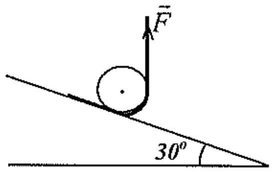
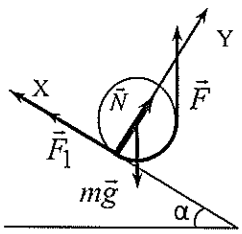
6. На наклонной плоскости с углом наклона 300 лежит цилиндр, масса которого равна 27 кг. Цилиндр удерживается в состоянии покоя с помощью огибающей его нити (см. рис.), один конец которой закреплен на наклонной плоскости, а другой конец натянут вертикально вверх с некоторой силой $\vec{F}$. Чему равна эта сила?
(5 баллов)



Решение. Так как тело в равновесии, момент силы $\vec{F}$ равен моменту силы, направленной по оси X (вдоль нити). Плечи сил одинаковы и равны радиусу цилиндра, следовательно, и сила, направленная вдоль огибающей цилиндр нити по оси X, по модулю равна F (см. рис.)



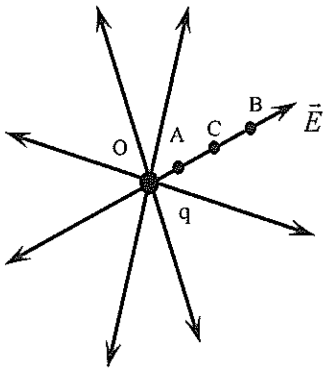
В проекциях на ОХ: $F + F\sin 30° = mg\sin 30°$. $F(1+\frac{1}{2}) = \frac{mg}{2}$.

$F = \frac{mg}{3} = \frac{27 \cdot 10}{3} = 90\,\text{Н}$.

Ответ: F =90Н.

7. Точки А, В, С расположены на одной линии напряжённости электростатического поля точечного заряда q_0, который находится в точке О. Расстояние ОВ больше, чем ОА (ОВ > ОА). В точке А величина напряжённости поля $E_A = 0{,}9 \cdot 10^5$ В/м, в точке В величина напряжённости поля $E_B = 0{,}3 \cdot 10^5$ В/м. Определите напряжённость поля в точке С, которая расположена посередине между точками А и В.
(8 баллов)

Решение. Вектор напряженности точечного заряда q в любой точке поля (A, B, C) направлен вдоль прямой, соединяющей эту точку и заряд q_0. Модуль напряженности



$$E_A = \frac{kq_0}{r_A^2};\ E_B = \frac{kq_0}{r_B^2},\ E_C = \frac{kq_0}{r_C^2} = \frac{kq_0}{\left(\frac{r_A + r_B}{2}\right)^2} = \frac{4kq_0}{(r_A + r_B)^2},$$

здесь r_A, r_B, r_C - расстояния от q_0 до A, B, C, а $r_C = \frac{r_A + r_B}{2}$.

Из этих формул получаем:

$$r_A^2 = \frac{kq_0}{E_A};\ r_B^2 = \frac{kq_0}{E_B};\ r_A = \sqrt{\frac{kq_0}{E_A}};\ r_B = \sqrt{\frac{kq_0}{E_B}}$$

Подставляем эти выражения в формулу для напряженности в точке C.

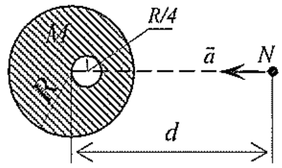
$$E_C = \frac{4kq_0}{\left(\sqrt{\frac{kq_0}{E_A}}+\sqrt{\frac{kq_0}{E_B}}\right)^2} = \frac{4kq_0}{\frac{kq_0}{E_A}+2\sqrt{\frac{k^2q_0^2}{E_AE_B}}+\frac{kq_0}{E_B}} = \frac{4kq_0}{kq_0\left(\frac{1}{E_A}+\frac{2}{\sqrt{E_AE_B}}+\frac{1}{E_B}\right)} =$$

$$= \frac{4E_AE_B}{E_A+2\sqrt{E_AE_B}+E_B} = \frac{4E_AE_B}{\left(\sqrt{E_A}+\sqrt{E_B}\right)^2}$$

$$E_C = \frac{4\cdot 0{,}9\cdot 10^5\cdot 0{,}3\cdot 10^5}{\left(\sqrt{0{,}9\cdot 10^5}+\sqrt{0{,}3\cdot 10^5}\right)^2} = 0{,}48\cdot 10^5\ В/м$$

Ответ: $E_C = 0{,}48\cdot 10^5$ В/м.

8. Масса большого однородного шара, в котором имеется сферическая полость радиуса R/4, равна М. Радиус шара R. (см. рис.). Определите ускорение свободного падения в точке N, находящейся на расстоянии d от центра шара.
(10 баллов)



Решение. Целый шар (когда полость не вырезана) массой Мо взаимодействует с шаром массой m с силой: $\vec{F}_O = \vec{F} + \vec{F}_П$. Так как силы действуют по одной прямой $F_O = F + F_П$.
Масса большого шара, целого (без полости) $M_o = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$

Масса полостей: $M_n = \rho\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{64}$, отсюда $\frac{M_n}{M_o} = \frac{1}{64} \Rightarrow M_n = \frac{M_o}{64}$

Тогда масса большого шара с полостью: $M = M_o - M_n = M_o - \frac{M_o}{64} = \frac{63M_o}{64} \Rightarrow M_o = \frac{64M}{63}$,

$M_n = \frac{1}{63}M$ Модуль силы гравитационного притяжения между шарами массой М и m:

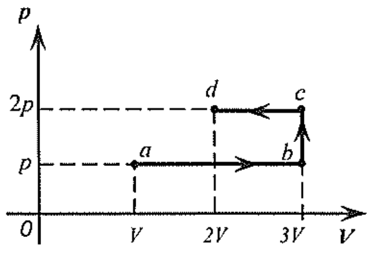
$F = F_o - F_n$

$$F = \left[\frac{G\cdot M_o\cdot m}{d^2} - \frac{G\cdot M_n\cdot m}{\left(d-\frac{R}{4}\right)^2}\right] = \frac{G\cdot M_o\cdot m}{63}\left[\frac{64}{d^2} - \frac{16}{(4d-R)^2}\right] = \frac{16\cdot G\cdot M\cdot m}{63}\cdot\left[\frac{4}{d^2} - \frac{1}{(4d-R)^2}\right]$$

Ответ: ускорение свободного падения в точке N: $a = \frac{F}{m} = \frac{GM}{63}\left(\frac{64}{d^2} - \frac{1}{(d-R/4)^2}\right)$

или $a = \frac{16\cdot G\cdot M}{63}\cdot\left[\frac{4}{d^2} - \frac{1}{(4d-R)^2}\right]$

9. На рисунке представлен процесс совершённый с одним молем идеального одноатомного газа. Разность между максимальной и минимальной температурой в процессе 200 К. Определите количество подведенного к газу тепла.
(12 баллов)



Решение. Согласно первому началу термодинамики $Q = \Delta U + A$.
Из рисунка, работа численно равна площади под графиком процесса на соответствующем участке.

$A_{ab} = p \cdot 2V$. $A_{cd} = -2p \cdot V$. Соответственно $A = A_{ab} + A_{cd} = 0$.

Изменение внутренней энергии для идеального газа $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_d - T_a)$.

Уравнения состояния для указанных на графике точек. $pV = RT_a$, $3pV = RT_b$, $6pV = RT_c$, $4pV = RT_d$.

Из этих равенств можно записать: $T_a < T_b < T_d < T_c$. Самая низкая температура T_a, а самая высокая T_c.

Отсюда $T_d = \frac{4p_0V_0}{R}$, $T_a = \frac{p_0V_0}{R}$, $T_c = \frac{6p_0V_0}{R}$.

Отношение общего изменения температуры к максимальному составляет

$\frac{T_d - T_a}{T_c - T_a} = \frac{\frac{4pV}{R} - \frac{pV}{R}}{\frac{6pV}{R} - \frac{pV}{R}} = \frac{3}{5}$, следовательно $T_d - T_a = \frac{3}{5}(T_c - T_a) = \frac{3}{5}\Delta T$.

Так как $A = 0$, то изменение внутренней энергии будет равно подведенному теплу.

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_d - T_a) = \frac{3}{2}\cdot\nu\cdot R\cdot\frac{3}{5}\Delta T = \frac{9}{10}\cdot\nu\cdot R\Delta T = 0{,}9\cdot 1\cdot 8{,}31\cdot 200 = 1500\,Дж$$

Ответ: $Q = 1500\,Дж$

10. Подземная добыча угля сопровождается образованием выработанного пространства (полости). При внезапном обрушении (или проседании) кровли над отработанными участками угольного пласта, даже незначительное повышение температуры в результате сжатия метано-воздушной смеси в выработанном пространстве может привести к взрыву. Внезапность процесса позволяет, в рамках модельных представлений, считать условия сжатия газа адиабатическими, высоту полости под всей площадью кровли одинаковой, газ идеальным, а поверхность кровли при обрушении горизонтальной. Определите относительное повышение температуры газа при его адиабатическом сжатии под действием кровли толщиной H, если показатель адиабаты γ, начальное давление Pн, плотность горных пород ρ, ускорение свободного падения g, а объём выработанного пространства уменьшился в k раз. (Внутренняя энергия многоатомного газа U=(νRT)/(γ -1)).
(15 баллов)

Решение. При проседании кровли сила тяжести совершает работу $A = mg\Delta h = \rho SHg\Delta h$.

Изменение объема газа в выработанном пространстве $\Delta V = V_1 - V_2 = S\Delta h$, следовательно $A = \rho\cdot g\cdot H\cdot(V_1 - V_2) = \rho\cdot g\cdot H\cdot V_1\cdot\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)$.

(Индексы 1,2 – соответствуют начальному и конечному состояниям).

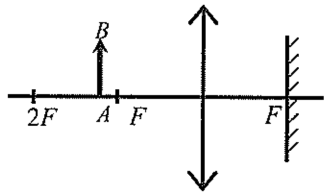
С другой стороны, при адиабатическом сжатии работа газа в соответствии с первым законом термодинамики $A = U_1 - U_2$.

Так как $U_1=(\nu RT_1)/(\gamma -1))=(P_1\cdot V_1)/(\gamma -1)$, $U_2=(\nu RT_2)/(\gamma -1))=(P_2\cdot V_2)/(\gamma -1)$, и, учитывая, что при адиабатическом процессе $PV^\gamma = TV^{\gamma-1} = const$, то работа газа

$A = -\frac{P_1\cdot V_1}{(\gamma-1)}\cdot\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma}\right] = \frac{P_1\cdot V_1}{\gamma-1}\cdot\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$. Или, используя для двух состояний соотношение $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$, получим $A = \frac{P_1\cdot V_1}{\gamma-1}\cdot\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]$. Отсюда $\frac{P_1\cdot V_1}{\gamma-1}\cdot\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right] = \rho\cdot g\cdot H\cdot V_1\cdot\left[1 - \frac{V_2}{V_1}\right]$.

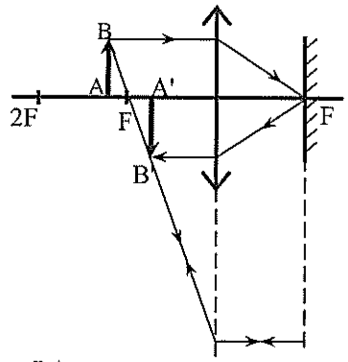
Ответ: относительное изменение температуры $\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{(k-1)(\gamma-1)\cdot\rho\cdot g\cdot H}{k\cdot P_H}$

6. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием F и плоского зеркала в фокальной плоскости линзы. Предмет AB находится на расстоянии (1/4)F от фокуса (см. рис.). Определите, на каком расстоянии от предмета находится его изображение.



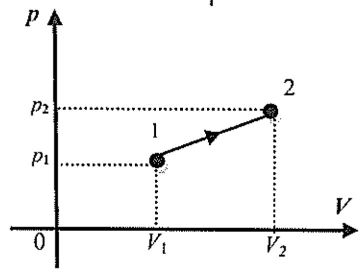
(5 баллов)

Решение. Выберем два луча выходящие из точки ***B*** и проследим за их прохождением через систему (см. рис.). После отражения от зеркала точка пересечения лучей $\boldsymbol{B_1}$ является изображением точки ***B***. Изображение A_1B_1 действительное, расположено между линзой и передним фокусом. Из треугольников ABF и A_1B_1F (равны по углу и катету) $AF = A_1F$. Следовательно, т.к. по условию $AF=1/4$, то расстояние от предмета до изображения $AA_1= 1/2F$.



Ответ: AA_1= 1/2F.

7. В тепловом процессе, в котором абсолютная температура газа T связана с объемом V соотношением $T = kV^2$ (k – постоянная величина), идеальному одноатомному газу подвели тепло Q = 8 кДж. Найти совершенную газом работу.



(8 баллов)

Решение. По условию $T = \alpha V^2$. Подставим выражение для температуры в уравнение состояния идеального газа $pV = \frac{m}{M}RT$, получим

$$pV = \frac{mR}{M}\alpha V^{2-1} = \frac{mR}{M}\alpha V = \frac{mR\alpha}{M}V.$$

Обозначим $\frac{mR\alpha}{M} = \beta$, тогда $p = \beta \cdot V$, где β - *const.*

Площадь под графиком *P(V)* численно равна работе. Из рисунка $A = \frac{p_1 + p_2}{2}\cdot(V_2 - V_1) = \frac{p_1V_2 + p_2V_2 - p_1V_1 - p_2V_1}{2}$.

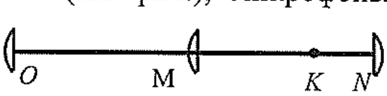
Так как $p_1 = \beta V_1$, а $p_2 = \beta V_2$, то $A = \frac{\beta V_1V_2 + p_2V_2 - p_1V_1 - \beta V_2V_1}{2} = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V) = \frac{1}{2}(\frac{m}{M}RT_2 - \frac{m}{M}RT_1) =$

$$= \frac{1}{2}\frac{m}{M}R(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}\frac{m}{M}R\Delta T.$$

Для одноатомного газа изменение внутренней энергии равно $\Delta U = \frac{3}{2}R\Delta T$. Согласно первому закону термодинамики $Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R\Delta T + \frac{1}{2}\frac{m}{M}R\Delta T = 2\frac{m}{M}R\Delta T$. Следовательно, $A = \frac{1}{4}Q$=0,25·8·10^3 =2·10^3 Дж

Ответ: А = 2·10^3 Дж.

8. Во время летней практики, изучая процессы распространения звуковых волн, студенты установили три микрофона в пунктах O, M, N, находящиеся на одной прямой. Звук от взрыва на карьере, который находится в пункте K (см. рис.), микрофоны последовательно зарегистрировали в моменты времени t_O, t_M, t_N, причём $t_O>t_M>t_N$. Учитывая, что расстояния $OM=MN$ и равны L, определите расстояние от пункта O до карьера и момент времени когда произошёл взрыв.



(10 баллов)

Решение. Обозначим время в момент взрыва $t_к$, υ - скорость звука.
Время когда зарегистрирован звук в точке О: $t_O = t_к + \frac{OK}{\upsilon}$. (1)

Время когда зарегистрирован звук в точке М: $t_M = t_к + \frac{L-KN}{\upsilon}$. (2)

Время – в точке N: $t_N = t_к + \frac{KN}{\upsilon}$. (3)

Из условия т.к. OM=MN=L следует OK+KN=2L. (4)
В системе из 4-ех уравнений, 4-ре неизвестных. Вычтем из 1-го ур-ния 2-ое, получим:
$t_o - t_M = \frac{L}{\upsilon} + \frac{OK+KN}{\upsilon} = \frac{L}{\upsilon}$ (5). Отсюда $\upsilon = \frac{L}{t_o - t_M}$. (6)

Вычтем из 2-го ур-ния 3-е, получим: $t_M - t_N = \frac{L}{\upsilon} - \frac{2 \cdot KN}{\upsilon}$. (7)

Выразим из 4-го: OK= 2L-KN и подставим в 1-ое. Получим: $t_O = t_к + \frac{2L}{\upsilon} - \frac{KN}{\upsilon}$ (8) .

Из 7 и 8 исключим KN и подставив $\upsilon = \frac{L}{t_o - t_M}$, получим время когда произошел взрыв, и

используя (1) и (6), получим расстояние от точки O до карьера т.е. OK

Ответ: $t_к = t_M - \frac{1}{2}(t_O - t_N)$, $OK = L\frac{3 \cdot t_o - 2t_M - t_N}{2(t_o - t_M)}$.

9. Тонкий пучок протонов в количестве *n* частиц, движется в ускорителе по окружности радиуса *R*. Линии магнитного поля в ускорителе перпендикулярны траектории движения протонов. В начальный момент времени сила тока протонного пучка в камере ускорителя равна I_0. Частицы ускоряются за счет постоянной скорости изменения потока индукции магнитного поля через орбиту протонного пучка, равной $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \varepsilon$. Определите силу тока пучка после того, как протоны сделали один оборот. Считать скорость протонов значительно меньше скорости света в вакууме. Масса протона m_p заряд протона *e*.
(12 баллов)

Решение. Работа вихревого электрического поля: $A = q \cdot \varepsilon_{инд} = e\varepsilon_{инд.} = e\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

С другой стороны работа затрачивается на изменение кинетической энергии протона,
$A = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} \Rightarrow q \cdot \varepsilon = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2}$. *(Учтено, что по условию $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \varepsilon$).*

Отсюда $\upsilon = \sqrt{\frac{2e\varepsilon}{m} + \upsilon_0^2}$. Время одного оборота $t = \frac{2\pi R}{\upsilon}$. Сила тока протонного пучка в камере

ускорителя: $I = \frac{q}{t} = \frac{ne\upsilon}{2\pi R} = \frac{ne}{2\pi\upsilon}\sqrt{\frac{2e\varepsilon}{m} + \upsilon_0^2}$. Учитывая, что в начальный момент времени сила

тока протонного пучка в камере ускорителя $I_0 = \frac{ne\upsilon_0}{2\pi R}$, получим $I = \left(I_0^2 + \frac{n^2 e^3 \varepsilon}{2\pi^2 m R^2}\right)^{1/2}$

Ответ: $I = \left(I_0^2 + \frac{n^2 e^3 \varepsilon}{2\pi^2 m R^2}\right)^{1/2}$

10. На угольной шахте, отработанный участок угольного пласта представляет собой полость, заполненную метано-воздушной смесью и угольной пылью. При внезапном обрушении (или проседании) кровли над выработанным пространством в результате сжатия газа даже незначительное повышение температуры может привести к взрыву. В

рамках модельных представлений, учитывая внезапность процесса, принять условия сжатия газа под действием кровли толщиной H адиабатическими, высоту полости под всей площадью кровли одинаковой, а поверхность кровли при обрушении горизонтальной. Определите начальное давление, если относительное повышение температуры газа при его адиабатическом сжатии равно k, показатель адиабаты γ, плотность горных пород ρ, ускорение свободного падения g, а относительное изменение объёма выработанного пространства равно β. (Внутренняя энергия многоатомного газа $U=(\nu RT)/(\gamma -1)$).

(15 баллов)

Решение. При проседании кровли сила тяжести совершает работу $A = mg\Delta h = \rho SHg\Delta h$.

Изменение объема газа в выработанном пространстве $\Delta V = V_1 - V_2 = S\Delta h$, следовательно $A = \rho \cdot g \cdot H \cdot (V_1 - V_2) = \rho \cdot g \cdot H \cdot V_1 \cdot \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)$.

(Индексы 1,2 – соответствуют начальному и конечному состояниям).

С другой стороны, при адиабатическом сжатии работа газа в соответствии с первым законом термодинамики $A = U_1 - U_2$.

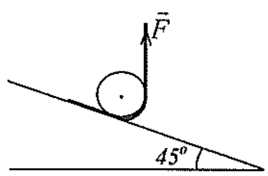
Так как $U_1=(\nu RT_1)/(\gamma -1)=(P_1 \cdot V_1)/(\gamma -1)$, $U_2=(\nu RT_2)/(\gamma -1)=(P_2 \cdot V_2)/(\gamma -1)$, и, учитывая, что при адиабатическом процессе $PV^{\gamma} = TV^{\gamma-1} = const$, то работа газа

$A = -\frac{P_1 \cdot V_1}{(\gamma - 1)} \cdot \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma}\right] = \frac{P_1 \cdot V_1}{\gamma - 1} \cdot \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$. Или, используя для двух состояний соотношение $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$, получим $A = \frac{P_1 \cdot V_1}{\gamma - 1} \cdot \left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]$. Следовательно $\frac{P_1}{\gamma - 1} \cdot \left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right] = \rho \cdot g \cdot H \cdot \left[1 - \frac{V_2}{V_1}\right]$.

Отсюда, начальное давление $P_1 = \frac{\beta \cdot (\gamma - 1)\rho g H}{k}$.

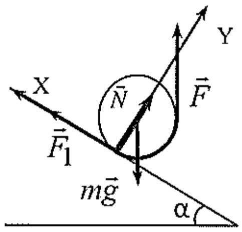
Ответ: $P_1 = \frac{\beta \cdot (\gamma - 1)\rho g H}{k}$.

6. На наклонной плоскости с углом наклона 45^0 лежит цилиндр. Цилиндр удерживается в состоянии покоя с помощью огибающей его нити (см. рис.), один конец которой закреплен на наклонной плоскости, а другой конец натянут вертикально вверх с силой F=90 Н. Чему равен вес цилиндра?



(5 баллов)

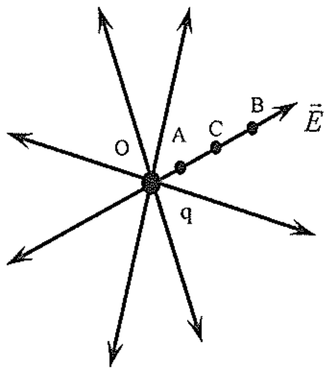
Решение. Так как тело в равновесии, момент силы $\vec{F}$ равен моменту силы, направленной по оси X (вдоль нити). Плечи сил одинаковы и равны радиусу цилиндра, следовательно, и сила, направленная вдоль огибающей цилиндр нити по оси X, по модулю равна F (см. рис.)



В проекциях на OY: $N+F\cdot cos\cdot\alpha - mgcos\cdot\alpha=0$. В проекциях на вертикаль $F + F\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = 0$. Решая совместно и, учитывая, что в состоянии покоя вес равен по модулю и по направлению силе тяжести:
$P = mg = F + \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{2\cdot 90}{\sqrt{2}} + 90 = 217H$. (Можно проще, из проекции на ОХ получить указанную формулу, обосновав, что $\vec{P} = m\vec{g}$).

Ответ: F =217Н.

7. Точечный заряд q_0 находится в точке O. Точки A, B, C расположены на одной линии напряжённости электростатического поля точечного заряда q_0, причём расстояние OB больше, чем OA ($OB > OA$). В точке C, которая расположена посередине между точками A и B величина напряжённости поля E_C=0,48·10^5 В/м, в точке B величина напряжённости поля E_B=0,3·10^5 В/м. Определите напряжённость поля в точке А.



(8 баллов)

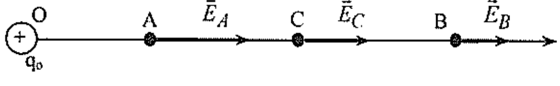
Решение. Вектор напряженности точечного заряда q_o в любой точке поля (A, B, C) направлен вдоль прямой, соединяющей эту точку и заряд q_0. Модуль напряженности

$$E_C = \frac{kq_0}{r_C^2};\ E_B = \frac{kq_0}{r_B^2},\ E_A = \frac{kq_0}{r_A^2} = \frac{kq_0}{(2r_C - r_B)^2},$$

здесь r_A, r_B, r_C - расстояния от q_0 до A, B, C, а $r_A = 2r_C - r_B$.

Из этих формул получаем:

$$r_C^2 = \frac{kq_0}{E_C};\ r_B^2 = \frac{kq_0}{E_B};\ r_C = \sqrt{\frac{kq_0}{E_C}};\ r_B = \sqrt{\frac{kq_0}{E_B}}$$



Подставляем эти выражения в формулу для напряженности в точке C.

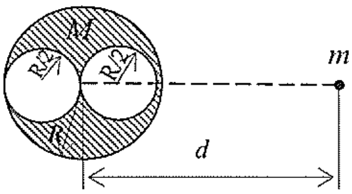
$$E_A = \frac{kq_0}{\left(2\sqrt{\frac{kq_0}{E_C}} - \sqrt{\frac{kq_0}{E_B}}\right)^2} = \frac{kq_0}{4\frac{kq_0}{E_C} - 4\sqrt{\frac{k^2q_0^2}{E_CE_B}} + \frac{kq_0}{E_B}} = \frac{kq_0}{kq_0\left(\frac{4}{E_C} - \frac{4}{\sqrt{E_CE_B}} + \frac{1}{E_B}\right)} =$$

$$= \frac{E_CE_B}{4E_B - 4\sqrt{E_CE_B} + E_C} = \frac{E_CE_B}{\left(2\sqrt{E_B} - \sqrt{E_C}\right)^2}$$

$$E_A \approx \frac{0{,}48 \cdot 10^5 \cdot 0{,}3 \cdot 10^5}{\left(2\sqrt{0{,}3 \cdot 10^5} - \sqrt{0{,}48 \cdot 10^5}\right)^2} = 0{,}9 \cdot 10^5 \, В/м$$

Ответ: $E_A = 0{,}9 \cdot 10^5$ В/м.

8. На расстоянии d от центра большого однородного шара массой M, в котором имеются две сферические полости радиусом $R/2$, находится материальная точка массой m (см. рис.). Радиус большого шара R. Найдите силу F притяжения между большим шаром и материальной точкой.



(10 баллов)

Решение. Целый шар (когда полости не вырезаны) массой M_o взаимодействует с материальной точкой массой m с силой: $\vec{F}_o = \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Масса целого шара $M_o = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$. Масса полостей: $M_1 = \rho \frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{8}$, $M_2 = \rho \frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{8} \Rightarrow \frac{M_1}{M_o} = \frac{1}{8}$, $\frac{M_2}{M_o} = \frac{1}{8}$

Тогда $M = M_o - \frac{M_o}{8} - \frac{M_o}{8} = \frac{3}{4} M_0 \Rightarrow$ $M_o = \frac{4}{3} M$

Так как силы действуют по одной прямой, модуль силы гравитационного притяжения между массами M и m: $F = F_o - F_1 - F_2$

$$F = \left[\frac{G \cdot M_o \cdot m}{d^2} - \frac{G \cdot M_1 \cdot m}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} - \frac{G \cdot M_2 \cdot m}{\left(d + \frac{R}{2}\right)^2}\right] = \left[\frac{G \cdot M_o \cdot m}{d^2} - \frac{G \cdot M_o \cdot m}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} - \frac{G \cdot M_o \cdot m}{8\left(d + \frac{R}{2}\right)^2}\right] =$$

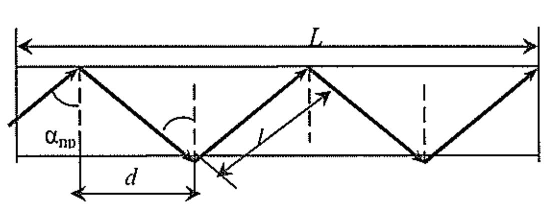
$$= \frac{4}{3} G \cdot M \cdot m \cdot \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{2(2d - R)^2} - \frac{1}{2(2d + R)^2}\right]$$

Ответ: $F = \frac{2 \cdot G \cdot M \cdot m}{3} \cdot \left[\frac{2}{d^2} - \frac{1}{(2d - R)^2} - \frac{1}{(2d + R)^2}\right]$.

9. Нефтегазовая отрасль широко использует волоконно-оптические технологии для контроля и измерения различных параметров в скважинах. Измеряемый параметр преобразуется в оптический сигнал, передающийся по оптическому волокну. Так, например, световой луч посланный по оптоволоконному кабелю с поверхности земли возвращается обратно с информацией о контролируемых параметрах в скважине глубиной 630 м. Определите время (в микросекундах), в течение которого луч света распространялся в оптическом волокне. Угол полного внутреннего отражения для боковой границы волокно-воздух 30 градусов.

(12 баллов)

Решение. На рисунке схема распространения луча в оптоволокне. Величина N - количество одинаковых фрагментов (т. е. прямоугольных треугольников), L - длина оптоволоконного кабеля (равная длине скважины), $\alpha_{пр}$ - предельный угол полного внутреннего отражения. При других углах падения луча на стенку, меньших чем $\alpha_{пр}$, луч не остаётся внутри кабеля.



Из рисунка $d = \frac{L}{N}$, $l = \frac{d}{\sin\alpha_{пр}} = \frac{L}{N \cdot \sin\alpha_{пр}}$

Время движения луча в одном направлении: $t_1 = \frac{l \cdot N}{c} = \frac{L}{c \cdot \sin\alpha_{пр}}$.

Так как луч возвращается обратно, то время, в течении которого луч распространяется в оптоволокне:

$$t = \frac{2 \cdot L}{c \cdot \sin\alpha_{пр}} = \frac{2 \cdot 630}{3 \cdot 10^8 \cdot \sin 30^0} = 8{,}4 \text{ мкс}$$

Ответ: t = 8,4 мкс.

10. Подземная добыча угля сопровождается образованием выработанного пространства (полости), заполненного газо-воздушной смесью. При внезапном обрушении (или проседании) кровли над отработанными участками угольного пласта, в результате сжатия газо-воздушной смеси изменяются термодинамические условия в выработанном пространстве. Внезапность процесса позволяет, в рамках модельных представлений, считать условия сжатия газа адиабатическими, высоту полости под всей площадью кровли одинаковой, а поверхность кровли при обрушении горизонтальной. Определите толщину H кровли, если при её внезапном проседании, произошло относительное повышение температуры газа при его адиабатическом сжатии равное α, а объём выработанного пространства уменьшился в β раз. Начальное давление P_0, показатель адиабаты γ, плотность горных пород ρ, ускорение свободного падения g. (Внутренняя энергия многоатомного газа $U=(\nu RT)/(\gamma -1)$).
(15 баллов)

Решение. При проседании кровли сила тяжести совершает работу $A = mg\Delta h = \rho SHg\Delta h$.
Изменение объема газа в выработанном пространстве $\Delta V = V_1 - V_2 = S\Delta h$, следовательно $A = \rho \cdot g \cdot H \cdot (V_1 - V_2) = \rho \cdot g \cdot H \cdot V_1 \cdot \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)$.
(Индексы 1,2 – соответствуют начальному и конечному состояниям).
С другой стороны, при адиабатическом сжатии работа газа в соответствии с первым законом термодинамики $A = U_1 - U_2$.
Так как $U_1=(\nu RT_1)/(\gamma -1)=(P_1 \cdot V_1)/(\gamma -1)$, $U_2=(\nu RT_2)/(\gamma -1)=(P_2 \cdot V_2)/(\gamma -1)$, и, учитывая, что при адиабатическом процессе $PV^\gamma = TV^{\gamma-1} = const$, то работа газа
$A = -\frac{P_1 \cdot V_1}{(\gamma-1)} \cdot \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma}\right] = \frac{P_1 \cdot V_1}{\gamma - 1} \cdot \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$. Или, используя для двух состояний соотношение $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$, получим $A = \frac{P_1 \cdot V_1}{\gamma-1} \cdot \left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]$. Следовательно $\frac{P_1}{\gamma-1} \cdot \left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right] = \rho \cdot g \cdot H \cdot \left[1 - \frac{V_2}{V_1}\right]$.

Отсюда, толщина кровли $H = \frac{\left[\frac{\Delta T}{T_1}\right] \cdot P_1}{\left[1 - \frac{V_2}{V_1}\right] \cdot (\gamma-1) \cdot \rho \cdot g} = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot P_0}{(\beta-1) \cdot (\gamma-1) \cdot \rho \cdot g}$

Ответ: $H = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot P_0}{(\beta-1) \cdot (\gamma-1) \cdot \rho \cdot g}$.

6. Автомобиль движется равноускоренно по горизонтальной дороге и достигает скорости υ. Во сколько раз отличаются работа, совершаемая двигателем при разгоне из состояния покоя до скорости $\upsilon/2$ и работа совершаемая двигателем при разгоне от $\upsilon/2$ до υ?
(5 баллов)

Решение. Работа связана с кинетической энергией соотношением $A = \frac{m\upsilon_K^2}{2} - \frac{m\upsilon_H^2}{2}$

На первом участке дороги начальная скорость в состоянии покоя (по условию) равна нулю.

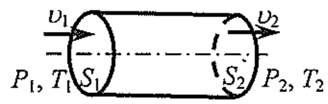
$\upsilon_н=0$. Скорость в конце участка $\upsilon_к= \upsilon/2$. Работа двигателя на первом участке $A_1 = \frac{m\upsilon_K^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{8}$

Для второго участка начальная скорость равна $\upsilon_н= \upsilon/2$, а скорость в конце пути $\upsilon_к= \upsilon$.

Работа двигателя на втором участке $A_2 = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon^2}{8} = \frac{3m\upsilon^2}{8}$ Отношение работ $\frac{A_1}{A_2} = \frac{m\upsilon^2 8}{8\cdot 3\cdot m\upsilon^2} = \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{3}$.

7. Для снабжения промышленных и коммунально-бытовых потребителей по газопроводу переменного сечения осуществляется подача природного газа на газораспределительную станцию. Входное сечение газопровода имеет площадь S_1 , выходное - S_2 (см. рис.). На входе в газопровод термодинамические параметры газа температура T_1 и давление P_1 , скорость газа постоянна и равна υ_1. На выходе - температура T_2, давление P_2. Определите скорость газа в выходном сечении, считая газ идеальным.

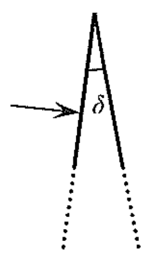


(8 баллов)

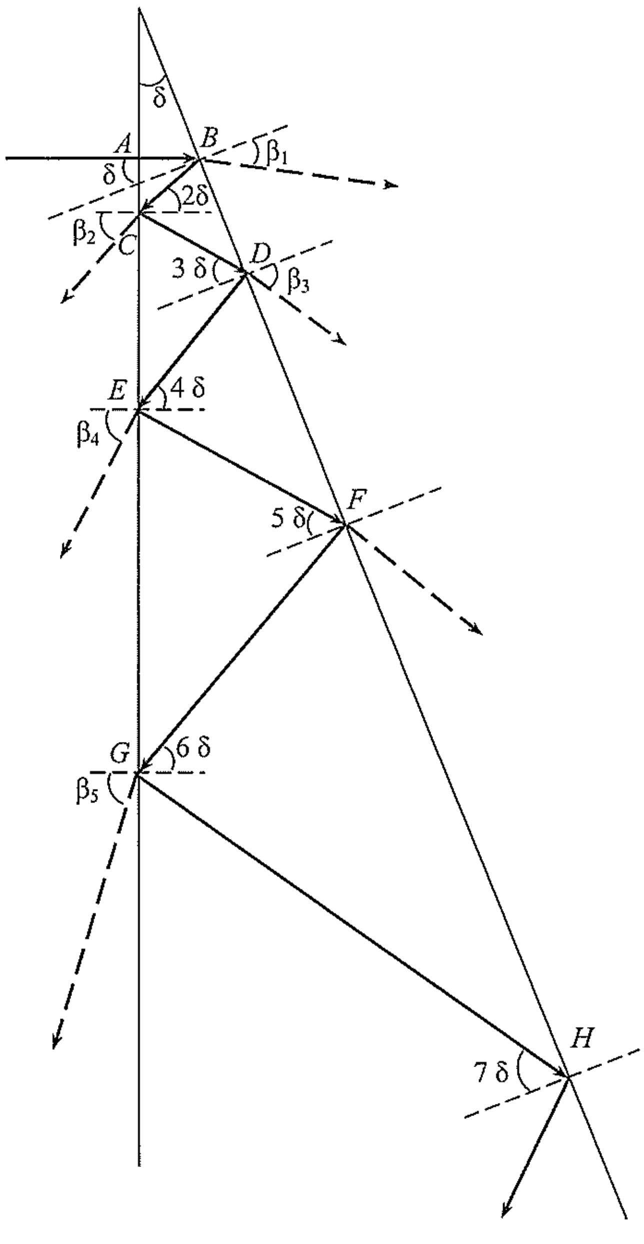
Решение. За время t в газопровод входит объем природного газа $V_1 = S_1\, \upsilon_1\, t$, а выходит $V_2 = S_2\, \upsilon_2\, t$. Масса газа при этом не изменяется. Так как по условию газ идеальный, то из уравнения состояния идеального газа следует $p_1V_1/\ T_1 = p_2V_2/\ T_2$. Подставив в это равенство выражения для объёмов получим $\upsilon_1\cdot\ (P_1T_2S_1) = \upsilon_2(P_2T_1S_2)$. Скорость газа в выходном сечении $\upsilon_2 = \upsilon_1\cdot\ (P_1T_2S_1)/\ (P_2T_1S_2)$

Ответ: $\upsilon_2 = \upsilon_1\cdot\ (P_1T_2S_1)/\ (P_2T_1S_2)$

8. Тонкий луч света падает на стеклянный клин перпендикулярно его грани. Преломляющий угол клина δ = 5^0, показатель преломления стекла n = 1,95 Справа и слева от клина поставили экраны. Сколько светлых пятен будет видно на экранах.



(10 баллов)



Решение. Луч света падает на клин в точке *A* перпендикулярно левой грани в направлении *AB*. Строим ход луча внутри и вне клина в соответствии с законами отражения и преломления света. Луч отражается и преломляется на гранях клина в точках *B, C, D, E, F, G, H* (см. рис.).

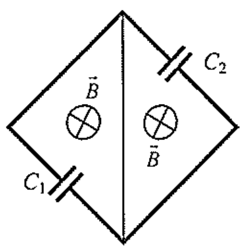
Используя закон отражения света и (из геометрии) тот факт, что накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей равны, для углов падения луча в указанных точках получим следующие величин: $\angle B = \delta$, $\angle C = 2\delta$, $\angle D = 3\delta$, $\angle E = 4\delta$, $\angle F = 5\delta$, $\angle G = 6\delta$, $\angle H = 7\delta$.

Число вышедших из клина лучей ограничено углом полного внутреннего отражения α_0, который из формулы $\sin \alpha_{\text{ПР}} = 1/n$ равен $\alpha_{\text{ПР}} = \arcsin(1/n) = \arcsin(1/1{,}95) = 30^\circ 48' \approx 31^\circ$. Подставляя значения преломляющего угла призмы $\delta = 5^\circ$, получим, что в точках *B, C, D, E, F, G,* свет выйдет из стекла в воздух, так как все углы падения луча в этих точках меньше $\alpha_{\text{ПР}}$. В точке *H*, ($\angle H = 7\delta = 35^\circ$) будет наблюдаться полное внутреннего отражение и луч уже не выйдет из клина.

На экране справа и слева от клина будет видно по три светлых пятна.

Ответ: На экранах 6 светлых пятен

9. Проволочный квадрат со стороной L имеет проводящую перемычку, расположенную по диагонали (см. рис.). В левую и правую части квадрата включены конденсаторы с ёмкостями C_1 и C_2. Квадрат помещён в нарастающее линейно со временем магнитное поле с индукцией $B(t)=B_0 \cdot t/T$, перпендикулярное его плоскости. В некоторый момент времени перемычку убирают и прекращают изменять магнитное поле. Определите установившиеся заряды на конденсаторах.



(12 баллов)

До удаления перемычки.

По закону Фарадея, в первом контуре: $\varepsilon_1 = \dfrac{q_1}{C_1} = \dfrac{\Delta\Phi_1}{\Delta t}$

Учитывая, что из условия $\Delta B(t)=B_0 \cdot \Delta t/T)$ получим, $\varepsilon_1 = \dfrac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = S\dfrac{B_0}{T}$.

Аналогично для второго контура: $\varepsilon_2 = \dfrac{q_2}{C_2} = \dfrac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = -S\dfrac{B_0}{T}$. (ε<0)

Отсюда величины зарядов до удаления перемычки $q_1 = \frac{S}{T} B_0 C_1$, $q_2 = -\frac{S}{T} B_0 C_2$.

После удаления перемычки.

По закону сохранения заряда: $q_1' + q_2' = q_1 + q_2 = \frac{S}{T} B_0 (C_1 - C_2)$.

q_1', q_2' – величины зарядов после удаления перемычки, S – площадь каждого контура.

Из равенства потенциалов на обкладках конденсаторов $q_1'/C_1 = q_2'/C_2$ и, так как $S = \frac{L^2}{2}$,

получим

Ответ: $q_1' = \frac{L^2 B_0 C_1}{2T}\left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)$, $q_2' = \frac{L^2 B_0 C_2}{2T}\left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)$.

10. Подземная добыча угля сопровождается образованием выработанного пространства (полости). Внезапное обрушение (или проседании) кровли над отработанными участками угольного пласта приводит к повышению температуры в результате сжатия метано-воздушной смеси, заполняющей выработанное пространство. Это влияет на безопасность разработки месторождения. Внезапность процесса позволяет, в рамках модельных представлений, считать условия сжатия газа адиабатическими, высоту полости под всей площадью кровли одинаковой, а поверхность кровли при обрушении горизонтальной. Определите относительное повышение температуры газа при его адиабатическом сжатии под действием кровли толщиной H, если показатель адиабаты γ, начальное давление P_0, плотность горных пород ρ, ускорение свободного падения g, а относительное изменение объёма выработанного пространства равно k. (Внутренняя энергия многоатомного газа $U=(\nu RT)/(\gamma -1)$).

(15 баллов)

Решение. При проседании кровли сила тяжести совершает работу $A = mg\Delta h = \rho SHg\Delta h$.

Изменение объема газа в выработанном пространстве $\Delta V = V_1 - V_2 = S\Delta h$, следовательно $A = \rho \cdot g \cdot H \cdot (V_1 - V_2) = \rho \cdot g \cdot H \cdot V_1 \cdot \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)$.

(Индексы 1,2 – соответствуют начальному и конечному состояниям).

С другой стороны, при адиабатическом сжатии работа газа в соответствии с первым законом термодинамики $A = U_1 - U_2$.

Так как $U_1=(\nu RT_1)/(\gamma -1)=(P_1 \cdot V_1)/(\gamma -1)$, $U_2=(\nu RT_2)/(\gamma -1)=(P_2 \cdot V_2)/(\gamma -1)$, и, учитывая, что при адиабатическом процессе $PV^\gamma = TV^{\gamma-1} = const$, то работа газа

$A = -\frac{P_1 \cdot V_1}{(\gamma - 1)} \cdot \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma}\right] = \frac{P_1 \cdot V_1}{\gamma - 1} \cdot \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$. Или, используя для двух состояний соотношение $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$, получим $A = \frac{P_1 \cdot V_1}{\gamma - 1} \cdot \left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]$. Следовательно $\frac{P_1}{\gamma - 1} \cdot \left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right] = \rho \cdot g \cdot H \cdot \left[1 - \frac{V_2}{V_1}\right]$.

Отсюда, относительное изменение температуры $\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{\left[\frac{\Delta V}{V_1}\right] \cdot (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot g \cdot H}{P_1} = \frac{k \cdot (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot g \cdot H}{P_0}$

Ответ: $\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{k \cdot (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot g \cdot H}{P_0}$.