Отборочный этап (Онлайн-этап) олимпиады «Phystech.International» 2016/17 по математике

Распределение задач по классам

11 класс	10 класс	9 класс
1	1	15
2	11	17
3	3	1
4	4	3
5	5	11
6	6	16
7	7	6
8	8	14
9	12	12
10	13	13

1. Найдите наименьшее натуральное *a* такое, что выражение param1 делится на param2.

Find the smallest positive integer *a* such that param1 is divisible by param2.

param1	param2	
$a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)$	10^6	
$a(a+6)(a+12)(a+18)(a+24)$	10^7	
$a(a+14)(a+28)(a+42)(a+56)$	10^6	
$a(a+18)(a+36)(a+54)(a+72)$	10^7	

Условие.

Найдите наименьшее натуральное *a* такое, что выражение $a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)$ делится на 10^6.

2. Известно, что $x + y$ = param1. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\sqrt[4]{8x^3y^3(x^2+y^2)}$?

It is known that $x + y$ = param1. What is the maximum possible value of $\sqrt[4]{8x^3y^3(x^2+y^2)}$?

param1	
9	
11	
13	
15	
17	

Условие.
Известно, что $x + y = 9$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\sqrt[4]{8x^3y^3(x^2+y^2)}$?

3. Известно, что для положительных чисел a, b, c каждое из трех уравнений
ax^2+param1bx+c=0,
bx^2+param1cx+a=0,
cx^2+param1ax+b=0
имеет хотя бы один действительный корень.
Каково наименьшее значение произведения корней второго уравнения, если произведение корней первого уравнения равно param2? (Если уравнение имеет два совпадающих корня, то произведение считается равным квадрату этого корня).

Let a, b, c be positive numbers. Each of the equations
ax^2+param1bx+c=0,
bx^2+param1cx+a=0,
cx^2+param1ax+b=0
has at least one real root.

What is the smallest possible value for the product of roots of the second equation if the product of roots of the first equation is equal to param2? (If the equation has only one root let the product be equal to this root squared.)

param1	param2	
10	6	
20	7	
12	9	
8	14	
15	18	

Условие.

Известно, что для положительных чисел *a*, *b*, *c* каждое из трех уравнений
$ax^2+10bx+c=0$,
$bx^2+10cx+a=0$,
$cx^2+10ax+b=0$
имеет хотя бы один действительный корень.
Каково наименьшее значение произведения корней второго уравнения, если произведение корней первого уравнения равно 6? (Если уравнение имеет два совпадающих корня, то произведение считается равным квадрату этого корня).

4. Бесконечная геометрическая прогрессия состоит из натуральных чисел. Оказалось, что произведение первых четырёх её членов равно param1. Найдите количество таких прогрессий.
The infinite geometric progression consists of positive integers. It turned out that the product of the first four terms equals param1. Find the number of such progressions.

param1		
$2^{200}3^{300}$		
$2^{200}5^{400}$		
$3^{200}5^{600}$		
$2^{300}7^{600}$		
$3^{300}7^{500}$		

Условие.

Бесконечная геометрическая прогрессия состоит из натуральных чисел. Оказалось, что произведение первых четырёх её членов равно $2^{200}3^{300}$. Найдите количество таких прогрессий.

5. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что $f(1) = 1$, и для любых $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ выполняется равенство $f(x) + f(y) + xy + 1 = f(x + y)$. Найдите все целые числа n, для которых выполняется равенство $f(n)$=param1. В ответ запишите сумму кубов найденных значений n.

Function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that $f(1) = 1$ satisfies the equality $f(x) + f(y) + xy + 1 = f(x + y)$ for any real x, y. Find all integers n for which $f(n)$=param1. In the answer write down the sum of cubes of all such values of n.

param1		
$2n^2–10$		
$3n^2–6n–11$		
$2n^2–9n+14$		
$3n^2+19n+29$		

Условие.

Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что $f(1) = 1$, и для любых $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ выполняется равенство $f(x) + f(y) + xy + 1 = f(x + y)$. Найдите все целые числа n, для которых выполняется равенство $f(n)= 2n^2–10$. В ответ запишите сумму кубов найденных значений n.

6. В алфавите племени АБЫРВАЛГ param1 букв, а словом считается любая последовательность из нескольких букв. Вождь написал одно слово из param2 букв. Из скольких слов, состоящих из param3 букв, его можно получить вычеркиванием одной буквы?

The alphabet of a tribe ABYRVALG contains param1 letters. An arbitrary sequence of these letters is called a word. The tribe’s chieftain has written a word of param2 letters. From how many words consisting of param3 letters can we obtain this word by crossing out one letter?

param1	param2	param3	
20	10	11	
19	11	12	
18	12	13	
17	13	14	
16	14	15	

Условие.

В алфавите племени АБЫРВАЛГ 20 букв, а словом считается любая последовательность из нескольких букв. Вождь написал одно слово из 10 букв. Из скольких слов, состоящих из 11 букв, его можно получить вычеркиванием одной буквы?

7. В выпуклом пятиугольнике *ABCDE* на сторон *AE* взята точка *M*, а на стороне *DE* взята точка *N*. Отрезки *CM* и *BN* пересекаются в точке *P*. Какую наименьшую площадь может иметь пятиугольник *ABCDE*, если известно, что четырехугольники *ABPM* и *DCPN* – параллелограммы, а их площади равны соответственно param1 и param2?

Point *M* is chosen on the side *AE* and point *N* is chosen on the side *DE* of a convex pentagon *ABCDE*. Segments *CM* and *BN* intersect at point *P*. What is the smallest possible area of *ABCDE* if it is given that *ABPM* and *DCPN* are parallelograms with areas param1 and param2 respectively?

param1	param2	
8	9	
10	45	
9	50	
6	75	
8	49	

Условие.

В выпуклом пятиугольнике *ABCDE* на сторон *AE* взята точка *M*, а на стороне *DE* взята точка *N*. Отрезки *CM* и *BN* пересекаются в точке *P*. Какую наименьшую площадь может иметь пятиугольник *ABCDE*, если известно, что четырехугольники *ABPM* и *DCPN* – параллелограммы, а их площади равны соответственно 8 и 9?

8. Пусть param1. Какое наибольшее значение может принимать param2?

It is given that param1. Find the largest possible value of param2.

param1	param2	
$\frac{9\cos^2 x - 7 + 12\sin x}{16 - 9\sin^2 x + 6\sqrt{5}\cos x} = 3$	$6\sin x$	
$\frac{25\sin^2 x - 37 + 40\cos x}{35 - 25\cos^2 x - 30\sin x} = 4$	$10\cos x$	

$\dfrac{33-16\cos^2 x-24\sin x}{16\sin^2 x-19-8\sqrt{7}\cos x}=2$	$12\sin x$	
$\dfrac{15-9\cos^2 x+6\sin x}{9\sin^2 x-7+12\sqrt{2}\cos x}=\dfrac{1}{2}$	$6\sin x$	

Условие.

Пусть $\dfrac{9\cos^2 x-7+12\sin x}{16-9\sin^2 x+6\sqrt{5}\cos x}=3$. Какое наибольшее значение может принимать $6\sin x$?

9. В прямоугольном треугольнике *ABC* (угол *C* – прямой) проведены биссектриса *AL* и медиана *BM*, пересекающиеся в точке *P*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если известно, что *AP* = param1, *LP* = param2. Ответ округлите до **ближайшего целого числа**.

Bisector AL and median *BM* of right triangle *ABC* (angle *C* is right) intersect at point *P*. Find the area of triangle *ABC* if *AP*=param1, *LP*=param2. Round the answer to **closest integer**.

param1	param2	
49	29	
25	13	
16	10	
36	26	
25	17	

Условие.
В прямоугольном треугольнике *ABC* (угол *C* – прямой) проведены биссектриса *AL* и медиана *BM*, пересекающиеся в точке *P*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если известно, что *AP* = 49, *LP* = 29. Ответ округлите до **ближайшего целого числа**.

10. Стрелка часов стоит на 12 часах. Вася в строку пишет последовательность из знаков «плюс» или «минус», суммарное количество которых равно param1. После чего он дает эту последовательность роботу. Робот читает последовательность справа налево. Если ему встречается знак «плюс», то он поворачивает стрелку на 120° по часовой стрелке, а если ему встречается знак «минус», то он поворачивает стрелку на 120° против часовой стрелки. Найдите количество таких последовательностей, после выполнения которых стрелка будет показывать на 12 часов.

A clock hand points to 12. Jack writes a sequence consisting of param1 symbols, each symbol being plus or minus. After that he gives this sequence to a robot. The robot reads it from right to left. If he sees a plus he turns the clock hand 120° clockwise and if he sees a minus he turns it 120° counterclockwise. Find the number of sequences such that after the robot finishes the program the clock hand still points to 12.

param1	
11	
12	
13	
14	
15	

Условие.

Стрелка часов стоит на 12 часах. Вася в строку пишет последовательность из знаков «плюс» или «минус», суммарное количество которых равно 11. После чего он дает эту последовательность роботу. Робот читает последовательность справа налево. Если ему встречается знак «плюс», то он поворачивает стрелку на 120° по часовой стрелке, а если ему встречается знак «минус», то он поворачивает стрелку на 120° против часовой стрелки. Найдите количество таких последовательностей, после выполнения которых стрелка будет показывать на 12 часов.

11. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр числа k. Пусть n – наименьшее натуральное число такое, что S(n) + S(n+1) = param1. В ответ запишите пятизначное число, первые две цифры которого совпадают с первыми двумя цифрами числа n, а последние три – с последними тремя цифрами числа n. Например, если n=1234567890, то в ответ нужно записать число 12890.

Let $S(k)$ denote the sum of all the digits in decimal representation of a positive integer k. Let n be the smallest positive integer satisfying the condition S(n) + S(n+1) = param1. As the answer to the problem write down a five-digit number such that its first two digits coincide with first two digits of n and its last three digits coincide with the last three digits of n. For example, if n=1234567890, then the answer must be 12890.

param1		
2016		
664		
1580		
4000		

Условие.
Обозначим через $S(k)$ сумму цифр числа k. Пусть n – наименьшее натуральное число такое, что S(n) + S(n+1) = 2016. В ответ запишите пятизначное число, первые две цифры которого совпадают с первыми двумя цифрами числа n, а последние три – с последними тремя цифрами числа n. Например, если n=1234567890, то в ответ нужно записать число 12890.

12. Пусть AC – наибольшая сторона треугольника ABC. На отрезке AC выбраны точки K и M так, что $AM = AB$ и $CK = CB$. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника KBM, равен param1, радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен param2, и эта окружность касается стороны BC в точке T. Найдите квадрат длины отрезка BT.

Let AC be the largest side of triangle ABC. Points K and M are chosen on side AC so that $AM = AB$ and $CK = CB$. It is given that the radius of the circumcircle of the triangle KBM equals to param1, and radius of the incircle of the triangle ABC equals to param2. Find the length of BT squared if T is the point where the incircle of ABC touches its side BC.

param1	param2	
7	5	
8	5	
9	7	
11	8	
13	9	

Условие.

Пусть AC – наибольшая сторона треугольника ABC. На отрезке AC выбраны точки K и M так, что $AM = AB$ и $CK = CB$. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника KBM, равен 7, радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен 5, и эта окружность касается стороны BC в точке T. Найдите квадрат длины отрезка BT.

13. На планете системы Альфа Центавра флаг каждого государства – трехцветный. Известно, что для любых двух государств наборы цветов в их флагах имеют ровно один общий цвет. Какое максимальное число государств может быть на этой планете, если количество цветов, встречающихся на флагах равно param1?

On a planet in Alpha Centauri system each state has a three-coloured flag. For any two states their flags have exactly one common colour. What is the maximum possible number of states on this planet given that param1 different colours can be encountered on the flags?

param1	
1225	
715	
1843	
1745	
1463	

Условие.

На планете системы Альфа Центавра флаг каждого государства – трехцветный. Известно, что для любых двух государств наборы цветов в их флагах имеют ровно один общий цвет. Какое максимальное число государств может быть на этой планете, если количество цветов, встречающихся на флагах равно 1225?

14. В выпуклом пятиугольнике *ABCDE* на сторон *AE* взята точка *M*, а на стороне *DE* взята точка *N*. Отрезки *CM* и *BN* пересекаются в точке *P*. Найдите площадь пятиугольника *ABCDE*, если известно, что четырехугольники *ABPM* и *DCPN* – параллелограммы, их площади равны соответственно param1 и param2, а площадь треугольника *BCP* равна param3.

Point *M* is chosen on the side *AE* and point *N* is chosen on the side *DE* of a convex pentagon *ABCDE*. Segments *CM* and *BN* intersect at point *P*. Find the area of *ABCDE* if it is given that *ABPM* and *DCPN* are parallelograms with areas param1 and param2 respectively and the area of triangle *BCP* equals param3?

param1	param2	param3	
5	8	10	
6	10	3	
7	9	7	
8	11	20	
9	12	4	

Условие.
В выпуклом пятиугольнике *ABCDE* на сторон *AE* взята точка *M*, а на стороне *DE* взята точка *N*. Отрезки *CM* и *BN* пересекаются в точке *P*. Найдите площадь пятиугольника *ABCDE*, если известно, что четырехугольники *ABPM* и *DCPN* – параллелограммы, их площади равны соответственно 5 и 8, а площадь треугольника *BCP* равна 10.

15. В классе все дети разного роста. Учитель физкультуры хочет построить всех детей класса в шеренгу так, чтобы в шеренге все мальчики стояли по росту (слева – самый высокий мальчик), и все девочки также стояли по росту (слева – самая высокая девочка). Сколькими способами учитель может это сделать, если в классе param1 мальчиков и param2 девочек?

In a class all children are of pairwise different height. Physical education teacher wants to arrange them in a row so that all the boys would stand in increasing order of height (from left to right) and all the girls would stand in increasing order of height (from left to right). Find the number of ways to arrange the children under this condition if there are param1 boys and param2 girls in this class.

param1	param2	
12	9	
11	8	

9	13	
8	12	
11	11	

Условие.

В классе все дети разного роста. Учитель физкультуры хочет построить всех детей класса в шеренгу так, чтобы в шеренге все мальчики стояли по росту (слева – самый высокий мальчик), и все девочки также стояли по росту (слева – самая высокая девочка). Сколькими способами учитель может это сделать, если в классе 12 мальчиков и 9 девочек?

16. Найдите натуральное число n, для которого выполняется равенство param1.

Find a positive integer n that satisfy equation param1.

param1	
$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{601}{900}$	
$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{703}{1053}$	
$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{757}{1134}$	
$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{871}{1305}$	
$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{331}{496}$	

Условие.

Найдите натуральное число n, для которого выполняется равенство $\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{601}{900}$.

17. Разность квадратов двух различных действительных чисел в param1 раз больше разности этих чисел, а разность кубов этих чисел в param2 раз больше разности этих чисел. Во сколько раз разность четвертых степеней этих чисел больше разности квадратов этих чисел?

The difference between the squares of two different real numbers is param1 times greater than the difference between these numbers. The difference between the cubes of these numbers is param2 times greater than the difference between these numbers. Find the ratio of difference between the fourth powers of these numbers to the difference between squares of these numbers.

param1	param2	
37	1069	
40	1209	
37	1039	
40	1201	
31	741	

Условие.
Разность квадратов двух различных действительных чисел в 37 раз больше разности этих чисел, а разность кубов этих чисел в 1069 раз больше разности этих чисел. Во сколько раз разность четвертых степеней этих чисел больше разности квадратов этих чисел?