

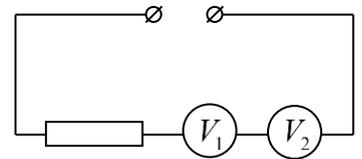
**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки»,
Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса
2021-2022 учебного года, 9 класс**

1. Папа и мама пекут блины на плите, а их дети Петя и Вася их поедают. Папа может приготовить за час 70 блинов, мама – 100 блинов. Петя, если постарается, может съесть за 15 мин 10 блинов, а Вася в два раза больше. Через какое время на столе останутся не менее 20 несъеденных блинов?

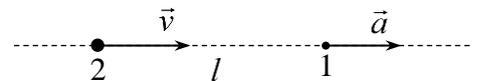
2. В бумажном квадрате клетчатой бумаги, содержащем целое число клеток, вырезали дырку в форме квадрата, также состоящего из целого числа клеток. Сколько клеток содержал большой квадрат, если после вырезания на нем осталось 209 клеток?

3. Прямая, проходящая через любую точку D медианы BM треугольника ABC и параллельная стороне AB , пересекает прямую, проходящую через вершину C и параллельную BM , в точке E . Доказать, что $BE = AD$.

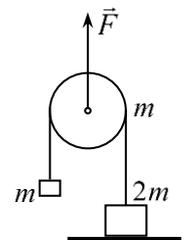
4. Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке, состоит из резистора и двух разных вольтметров. Если все элементы соединить последовательно и подключить к некоторому источнику напряжения (см. рисунок), то вольтметр V_1 показывает напряжение $U_1 = 8$ В, а вольтметр V_2 - напряжение $U_2 = 12$ В. Если последовательно соединить только вольтметры и подключить к тому же источнику, то вольтметр V_1 покажет напряжение $U_3 = 12$ В. Найти напряжение источника.



5. Два точечных тела могут двигаться вдоль одной и той же прямой. Первоначальное расстояние между телами равно l . Тела одновременно начинают двигаться в одном направлении следующим образом: первое тело движется из состояния покоя с постоянным ускорением a , второе, которое первоначально находилось за первым (см. рисунок), равномерно с некоторой скоростью v . При каких значениях v , второе тело не догонит первое?



6. Блок имеет массу m , которая сосредоточена в его оси. Через блок перекинули нить, концы которой прикрепили к телам массой m и $2m$. Блок удерживают так, что тело массой m висит, тело массой $2m$ лежит на горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени блок начинают тянуть вверх, действуя на него силой \vec{F} (см. рисунок). При каком минимальном значении силы F тело с массой $2m$ оторвется от поверхности? Нить нерастяжима и невесома. Ускорение свободного падения известно.



Решения

Задача 1. Папа и мама пекут блины на плите, а их дети Петя и Вася их поедают. Папа может приготовить за час 70 блинов, мама – 100 блинов. Петя, если постарается, может съесть за 15 мин 10 блинов, а Вася в два раза больше. Через какое время на столе останутся не менее 20 несъеденных блинов?

Ответ: 24 мин

Решение. Обозначим производительность выпекания блинов $p_1 = \frac{170}{60}$ блинов/мин, производительность поедания блинов $p_2 = \frac{10+20}{15} = 2$ блина/мин.

За k мин на столе останется не менее $q = k(p_1 - p_2)$ блинов: $k \cdot \frac{5}{6} \geq 20 \rightarrow k \geq 24$.

Задача 2. В бумажном квадрате клетчатой бумаги, содержащем целое число клеток, вырезали дырку в форме квадрата, также состоящего из целого числа клеток. Сколько клеток содержал большой квадрат, если после вырезания на нем осталось 209 клеток?

Ответ: 225 клеток

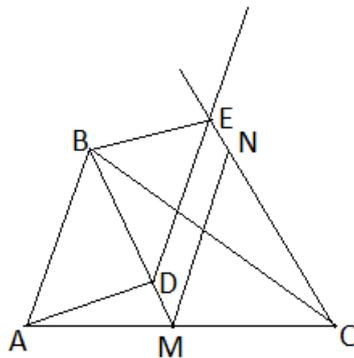
Решение. Сторона большого квадрата содержит n сторон клетки, у меньшего квадрата m сторон клетки. Тогда $n^2 - m^2 = 209 \rightarrow (n - m)(n + m) = 209 = 11 \cdot 19$.

Случай 1. $\begin{cases} n + m = 209 \\ n - m = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 105 \\ m = 104 \end{cases}$ случай не реализуется из-за отсутствия дырки

Случай 2. $\begin{cases} n + m = 19 \\ n - m = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 15 \\ m = 4 \end{cases}$

Задача 3. Прямая, проходящая через любую точку D медианы BM треугольника ABC и параллельная стороне AB , пересекает прямую, проходящую через вершину C и параллельную BM , в точке E . Доказать, что $BE = AD$.

Решение. Дополнительное построение: через точку M проводим прямую MN , параллельную DE . Фигура $M DEN$ параллелограмм (по построению).



Треугольники ABM и MNC равны (по двум равным углам, прилежащим к равным сторонам AM и MC). Тогда $AB = MN = DE$ и четырехугольник $ABED$ параллелограмм. AD и BE его противоположные стороны.

Задача 4. Пусть напряжение источника равно U , сопротивление первого вольтметра R_1 , второго R_2 . Поскольку в первом случае через них течет одинаковый ток

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{U_1}{U_2}$$

Во втором случае, отношение их показаний также равно отношению их сопротивлений. Поэтому показания второго вольтметра равны

$$U_4 = U_3 \frac{R_2}{R_1} = U_3 \frac{U_2}{U_1}$$

С другой стороны, напряжение источника равно сумме показаний вольтметров во втором случае. Поэтому

$$U = U_3 + U_4 = U_3 \left(1 + \frac{U_2}{U_1} \right) = \frac{U_3 (U_1 + U_2)}{U_1} = 30 \text{ В}$$

(можно решать в числах: из первого условия следует, что сопротивление второго вольтметра составляют $3/2$ от показания первого. Поэтому во втором случае он покажет 18 В, а сумма их показаний во втором случае и равна напряжению источника).

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильно найдено отношение сопротивлений вольтметров – 0,5 балла

2. Вывод, что напряжение источника равно сумме показаний вольтметров во втором случае – 0,5 балла

3. Правильно найдено показание второго вольтметра во втором случае – 0,5 балла

4. Правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Задача 5. В начальный момент времени первое тело имеет нулевую скорость, которая затем равномерно возрастает, так как первое тело движется равноускоренно. Находящееся позади второе тело, сразу имеет некоторую скорость v , которая в дальнейшем не меняется, так как второе тело движется равномерно. Поэтому в течение некоторого времени скорость второго тела будет больше скорости первого и расстояние между телами будет уменьшаться. Затем в некоторый момент времени скорость первого тела станет больше скорости второго и в дальнейшем будет продолжать увеличиваться (в то время как скорость второго по-прежнему остается неизменной). Поэтому если за то время, пока скорость второго тела больше скорости первого, оно не успеет догнать первое, оно никогда его не догонит.

Найдем разность координат первого и второго тел как функцию времени и исследуем знак этой функции: если при любых значениях времени t эта функция положительна, второе тело не догонит первое. Разность координат тел как функцию времени можно найти из уравнений движения для каждого тела.

Выберем ось x системы координат так, что она направлена вдоль направления движения тел, начало координат находится в начальном положении второго тела. Поскольку первое тело движется равноускоренно с нулевой начальной скоростью, зависимость его координаты от времени дается выражением:

$$x_1(t) = l + \frac{at^2}{2}$$

Второе тело движется равномерно, поэтому зависимость его координаты от времени дается выражением:

$$x_2(t) = vt$$

Отсюда находим разность координат тел $x_1 - x_2$ как функцию времени

$$x_1 - x_2 = l + \frac{at^2}{2} - vt$$

Эта функция остается положительной при любых значениях времени t , если квадратное уравнение

$$\frac{at^2}{2} - vt + l = 0$$

не имеет корней, то есть когда дискриминант этого уравнения отрицательный

$$v^2 - 2al < 0$$

Таким образом, второе тело никогда не догоняет первое, если

$$v < \sqrt{2al}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Использованы правильный закон равноускоренного движения (для первого тела) и равномерного движения (для второго тела) – 0,5 балла
2. Правильное условие встречи тел – 0,5 балла
3. Правильный способ анализа условия встречи – отрицательность дискриминанта – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Задача 6. Чтобы тело с массой $2m$ оторвалось от поверхности, сила натяжения нити должна быть больше $2mg$. При минимальном значении силы F - равна $2mg$, при этом ускорение этого тела будет равно нулю. А поскольку масса блока сосредоточена только в его оси, сила натяжения нити, действующая на тело массой m будет такой же. И, следовательно, это тело будет подниматься вверх с ускорением a , которое можно найти из второго закона Ньютона для этого тела. В проекциях на вертикальную ось второй закон Ньютона для тела с массой m дает

$$ma = T - mg = 2mg - mg = mg \quad \Rightarrow \quad a = g$$

Очевидно, ускорение блока a_0 будет в два раза меньше. Действительно, если блок перемещается на величину Δx вверх, то тело с массой m совершит перемещение $2\Delta x$ (при условии, что второе тело имеет нулевое ускорение, как в рассматриваемом случае). Поэтому скорость блока в любой момент времени вдвое меньше скорости тела с массой m , поэтому и вдвое меньше его ускорение

$$a_0 = \frac{a}{2} = \frac{g}{2}$$

Следовательно, второй закон Ньютона для блока дает

$$m \frac{g}{2} = F - 2T = F - 4mg$$

Отсюда получаем окончательно для минимального значения силы F , при котором тело с массой $2m$ оторвется от поверхности

$$F = \frac{9}{2}mg$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- 1. Правильная идея решения – при минимальной силе, для которой происходит отрыв тела от поверхности, сила натяжения нити должна равняться силе тяжести, действующей на тело $2m$ – 0,5 балла**
- 2. Правильные ускорения тела массы m и блока – 0,5 балла**
- 3. Правильный второй закон для блока – 0,5 балла**
- 4. Правильный ответ – 0,5 балла**

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника

Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществлялся согласно таблице перевода первичных баллов за оценку письменной части Всероссийского конкурса научных работ школьников «Юниор» Инженерной секции.