1. Найдите сумму первых тридцати трёх членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма седьмого, одиннадцатого, двадцатого и тридцатого членов этой прогрессии равна 28.

Ответ. $S_{33}=231$.

Решение. Пусть a_k – k-й член прогрессии, d – её разность. Тогда по условию $a_7+a_{11}+a_{20}+a_{30}=28$, откуда $a_7+(a_7+4d)+(a_7+13d)+(a_7+23d)=28 \Leftrightarrow a_7+10d=7$, т.е. $a_{17}=7$. Сумма первых тридцати трёх членов равна

$$S_{33}=\frac{a_1+a_{33}}{2}\cdot 33=\frac{(a_{17}-16d)+(a_{17}+16d)}{2}\cdot 33=33a_{17}=231.$$

2. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 2. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки, равные 1 и 8. Найдите другие стороны треугольника.

Ответ. 10 и 17.

Решение. Пусть K, L, M – точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, AC треугольника ABC соответственно; при этом $AK=8$, $BK=1$. Обозначим $CL=x$. В силу равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, получаем $BL=1$, $AM=8$, $CM=x$. Выражаем площадь треугольника двумя способами (по формуле Герона и как полупериметр, умноженный на радиус вписанной окружности) и получаем уравнение:

$$2(x+9)=\sqrt{(x+9)\cdot x\cdot 8\cdot 1} \Leftrightarrow \sqrt{x+9}=\sqrt{2x} \Leftrightarrow x=9.$$

Значит, две другие стороны треугольника равны 10 и 17.

3. Решите неравенство $\sqrt{2x+\frac{7}{x^2}}+\sqrt{2x-\frac{7}{x^2}}<\frac{6}{x}$.

Ответ. $x\in\left[\sqrt[3]{\frac{7}{2}};\sqrt[3]{\frac{373}{72}}\right)$.

Решение. ОДЗ определяется неравенствами $2x+\frac{7}{x^2}\ge 0$, $2x-\frac{7}{x^2}\ge 0$, решая которые, получаем $x\ge\sqrt[3]{\frac{7}{2}}$.

На ОДЗ обе части данного неравенства положительны, возводим их в квадрат:

$$2x+\frac{7}{x^2}+2\sqrt{\left(2x+\frac{7}{x^2}\right)\left(2x-\frac{7}{x^2}\right)}+2x-\frac{7}{x^2}<\frac{36}{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-\frac{49}{x^4}}<\frac{18}{x^2}-2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{18}{x^2}-2x\ge 0,\\ 4x^2-\frac{49}{x^4}<\frac{324}{x^4}-\frac{72}{x}+4x^2\end{cases} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x^3\le 9,\\ \frac{72}{x}<\frac{373}{x^4}\end{cases} \Leftrightarrow x^3<\frac{373}{72}.$$

С учётом ОДЗ $x\in\left[\sqrt[3]{\frac{7}{2}};\sqrt[3]{\frac{373}{72}}\right)$.

4. Известно, что $3\operatorname{tg}^2¥+3\operatorname{ctg}^2¥+\frac{2}{\sin^2¥}+\frac{2}{\cos^2¥}=19$. Найдите значение выражения $\sin^4¥-\sin^2¥$.

Ответ. $-\frac{1}{5}$.

Решение. Преобразуем данное в условии равенство. На ОДЗ оно равносильно следующему:

$$\frac{3\sin^2¥}{\cos^2¥}+\frac{3\cos^2¥}{\sin^2¥}+\frac{2}{\sin^2¥}+\frac{2}{\cos^2¥}=19 \Leftrightarrow 3\sin^4¥+3\cos^4¥+2\cos^2¥+2\sin^2¥=19\sin^2¥\cos^2¥ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3\sin^4¥+6\sin^2¥\cos^2¥+3\cos^4¥\right)+2=25\sin^2¥\cos^2¥ \Leftrightarrow 3\left(\sin^2¥+\cos^2¥\right)^2+2=25\sin^2¥\cos^2¥ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2¥\cos^2¥=\frac{1}{5}.$$

Значит, $\sin^4¥-\sin^2¥=\sin^2¥\left(\sin^2¥-1\right)=-\sin^2¥\cos^2¥=-\frac{1}{5}$.

5. От пристани A вниз по течению реки отправилась лодка. Одновременно от пристани B вверх по течению навстречу лодке отправился катер. Через некоторое время они встретились. В момент их встречи из A отплыла вниз по течению вторая лодка и через некоторое время встретилась с катером. Расстояние между пунктами первой и второй встреч составляет $\frac{20}{81}AB$. Скорости течения, лодок и катера постоянны (скорости лодок одинаковые), причём отношение собственной скорости лодки к собственной скорости катера равно $1:5$. Какую часть расстояния AB проплыл катер к моменту встречи со второй лодкой?

Ответ. $\frac{56}{81}$ или $\frac{65}{81}$.

Решение. Пусть S – расстояние между пристанями, u – скорость течения, v – собственная скорость лодки, $5v$ – собственная скорость катера. Тогда скорости лодок и катера на реке равны соответственно $V_л = v+u$ и $V_к = 5v-u$. Первая встреча произошла через время $t_1 = \frac{S}{V_л + V_к} = \frac{S}{6v}$. За это время первая лодка удалилась от пристани A на расстояние $S_1 = V_л t_1 = \frac{S(v+u)}{6v}$. Вторая встреча произошла спустя $t_2 = \frac{S_1}{V_л + V_к} = \frac{S(v+u)}{36v^2}$ после первой встречи. За это время катер прошёл расстояние $d = V_к t_2 = \frac{S(v+u)(5v-u)}{36v^2}$. По условию $d = \frac{20}{81}AB$, т.е.

$$\frac{S(v+u)(5v-u)}{36v^2} = \frac{20}{81}S \Leftrightarrow 9(v+u)(5v-u) = 80v^2 \Leftrightarrow 35v^2 - 36uv + 9u^2 = 0 \Leftrightarrow (5v-3u)(7v-3u) = 0.$$

Значит, $u = \frac{7v}{3}$ или $u = \frac{5v}{3}$. Расстояние, пройденное катером ко второму моменту встречи, равно $L = V_к t_1 + d = \frac{S(5v-u)}{6v} + \frac{20S}{81}$. В первом случае получаем $L = \frac{56S}{81}$, а во втором – $L = \frac{65S}{81}$.

6. В трапеции $PQRS$ известно, что $\angle PQR = 90^\circ$, $\angle QRS > 90^\circ$, диагональ SQ равна 24 и является биссектрисой угла S, а расстояние от вершины R до прямой QS равно 5. Найдите площадь трапеции $PQRS$.

Ответ. $\frac{27420}{169}$.

Решение. $\angle RQS = \angle PSQ$ как накрест лежащие, поэтому треугольник RQS равнобедренный. Его высота RH является также медианой и равна 5. Тогда $SR = \sqrt{RH^2 + SH^2} = 13$. Треугольники SRH и SQP подобны по двум углам, коэффициент подобия равен $\frac{SR}{SQ} = \frac{13}{24}$. Следовательно, $PQ = \frac{24}{13}RH = \frac{120}{13}$, $PS = \frac{24}{13}SH = \frac{288}{13}$. Площадь трапеции равна $PQ \cdot \frac{QR+PS}{2} = \frac{27420}{169}$.

7. Представьте число 2015 в виде суммы некоторого количества натуральных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

Ответ. $2015 = 3+3+\ldots+3+2$ (671 тройка и одна двойка).

Решение. Если в искомом представлении есть хотя бы одно слагаемое, большее 4, то произведение не является максимальным. Действительно, если $n \ge 5$ заменить суммой $2+(n-2)$, то произведение $2\cdot(n-2)$ оказывается больше n. Заметим также, что если в рассматриваемом представлении присутствует слагаемое 4, то его можно заменить на $2+2$, и при этом произведение не изменится.

Значит, наибольшее произведение получается в том случае, когда число разбито на сумму двоек и троек (несложно понять, что замены $2 \to 1+1$ и $3 \to 2+1$, $2+2 \to 3+1$ лишь уменьшают произведение). Замена $2+2+2 \to 3+3$ не меняет сумму, но увеличивает произведение, поэтому двоек надо взять по возможности меньше.

Отсюда получаем разложение $2015 = 671 \cdot 3 + 2$, т.е. надо представить число 2015 в виде суммы 672 слагаемых, из которых одно равно двум, а остальные равны трём.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 + z = \dfrac{27}{xy}, \\ y^2 - z^2 + x = \dfrac{27}{yz}, \\ z^2 - x^2 + y = \dfrac{27}{xz}. \end{cases}$

Ответ. $(3;3;3)$, $(-3;-3;3)$, $(-3;3;-3)$, $(3;-3;-3)$.

Решение. Складывая все три уравнения системы, получаем $x + y + z = \dfrac{27}{xy} + \dfrac{27}{yz} + \dfrac{27}{xz} \Leftrightarrow x + y + z = \dfrac{27(x+y+z)}{xyz}$. Возможны два варианта: $x + y + z = 0$ или $xyz = 27$.

а) $x + y + z = 0$, тогда $z = -x - y$. Подставляем в первые два уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - x - y = \dfrac{27}{xy}, \\ y^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x = -\dfrac{27}{y(x+y)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y-1) = \dfrac{27}{xy}, \\ x(x+2y-1) = \dfrac{27}{y(x+y)}. \end{cases}$$

Делим почленно первое уравнение на второе (это можно сделать, так как правая часть второго уравнения отлична от нуля) и получаем $\dfrac{(x+y)(x-y-1)}{x(x+2y-1)} = \dfrac{x+y}{x}$, откуда $x + y = 0$ (и тогда $z = 0$) или $x - y - 1 = x + 2y - 1$ (и тогда $y = 0$). Оба случая невозможны, так как по ОДЗ переменные отличны от нуля.

б) $xyz = 27$. Тогда $z = \dfrac{27}{xy}$, $x = \dfrac{27}{yz}$, поэтому первые два уравнения системы принимают вид $x^2 - y^2 = 0$, $y^2 - z^2 = 0$, т.е. $|x| = |y| = |z|$. С учётом $xyz = 27$ получаем 4 решения: $(3;3;3)$, $(-3;-3;3)$, $(-3;3;-3)$, $(3;-3;-3)$.

1. Найдите сумму первых двадцати девяти членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, восьмого, девятнадцатого и тридцатого членов этой прогрессии равна 36.

Ответ. $S_{33} = 231$.

Решение. Пусть a_k – k-й член прогрессии, d – её разность. Тогда по условию $a_3 + a_8 + a_{19} + a_{30} = 36$, откуда $a_3 + (a_3 + 5d) + (a_3 + 16d) + (a_3 + 27d) = 36 \Leftrightarrow a_3 + 12d = 9$, т.е. $a_{15} = 9$. Сумма первых двадцати девяти членов равна

$$S_{29} = \frac{a_1 + a_{29}}{2} \cdot 29 = \frac{(a_{15} - 14d) + (a_{15} + 14d)}{2} \cdot 29 = 29a_{15} = 261.$$

2. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 2. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки, равные 6 и 14. Найдите другие стороны треугольника.

Ответ. 7 и 15.

Решение. Пусть K, L, M – точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, AC треугольника ABC соответственно; при этом $AK = 6$, $BK = 14$. Обозначим $CL = x$. В силу равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, получаем $BL = 14$, $AM = 6$, $CM = x$. Выражаем площадь треугольника двумя способами (по формуле Герона и как полупериметр, умноженный на радиус вписанной окружности) и получаем уравнение:

$$2(x + 20) = \sqrt{(x + 20) \cdot x \cdot 6 \cdot 14} \Leftrightarrow \sqrt{x + 20} = \sqrt{21x} \Leftrightarrow x = 1.$$

Значит, две другие стороны треугольника равны 7 и 15.

3. Решите неравенство $\sqrt{3x - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{3x + \frac{5}{x^2}} < \frac{8}{x}$.

Ответ. $x \in \left[\sqrt[3]{\frac{5}{3}}; \sqrt[3]{\frac{1049}{192}}\right)$.

Решение. ОДЗ определяется неравенствами $3x + \frac{5}{x^2} \geq 0$, $3x - \frac{5}{x^2} \geq 0$, решая которые, получаем $x \geq \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$.

На ОДЗ обе части данного неравенства положительны, возводим их в квадрат:

$$3x + \frac{5}{x^2} + 2\sqrt{\left(3x + \frac{5}{x^2}\right)\left(3x - \frac{5}{x^2}\right)} + 3x - \frac{5}{x^2} < \frac{64}{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 - \frac{25}{x^4}} < \frac{32}{x^2} - 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{32}{x^2} - 3x \geq 0, \\ 9x^2 - \frac{25}{x^4} < \frac{1024}{x^4} - \frac{192}{x} + 9x^2 \end{cases} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^3 \leq 9, \\ \frac{192}{x} < \frac{1049}{x^4} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x^3 < \frac{1049}{192}.$$

С учётом ОДЗ $x \in \left[\sqrt[3]{\frac{5}{3}}; \sqrt[3]{\frac{1049}{192}}\right)$.

4. Известно, что $4\,\mathrm{tg}^2 ¥ + 4\,\mathrm{ctg}^2 ¥ - \frac{1}{\sin^2 ¥} - \frac{1}{\cos^2 ¥} = 17$. Найдите значение выражения $\cos^2 ¥ - \cos^4 ¥$.

Ответ. $\frac{3}{25}$.

Решение. Преобразуем данное в условии равенство. На ОДЗ оно равносильно следующему:

$$\frac{4\sin^2 ¥}{\cos^2 ¥} + \frac{4\cos^2 ¥}{\sin^2 ¥} - \frac{1}{\sin^2 ¥} - \frac{1}{\cos^2 ¥} = 17 \Leftrightarrow 4\sin^4 ¥ + 4\cos^4 ¥ - \cos^2 ¥ - \sin^2 ¥ = 17\sin^2 ¥ \cos^2 ¥ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4\sin^4 ¥ + 8\sin^2 ¥ \cos^2 ¥ + 4\cos^4 ¥\right) - 1 = 25\sin^2 ¥ \cos^2 ¥ \Leftrightarrow 4\left(\sin^2 ¥ + \cos^2 ¥\right)^2 - 1 = 25\sin^2 ¥ \cos^2 ¥ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 ¥ \cos^2 ¥ = \frac{3}{25}.$$

Значит, $\cos^2 ¥ - \cos^4 ¥ = \cos^2 ¥\left(1 - \cos^2 ¥\right) = \sin^2 ¥ \cos^2 ¥ = \frac{3}{25}$.

5. От пристани A вниз по течению реки отправилась моторная лодка. Одновременно от пристани B вверх по течению навстречу лодке отправился катер. Через некоторое время они встретились. В момент их встречи из B отплыл второй катер и через некоторое время встретился с моторной лодкой. Расстояние между пунктами первой и второй встреч составляет $\frac{56}{225}AB$. Скорости течения, моторной лодки и катеров постоянны (скорости катеров одинаковые), причём отношение собственной скорости моторной лодки к собственной скорости катера равно $2:3$. Какую часть расстояния AB проплыла моторная лодка к моменту встречи со вторым катером?

Ответ. $\frac{161}{225}$ или $\frac{176}{225}$.

Решение. Пусть S – расстояние между пристанями, u – скорость течения, $2v$ – собственная скорость моторной лодки, $3v$ – собственная скорость катера. Тогда скорости лодки и катеров на реке равны соответственно $V_л = 2v+u$ и $V_к = 3v-u$. Первая встреча произошла через время $t_1 = \frac{S}{V_л + V_к} = \frac{S}{5v}$. За это время первый катер удалился от пристани B на расстояние $S_1 = V_к t_1 = \frac{S(3v-u)}{5v}$. Вторая встреча произошла спустя $t_2 = \frac{S_1}{V_л + V_к} = \frac{S(3v-u)}{25v^2}$ после первой встречи. За это время моторная лодка прошла расстояние $d = V_л t_2 = \frac{S(2v+u)(3v-u)}{25v^2}$. По условию $d = \frac{56}{225}AB$, т.е. $\frac{S(2v+u)(3v-u)}{25v^2} = \frac{56}{225}S \Leftrightarrow 9(2v+u)(3v-u) = 56v^2 \Leftrightarrow 2v^2 - 9uv + 9u^2 = 0 \Leftrightarrow (2v-3u)(v-3u) = 0.$

Значит, $u = \frac{2v}{3}$ или $u = \frac{v}{3}$. Расстояние, пройденное моторной лодкой ко второму моменту встречи, равно $L = V_л t_1 + d = \frac{S(2v+u)}{5v} + \frac{56S}{225}$. В первом случае получаем $L = \frac{161S}{225}$, а во втором – $L = \frac{176S}{225}$.

6. В трапеции $PQRS$ известно, что $\angle PQR = 90^\circ$, $\angle QRS < 90^\circ$, диагональ SQ равна 24 и является биссектрисой угла S, а расстояние от вершины R до прямой QS равно 16. Найдите площадь трапеции $PQRS$.

Ответ. $\frac{8256}{25}$.

Решение. $\angle RQS = \angle PSQ$ как накрест лежащие, поэтому треугольник RQS равнобедренный. Его высота RH является также медианой и равна 16. Тогда $SR = \sqrt{RH^2 + SH^2} = 20$. Треугольники SRH и SQP подобны по двум углам, коэффициент подобия равен $\frac{SR}{SQ} = \frac{5}{6}$. Следовательно, $PQ = \frac{6}{5}RH = \frac{96}{5}$, $PS = \frac{6}{5}SH = \frac{72}{5}$. Площадь трапеции равна $PQ \cdot \frac{QR+PS}{2} = \frac{8256}{25}$.

7. Представьте число 2017 в виде суммы некоторого количества натуральных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

Ответ. $2017 = 3+3+\ldots+3+2+2$ (671 тройка и две двойки).

Решение. Если в искомом представлении есть хотя бы одно слагаемое, большее 4, то произведение не является максимальным. Действительно, если $n \ge 5$ заменить суммой $2+(n-2)$, то произведение $2\cdot(n-2)$ оказывается больше n. Заметим также, что если в рассматриваемом представлении присутствует слагаемое 4, то его можно заменить на $2+2$, и при этом произведение не изменится.

Значит, наибольшее произведение получается в том случае, когда число разбито на сумму двоек и троек (несложно понять, что замены $2 \to 1+1$ и $3 \to 2+1$, $2+2 \to 3+1$ лишь уменьшают произведение). Замена $2+2+2 \to 3+3$ не меняет сумму, но увеличивает произведение, поэтому двоек надо взять по возможности меньше.

Отсюда получаем разложение $2015 = 671 \cdot 3 + 2 + 2$, т.е. надо представить число 2015 в виде суммы 673 слагаемых, два из которых равно двум, а остальные равны трём.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 + z = \dfrac{64}{xy}, \\ y^2 - z^2 + x = \dfrac{64}{yz}, \\ z^2 - x^2 + y = \dfrac{64}{xz}. \end{cases}$

Ответ. $(4; 4; 4)$, $(-4; -4; 4)$, $(-4; 4; -4)$, $(4; -4; -4)$.

Решение. Складывая все три уравнения системы, получаем $x + y + z = \dfrac{64}{xy} + \dfrac{64}{yz} + \dfrac{64}{xz} \Leftrightarrow x + y + z = \dfrac{64(x + y + z)}{xyz}$. Возможны два варианта: $x + y + z = 0$ или $xyz = 64$.

а) $x + y + z = 0$, тогда $z = -x - y$. Подставляем в первые два уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - x - y = \dfrac{64}{xy}, \\ y^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x = -\dfrac{64}{y(x+y)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y-1) = \dfrac{64}{xy}, \\ x(x+2y-1) = \dfrac{64}{y(x+y)}. \end{cases}$$

Делим почленно первое уравнение на второе (это можно сделать, так как правая часть второго уравнения отлична от нуля) и получаем $\dfrac{(x+y)(x-y-1)}{x(x+2y-1)} = \dfrac{x+y}{x}$, откуда $x + y = 0$ (и тогда $z = 0$) или $x - y - 1 = x + 2y - 1$ (и тогда $y = 0$). Оба случая невозможны, так как по ОДЗ переменные отличны от нуля.

б) $xyz = 64$. Тогда $z = \dfrac{64}{xy}$, $x = \dfrac{64}{yz}$, поэтому первые два уравнения системы принимают вид $x^2 - y^2 = 0$, $y^2 - z^2 = 0$, т.е. $|x| = |y| = |z|$. С учётом $xyz = 64$ получаем 4 решения: $(4; 4; 4)$, $(-4; -4; 4)$, $(-4; 4; -4)$, $(4; -4; -4)$.