому число B будет взаимно простым с 18 в том и только том случае, если оно не делится ни на 2, ни на 3.

Если b – последняя цифра числа B, то число A выражается через B с помощью формулы

$$A = 10^8\cdot b + 1/10\cdot(B-b) \text{ (ясно, что } B-b \text{ делится на 10).}$$

Очевидно, что чем больше последняя цифра числа B, тем большее число A ему соответствует. Для того, чтобы A было наибольшим, необходимо, чтобы последняя цифра числа B принимала наибольшее возможное значение, т.е. $b=9$.

Если B' и B оканчиваются на 9 и $B'>B$, то

$$A'=9\cdot 10^8+1/10\cdot(B'-9)>9\cdot 10^8+1/10\cdot(B-9)=A.$$

Значит, чем больше число B, тем большее число A ему соответствует (для чисел B, оканчивающихся девяткой).

Наибольшее возможное девятизначное число равно 999999999. Это число не делится на 2, но делится на 3. Уменьшим предпоследнюю цифру на 1 и получим B = 999999989. Это число удовлетворяет всем условиям: оканчивается на 9, взаимно просто с 18 и является наибольшим среди всех таких чисел. Следовательно, ему соответствует наибольшее возможное число $A_{\max}$ = 999999998.

Аналогично определяется наименьшее число: первая цифра A (т.е. последняя цифра B) должна быть наименьшей возможной, поэтому $b=1$. Среди чисел B, оканчивающихся единицей, наименьшее A соответствует наименьшему B. Если последняя цифра – единица, то самое маленькое число, удовлетворяющее неравенству B> 222222222, – это 222222231. Но сумма цифр такого числа равна 18 и оно делится на 3. Изменяя предпоследнюю цифру на 1, получим число B = 222222241, которое удовлетворяет всем условиям: оканчивается единицей, взаимно просто с 18 и является наименьшим среди всех таких чисел. Ему соответствует наименьшее возможное число $A_{\min}$ = 122222224.

Ответ. $A_{\min}$ = 122222224, $A_{\max}$ = 999999998.

3. Решить неравенство $2021x \le 2022 \cdot \sqrt[2022]{x^{2021}} - 1$. (10 баллов)

Решение. $x \ge 0$. Преобразуем неравенство к виду:

$$\frac{2021x+1}{2022} \le \sqrt[2022]{x^{2021}}$$, откуда

$$\frac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2021\ \text{экземпляр})}+1}{2022} \le \sqrt[2022]{x^{2021}}.$$

Но по соотношению для среднего арифметического и среднего геометрического

$$\frac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2021\ \text{экземпляр})}+1}{2022} \ge \sqrt[2022]{\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{(2021\ \text{экземпляр})}\cdot 1} = \sqrt[2022]{x^{2021}},$$ следовательно, единственным решением неравенства является $x = 1$.

Ответ. $x = 1$.

4. Построить график функции $y = x^3 + \frac{x^3}{1+x^3} + \frac{x^3}{(1+x^3)^2} + \frac{x^3}{(1+x^3)^3} + \ldots + \frac{x^3}{(1+x^3)^n} + \ldots$.

(12 баллов)

Решение. Функция определена при $x \ne -1$.

при $x = 0$ $y = 0$.

Для остальных значений x преобразуем данное в условии выражение:

$$y = x^3 + \frac{x^3}{1+x^3} + \frac{x^3}{(1+x^3)^2} + \frac{x^3}{(1+x^3)^3} + \ldots + \frac{x^3}{(1+x^3)^n} + \ldots =$$

$$= x^3\left(1 + \frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{(1+x^3)^2} + \frac{1}{(1+x^3)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+x^3)^n} + \ldots\right) =$$

по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^3}$,

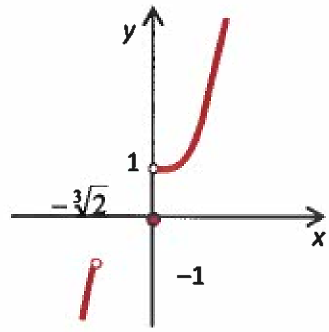
сходящейся при $|q| = \left|\frac{1}{1+x^3}\right| < 1$

$$= x^3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^3}}\right) = \frac{x^3(1+x^3)}{1+x^3-1} = 1 + x^3.$$

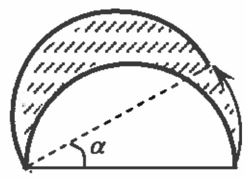
График этой функции – кубическая парабола, сдвинутая на 1 вверх. Для определения промежутка, на котором это преобразование имеет место, решим неравенство $\left|\frac{1}{1+x^3}\right|<1$. Оно равносильно $1<|1+x^3|$, или $\left[\begin{array}{l}1+x^3>1;\\1+x^3<-1\end{array}\right.$, то есть $\left[\begin{array}{l}x^3>0;\\x^3<-2,\end{array}\right.$ откуда следует $\left[\begin{array}{l}x>0;\\x<-\sqrt[3]{2}.\end{array}\right.$

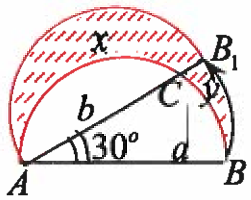
Окончательно:

$$y=\begin{cases}1+x^3, & x<-\sqrt[3]{2};\\0, & x=0;\\1+x^3, & x>0.\end{cases}$$



5. Найти площадь заштрихованной фигуры, описываемой полуокружностью, вращаемой относительно одного из концов на угол $\alpha=30^o$. (15 баллов)





Решение. Пусть площадь полукруга $S_0=\frac{\pi R^2}{2}$, площадь луночки $AB_1C=x$, луночки $CB_1B=y$ и сектора $ACB=a$. Тогда, если площадь сегмента AC равна b, то имеем: $x+b=S_0=b+a\Rightarrow x=a$.

Вся заштрихованная площадь равна $x+y=a+y$, но $a+y$ - это площадь кругового сектора ABB_1 радиуса $2R$. Таким образом, площадь $ABB_1=\frac{1}{2}(2R)^2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi R^2}{3}$.

Ответ. $\frac{\pi R^2}{3}$.

ВАРИАНТ 6

1. Решить уравнение $\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^3+\left(\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}\right)^3=16\sin^2 z$. (5 баллов)

Решение. Область определения неравенства ограничивается условиями $\sin x \neq 0,\ \cos y \neq 0$.
Заметим, что $u+\frac{1}{u} \geq 2$ для любых положительных u, так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2+1}{u} \geq 2 \ \Leftrightarrow\ u^2+1 \geq 2u \ \Leftrightarrow\ u^2+1-2u \geq 0 \ \Leftrightarrow\ (u-1)^2 \geq 0 ,$$

причем равенство достигается при $u=1$.
Таким образом, наименьшее значение левой части уравнения $2^3+2^3=16$.
Правая часть уравнения не больше 16, следовательно, равенство возможно только при условии, что и левая, и правая части уравнения равны 16. Это означает, что $\sin^2 x=\cos^2 y=\sin^2 z=1$, то есть $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ y=\pi m,\ z=\frac{\pi}{2}+\pi k,$, где $n,k,m\in Z$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ y=\pi m,\ z=\frac{\pi}{2}+\pi k,$, где $n,k,m\in Z$.

2. Восьмизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 12 и $B > 44444444$. Найти наибольшее и наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих этим условиям. (Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, отличных от единицы). (8 баллов)

Решение. Очевидно, что последняя цифра числа B не может быть нулем, так как при перестановке она становится первой цифрой числа A. $B=2^2\cdot 3$, поэтому число B будет взаимно простым с 12 в том и только том случае, если оно не делится ни на 2, ни на 3.

Если b – последняя цифра числа B, то число $A = 10^7\cdot b + 1/10\cdot(B-b)$ (ясно, что $B-b$ делится на 10).

Очевидно, что чем больше последняя цифра числа B, тем большее число A ему соответствует. Для того, чтобы A было наибольшим, необходимо, чтобы последняя цифра числа B принимала наибольшее возможное значение, т.е. $b = 9$.

Если B' и B оканчиваются на 9 и $B' > B$, то

$$A' = 9\cdot 10^7+ 1/10\cdot(B'-9) > 9\cdot 10^7+ 1/10\cdot(B-9) = A.$$

Значит, чем больше число B, тем большее число A ему соответствует (для чисел B, оканчивающихся девяткой).

Наибольшее возможное значение B равно 99999999. Это число не делится на 2, но делится на 3. Уменьшим предпоследнюю цифру на 1 и получим B = 999999989. Это число удовлетворяет всем условиям: оканчивается на 9, взаимно просто с 12 и является наибольшим среди всех таких чисел. Следовательно, ему соответствует наибольшее возможное число A_{max} = 999999998.

Аналогично определяется наименьшее число: первая цифра A (т.е. последняя цифра B) должна быть наименьшей возможной, поэтому b = 1. Среди чисел B, оканчивающихся единицей, наименьшее A соответствует наименьшему B. Если последняя цифра – единица, то самое маленькое число, которое удовлетворяет неравенству B> 44444444, – это 44444451. Но оно делится на 3, так как сумма цифр равна 30. Изменяя предпоследнюю цифру на 1, получим число B = 44444461, которое удовлетворяет всем условиям: оканчивается единицей, взаимно просто с 12 и является наименьшим среди всех таких чисел. Ему соответствует наименьшее возможное число A_{min} = 14444446.

Ответ. $A_{\min} = 14444446$, $A_{\max} = 99999998$

3. Решить неравенство $2021\cdot\sqrt[2021]{x^{2020}}-1\ge 2020x$ для $x\ge 0$. (10 баллов)

Решение. Преобразуем неравенство к виду:

$\dfrac{2020x+1}{2021}\le\sqrt[2021]{x^{2020}}$, откуда

$\dfrac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2020\ \text{экземпляров})}+1}{2021}\le\sqrt[2021]{x^{2020}}$.

Но по соотношению для среднего арифметического и среднего геометрического

$\dfrac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2020\ \text{экземпляров})}+1}{2021}\ge\sqrt[2021]{\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{(2020\ \text{экземпляров})}\cdot 1}=\sqrt[2021]{x^{2020}}$, следовательно, единственным решением неравенства является $x=1$.

Ответ. $x=1$.

4. Построить график функции $y=\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^3}+\ldots+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^n}+\ldots$.

(12 баллов)

Решение. Функция определена при $x\ne -1$.

при $x=0$ $y=0$.

Для остальных значений x преобразуем данное в условии выражение:

$$y=\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}+\frac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^3}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^n}+\ldots=$$

$$=\sqrt[3]{x}\left(1+\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})^2}+\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})^3}+\ldots+\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})^n}+\ldots\right)=$$

по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$,

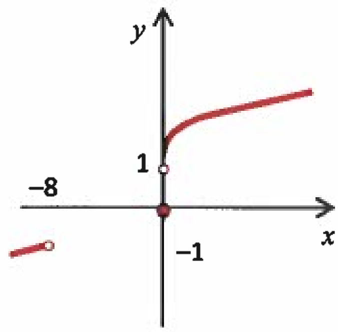
сходящейся при $|q|=\left|\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\right|<1$,

$$=\sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}}}\right)=\frac{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x})}{1+\sqrt[3]{x}-1}=1+\sqrt[3]{x}.$$

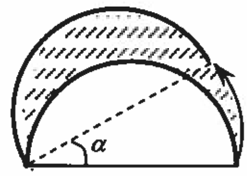
Для определения промежутка, на котором это преобразование имеет место решим неравенство $\left|\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\right|<1$. Оно равносильно $1<|1+\sqrt[3]{x}|$, или $\left[\begin{array}{l}1+\sqrt[3]{x}>1;\\ 1+\sqrt[3]{x}<-1\end{array}\right.$, то есть $\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}>0;\\ \sqrt[3]{x}<-2,\end{array}\right.$ откуда следует $\left[\begin{array}{l}x>0;\\ x<-8.\end{array}\right.$

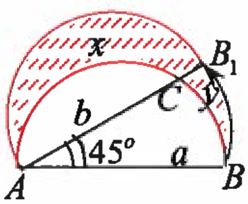
Окончательно:

$$y=\begin{cases}1+\sqrt[3]{x}, & x<-8;\\ 0, & x=0;\\ 1+\sqrt[3]{x}, & x>0.\end{cases}$$



5. Найти площадь заштрихованной фигуры, описываемой полуокружностью, вращаемой относительно одного из концов на угол $\alpha=45^o$. (15 баллов)





Решение. Пусть площадь полукруга $S_0=\frac{\pi R^2}{2}$, площадь луночки $AB_1C=x$, луночки $CB_1B=y$ и сектора $ACB=a$. Тогда, если площадь сегмента AC равна b, то имеем: $x+b=S_0=b+a\Rightarrow x=a$.

Вся заштрихованная площадь равна $x+y=a+y$, но $a+y$ - это площадь кругового сектора ABB_1 радиуса $2R$. Таким образом, площадь $ABB_1=\frac{1}{2}(2R)^2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi R^2}{2}$.

Ответ. $\frac{\pi R^2}{2}$.

ВАРИАНТ 7

1. Решить уравнение $\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^3+\left(\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}\right)^3=16\cos z$. (5 баллов)

Решение. Область определения неравенства ограничивается условиями $\sin x\neq 0,\ \cos y\neq 0$. Заметим, что $u+\frac{1}{u}\geq 2$ для любых положительных u, так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2+1}{u}\geq 2 \;\Leftrightarrow\; u^2+1\geq 2u \;\Leftrightarrow\; u^2+1-2u\geq 0 \;\Leftrightarrow\; (u-1)^2\geq 0\;,$$

причем равенство достигается при $u=1$.

Таким образом, наименьшее значение левой части уравнения $2^3+2^3=16$.

Правая часть уравнения не больше 16, следовательно, равенство возможно только при условии, что и левая, и правая части уравнения равны 16. Это означает, что $\sin^2 x=\cos^2 y=\cos z=1$, то есть $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ y=\pi k,\ z=2\pi m$, где $n,k,m\in Z$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ y=\pi k,\ z=2\pi m$, где $n,k,m\in Z$.

2. Девятизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 24 и $B > 666666666$. Найти наибольшее и наименьшее из чисел A, удовлетворяющих этим условиям. (Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, отличных от единицы). (8 баллов)

Решение. Очевидно, что последняя цифра числа B не может быть нулем, так как при перестановке она становится первой цифрой числа A. $24=2^3\cdot 3$, поэтому число B будет взаимно простым с 24 в том и только том случае, если оно не делится ни на 2, ни на 3.

Если b – последняя цифра числа B, то число A выражается через B с помощью формулы

$$A = 10^8\cdot b + 1/10\cdot(B-b)$$ (ясно, что $B-b$ делится на 10).

Очевидно, что чем больше последняя цифра числа B, тем большее число A ему соответствует. Для того, чтобы A было наибольшим, необходимо, чтобы последняя цифра числа B принимала наибольшее возможное значение, т.е. $b=9$.

Если B' и B оканчиваются на 9 и $B' > B$, то

$$A' = 9\cdot 10^8 + 1/10\cdot(B'-9) > 9\cdot 10^8 + 1/10\cdot(B-9) = A.$$

Значит, чем больше число B, тем большее число A ему соответствует (для чисел B, оканчивающихся девяткой).

Наибольшее возможное девятизначное число равно 999999999. Это число не делится на 2, но делится на 3. Уменьшим предпоследнюю цифру на 1 и получим B = 999999989. Это число удовлетворяет всем условиям: оканчивается на 9, взаимно просто с 24 и является наибольшим среди всех таких чисел. Следовательно, ему соответствует наибольшее возможное число $A_{\max}$ = 999999998.

Аналогично определяется наименьшее число: первая цифра A (т.е. последняя цифра B) должна быть наименьшей возможной, поэтому b = 1. Среди чисел B, оканчивающихся единицей, наименьшее A соответствует наименьшему B. Если последняя цифра – единица, то самое маленькое число, удовлетворяющее неравенству $B > 666666666$, – это 666666671. Оно удовлетворяет всем условиям: оканчивается единицей, взаимно просто с 24 и является наименьшим среди всех таких чисел. Ему соответствует наименьшее возможное число $A_{\min}$ = 166666667.

Ответ. $A_{\min} = 166666667$, $A_{\max} = 999999998$

3. Решить уравнение $2021x = 2022 \cdot \sqrt[2022]{x^{2021}} - 1$. (10 баллов)

Решение. $x \geq 0$. Преобразуем уравнение к виду:

$$\frac{2021x+1}{2022} = \sqrt[2022]{x^{2021}}$$, откуда

$$\frac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2021\ экземпляр)}+1}{2022} = \sqrt[2022]{x^{2021}}.$$

Но по соотношению для среднего арифметического и среднего геометрического

$$\frac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2021\ экземпляр)}+1}{2022} \geq \sqrt[2022]{\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{(2021\ экземпляр)}\cdot 1} = \sqrt[2022]{x^{2021}},$$ следовательно, единственным решением неравенства является $x = 1$.

Ответ. $x = 1$.

4. Построить график функции $y = \sqrt[5]{x} + \frac{\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[5]{x}} + \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^2} + \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^3} + \ldots + \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^n} + \ldots$.

(12 баллов)

Решение. Функция определена при $x \neq -1$.

при $x = 0$ $y = 0$.

Для остальных значений x преобразуем данное в условии выражение:

$$y = \sqrt[5]{x} + \frac{\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[5]{x}} + \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^2} + \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^3} + \ldots + \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^n} + \ldots =$$

$$= \sqrt[5]{x}\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt[5]{x}} + \frac{1}{(1+\sqrt[5]{x})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt[5]{x})^3} + \ldots + \frac{1}{(1+\sqrt[5]{x})^n} + \ldots\right) =$$

по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{1+\sqrt[5]{x}}$,

сходящейся при $|q| = \left|\frac{1}{1+\sqrt[5]{x}}\right| < 1$,

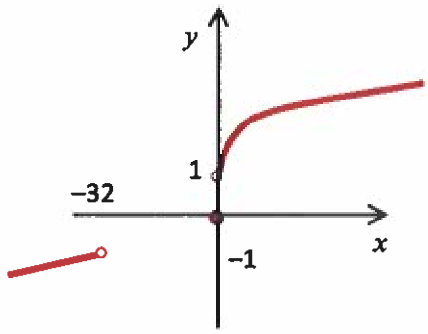
$$= \sqrt[5]{x}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+\sqrt[5]{x}}}\right) = \frac{\sqrt[5]{x}(1+\sqrt[5]{x})}{1+\sqrt[5]{x}-1} = 1+\sqrt[5]{x}.$$

Для определения промежутка, на котором это преобразование имеет место, решим неравенство $\left|\frac{1}{1+\sqrt[5]{x}}\right| < 1$. Оно равносильно $1 < |1+\sqrt[5]{x}|$, или

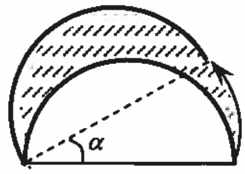
$\left[\begin{array}{l}1+\sqrt[5]{x}>1; \\ 1+\sqrt[5]{x}<-1\end{array}\right.$, то есть $\left[\begin{array}{l}\sqrt[5]{x}>0; \\ \sqrt[5]{x}<-2,\end{array}\right.$ откуда следует $\left[\begin{array}{l}x>0; \\ x<-32.\end{array}\right.$

Окончательно:

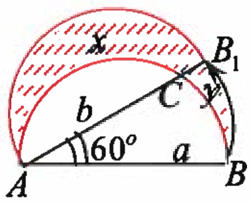
$$y=\begin{cases}1+\sqrt[5]{x}, & x<-32; \\ 0, & x=0; \\ 1+\sqrt[5]{x}, & x>0.\end{cases}$$



5. Найти площадь заштрихованной фигуры, описываемой полуокружностью, вращаемой относительно одного из концов на угол $\alpha=60^o$. (15 баллов)



Решение. Пусть площадь полукруга $S_0=\frac{\pi R^2}{2}$,



площадь луночки $AB_1C=x$, луночки $CB_1B=y$ и сектора $ACB=a$. Тогда, если площадь сегмента AC равна b, то имеем: $x+b=S_0=b+a\Rightarrow x=a$.

Вся заштрихованная площадь равна $x+y=a+y$, но $a+y$ - это площадь кругового сектора ABB_1 радиуса $2R$. Таким образом, площадь $ABB_1=\frac{1}{2}(2R)^2\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi R^2}{3}$.

Ответ. $\frac{2\pi R^2}{3}$.

ВАРИАНТ 8

1. Решить уравнение $\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^3+\left(\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}\right)^3=16\sin z$. (5 баллов)

Решение. Область определения неравенства ограничивается условиями $\cos x\neq 0,\ \cos y\neq 0$.

Заметим, что $u+\frac{1}{u}\geq 2$ для любых положительных u, так как это неравенство равносильно

$$\frac{u^2+1}{u}\geq 2 \quad\Leftrightarrow\quad u^2+1\geq 2u \quad\Leftrightarrow\quad u^2+1-2u\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (u-1)^2\geq 0 \quad ,$$

причем равенство достигается при $u=1$.

Таким образом, наименьшее значение левой части уравнения $2^3+2^3=16$.

Правая часть уравнения не больше 16, следовательно, равенство возможно только при условии, что и левая, и правая части уравнения равны 16. Это означает, что $\cos^2 x=\cos^2 y=\sin z=1$, то есть $x=\pi n,\ \ y=\pi k,\ \ z=\frac{\pi}{2}+2\pi m$, где $n,k,m\in Z$.

Ответ. $x=\pi n,\ \ y=\pi k,\ \ z=\frac{\pi}{2}+2\pi m$, где $n,k,m\in Z$.

2. Восьмизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 36 и $B>77777777$. Найти наибольшее и наименьшее из чисел A, удовлетворяющих этим условиям. (Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, отличных от единицы). (8 баллов)

Решение. Очевидно, что последняя цифра числа B не может быть нулем, так как при перестановке она становится первой цифрой числа A. В разложении 36 на простые множители присутствуют только числа 2 и 3, поэтому число B будет взаимно простым с 36 в том и только том случае, если оно не делится ни на 2, ни на 3.

Если b – последняя цифра числа B, то число $A=10^7\cdot b+1/10\cdot(B-b)$ (ясно, что $B-b$ делится на 10).

Очевидно, что чем больше последняя цифра числа B, тем большее число A ему соответствует. Для того чтобы A было наибольшим, необходимо, чтобы последняя цифра числа B принимала наибольшее возможное значение, т.е. $b=9$.

Если B' и B оканчиваются на 9 и $B'>B$, то

$$A'=b'\cdot 10^7+1/10\cdot(B'-b')>b'\cdot 10^7\geq (b+1)\cdot 10^7=$$
$$=b\cdot 10^7+10^7>b\cdot 10^7+1/10\cdot(B-b)=A.$$

Значит, чем больше число B, тем большее число A ему соответствует (для чисел B, оканчивающихся девяткой).

Наибольшее возможное значение B равно 99999999. Это число не делится на 2, но делится на 3. Уменьшим предпоследнюю цифру на 1 и получим $B=999999989$. Это число удовлетворяет всем условиям: оканчивается на 9, взаимно просто с 36 и является наибольшим среди всех таких чисел. Следовательно, ему соответствует наибольшее возможное число $A_{max}=999999998$.

Аналогично определяется наименьшее число: первая цифра A (т.е. последняя цифра B) должна быть наименьшей возможной, поэтому $b=1$. Среди чисел B, оканчивающихся единицей, наименьшее A соответствует наименьшему B. Если последняя цифра – единица, то самое маленькое число, которое удовлетворяет неравенству $B>77777777$, – это 77777781. Но оно делится на 3, так как сумма цифр равна 51. Изменяя предпоследнюю цифру на 1, получим число $B=77777791$, которое удовлетворяет всем условиям: оканчивается единицей, взаимно просто с 36 и является наименьшим среди всех таких чисел. Ему соответствует наименьшее возможное число $A_{\min} = 17777779$.

Ответ. $A_{\min} = 17777779$, $A_{\max} = 99999998$

3. Решить уравнение $2021 \cdot \sqrt[2021]{x^{2020}} - 1 = 2020x$ для $x \geq 0$. (10 баллов)

Решение. Преобразуем уравнение к виду:

$$\frac{2020x+1}{2021} = \sqrt[2021]{x^{2020}}$$, откуда

$$\frac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2020\ \text{экземпляров})}+1}{2021} = \sqrt[2021]{x^{2020}}.$$

Но по соотношению для среднего арифметического и среднего геометрического

$$\frac{\underbrace{x+x+\ldots+x}_{(2020\ \text{экземпляров})}+1}{2021} \geq \sqrt[2021]{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(2020\ \text{экземпляров})} \cdot 1} = \sqrt[2021]{x^{2020}},$$ следовательно, единственным решением уравнения является $x = 1$.

Ответ. $x = 1$.

4. Построить график функции $y = x^5 + \frac{x^5}{1+x^5} + \frac{x^5}{(1+x^5)^2} + \frac{x^5}{(1+x^5)^3} + \ldots + \frac{x^5}{(1+x^5)^n} + \ldots$. (12 баллов)

Решение. Функция определена при $x \neq -1$.

при $x = 0$ $y = 0$.

Для остальных значений x преобразуем данное в условии выражение:

$$y = x^5 + \frac{x^5}{1+x^5} + \frac{x^5}{(1+x^5)^2} + \frac{x^5}{(1+x^5)^3} + \ldots + \frac{x^5}{(1+x^5)^n} + \ldots =$$

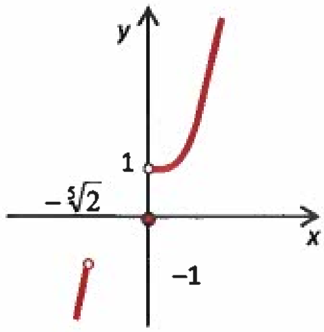
$$= x^5\left(1 + \frac{1}{1+x^5} + \frac{1}{(1+x^5)^2} + \frac{1}{(1+x^5)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+x^5)^n} + \ldots\right) =$$

по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^5}$,

сходящейся при $|q| = \left|\frac{1}{1+x^5}\right| < 1$,

$$= x^5\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^5}}\right) = \frac{x^5(1+x^5)}{1+x^5-1} = 1 + x^5.$$

Для определения промежутка, на котором это преобразование имеет место решим неравенство $\left|\frac{1}{1+x^5}\right| < 1$. Оно равносильно $1 < |1 + x^5|$, или

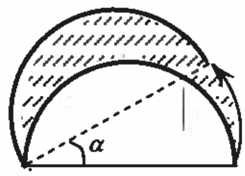


$\left[\begin{array}{l}1+x^5>1;\\1+x^5<-1\end{array}\right.$, то есть $\left[\begin{array}{l}x^5>0;\\x^5<-2,\end{array}\right.$ откуда следует $\left[\begin{array}{l}x>0;\\x<-\sqrt[5]{2}.\end{array}\right.$

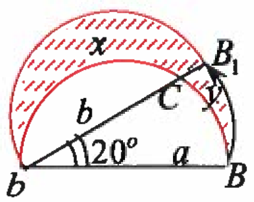
Окончательно:

$$y=\begin{cases}1+x^5, & x<-\sqrt[5]{2};\\0, & x=0;\\1+x^5, & x>0.\end{cases}$$

5. Найти площадь заштрихованной фигуры, описываемой полуокружностью, вращаемой относительно одного из концов на угол $\alpha=20^o$. (15 баллов)



Решение. Пусть площадь полукруга $S_0=\frac{\pi R^2}{2}$, площадь луночки $AB_1C=x$, луночки $CB_1B=y$ и сектора $ACB=a$. Тогда, если площадь сегмента AC равна b, то имеем: $x+b=S_0=b+a \Rightarrow x=a$.



Вся заштрихованная площадь равна $x+y=a+y$, но $a+y$ - это площадь кругового сектора ABB_1 радиуса $2R$. Таким образом, площадь $ABB_1=\frac{1}{2}(2R)^2\frac{\pi}{9}=\frac{2\pi R^2}{9}$.

Ответ. $\frac{2\pi R^2}{9}$.