

**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,  
профиль «Инженерные науки»,**

**Решения и критерии оценивания**

**Задач олимпиадной части финала конкурса 2021-2022 учебного года**

**11 класс**

1. Администрация разделила область на несколько районов по следующему принципу: население крупного района составляет более 8% населения области, и для любого крупного района найдутся два не крупных района с суммарно большим населением. На какое наименьшее число районов была разделена область?

2. Число  $x$  удовлетворяет условию:

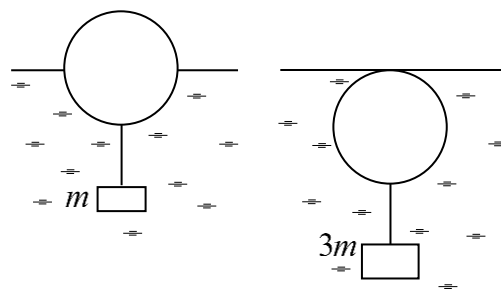
$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{5}{3}.$$

Найти для таких  $x$  значение выражения

$$\frac{\cos 5x}{\cos x}.$$

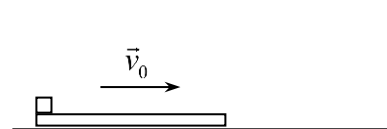
3. Точка  $M$  расположена на стороне  $CD$  квадрата так, что  $CM : MD = 1 : 3$ . Прямая  $AM$  пересекает описанную около квадрата окружность в точке  $E$ . Площадь треугольника  $ACE$  равна 14. Найти сторону квадрата.

4. Легкий шар плавает в воде. Если к шару привязать массивный груз, шар будет погружен в воду наполовину. Если массу груза увеличить втрое (при неизменной плотности), то шар погрузится в воду полностью и останется в таком положении. Найти плотность шара. Плотность воды  $\rho_0$  известна.



5. С  $\nu$  молями идеального одноатомного газа происходит процесс, в котором объем газа зависит от температуры по закону  $V = \alpha\sqrt{T}$  (где  $\alpha$  - некоторая постоянная). Какое количество теплоты нужно сообщить газу для двукратного увеличения его объема. Начальная температура газа  $T$ .

6. По гладкой горизонтальной поверхности перпендикулярно вертикальной стенке со скоростью  $v_0$  движется доска длиной  $l$  с расположенным на ее конце точечным телом. Происходит абсолютно упругий удар доски о стенку. Считая, что удар происходит практически мгновенно, определить при каком коэффициенте трения между телом и доской доска остановится на максимальном расстоянии от стенки. Чему равно это максимальное расстояние? Массы доски и тела равны.



## Решения

**Задача 1.** Администрация разделила область на несколько районов по принципу: население крупного района составляет более 8% населения области и для любого крупного района найдутся два не крупных района с суммарно большим населением. На какое наименьшее число районов была разделена область?

**Ответ:** 8 районов.

**Решение.** Число «мелких» районов не менее 2 по условию и их население составляет не более 8% от общего населения области. Покажем, что число районов в области не меньше 8. Если число районов в области не больше 7, но в ней не более 5 «крупных» районов с населением менее 16% в каждом. Тогда суммарное население области не может составить 100%. Действительно,  $2 \cdot 8\% + 5 \cdot 16\% = 96\% < 100\%$ . Таким образом, число районов в области не менее 8. Разбиение на 8 районов возможно, например,  $8\% + 8\% + 14\% + 14\% + 14\% + 14\% + 14\% + 14\% = 100\%$ .

**Задача 2.** Число  $x$  удовлетворяет условию  $\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{5}{3}$ . Найти для таких  $x$  значение выражения

$$\frac{\cos 5x}{\cos x}.$$

**Ответ:**  $-\frac{11}{9}$ .

$$\begin{aligned} \sin x \neq 0 \rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} &= \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = 3 - 4\sin^2 x \rightarrow 3 - 4\sin^2 x = \frac{5}{3} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \\ \rightarrow \cos^2 x &= \frac{2}{3} \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

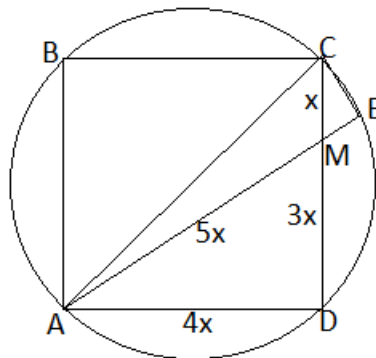
**Решение.**

$$\begin{aligned} \frac{\cos 5x}{\cos x} &= \frac{\cos(3x+2x)}{\cos x} = \frac{\cos(3x+2x)}{\cos x} = \frac{\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x}{\cos x} = \\ &= \frac{(4\cos^3 x - 3\cos x)\cos 2x - 2\sin 3x \sin x \cos x}{\cos x} = (4\cos^2 x - 3)\cos 2x - 2\sin 3x \sin x = \\ &= (2\cos 2x - 1)\cos 2x - \cos 2x + \cos 4x = (2\cos 2x - 1)\cos 2x - \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = \\ &= \left(\frac{2}{3} - 1\right) \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{11}{9}. \end{aligned}$$

**Задача 3.** Точка  $M$  расположена на стороне  $CD$  квадрата так, что  $CM : MD = 1 : 3$ . Прямая  $AM$  пересекает описанную около квадрата окружность в точке  $E$ . Площадь треугольника  $ACE$  равна 14. Найти сторону квадрата.

**Ответ:** 10.

**Решение.**



Треугольники  $AMD$  и  $CME$  подобные с коэффициентом подобия  $k = 5$ . Тогда

$$CE = \frac{4x}{5}, ME = \frac{3x}{5} \rightarrow AE = 5x + \frac{3x}{5} = \frac{28}{5}x.$$

Треугольник  $ACE$  прямоугольный, следовательно:

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} AE \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{5} \cdot \frac{4}{5} x^2 = 14 \rightarrow x^2 = \frac{25}{4} \rightarrow x = \frac{5}{2} \rightarrow AD = 4x = 10.$$

**Задача 4.** Пусть плотность шара равна  $\rho$ , объем  $V$ , а сила Архимеда, действующая на груз массой  $m$ , равна  $F_A$ . Поскольку во втором случае объем груза, как и его масса вырос в 3 раза, сила Архимеда, действующая на груз, возросла в 3 раза. Поэтому условия равновесия шара с грузом  $m$  и грузом  $3m$  имеют вид

$$\begin{aligned} \rho V g + (mg - F_A) &= \rho_0 g \frac{V}{2} \\ \rho V g + 3(mg - F_A) &= \rho_0 g V \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $F_A$  - сила Архимеда, действующая на груз массой  $m$ ; во втором случае она увеличилась втрое по сравнению с первым, поскольку объем самого груза вырос также в 3 раза. Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$2(mg - F_A) = \rho_0 g \frac{V}{2}$$

Отсюда находим объем шара

$$V = \frac{4(mg - F_A)}{\rho_0 g}$$

Подставляя теперь этот объем, например, в первое из уравнений (1), найдем плотность вещества шара

$$\rho = \frac{\rho_0}{4}$$

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

1. Правильное использование закона Архимеда – 0,5 балла
2. Правильные условия плавания шара с телом массой  $m$  и массой  $3m$  – 0,5 балла
3. Правильный объем шара – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

**Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям**

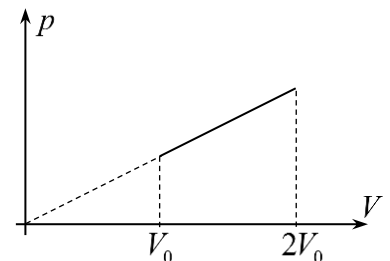
**Задача 5.** Исключая температуру газа  $T$  из закона Клапейрона-Менделеева, найдем, что давление и объем газа в данном процессе связаны следующим соотношением

$$pV = \nu RT = \nu R \left( \frac{V}{\alpha} \right)^2 \Rightarrow p = \frac{\nu R}{\alpha^2} V$$

( $p$  - давление газа,  $V$  - его объем,  $\nu$  - количество вещества газа,  $R$  - универсальная газовая постоянная). Пусть начальный объем газа  $V_0$ . График этого процесса в координатах  $p-V$  показан на рисунке.

Применим к этому процессу первый закон термодинамики

$$Q = \Delta U + A$$



где  $Q$  - количества теплоты, сообщенное газу в этом процессе,  $\Delta U$  - изменение его внутренней энергии,  $A$  - работа газа. Изменение внутренней энергии найдем через изменение его температуры с использованием связи объема и температуры в рассматриваемом процессе

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T) = \frac{3}{2} \nu R \left( \frac{4V_0^2}{\alpha^2} - \frac{V_0^2}{\alpha^2} \right) = \frac{9}{2} \nu R \frac{V_0^2}{\alpha^2} = \frac{9}{2} \nu RT$$

где  $T_1$  - конечная температура,  $T$  - начальная. Работу газа найдем как площадь под графиком процесса с использованием связи давления и объема

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{\nu R}{\alpha^2} V_0 + \frac{\nu R}{\alpha^2} 2V_0 \right) (2V_0 - V_0) = \frac{3}{2} \frac{\nu R V_0^2}{\alpha^2} = \frac{3}{2} \nu RT$$

В результате из первого закона термодинамики получим

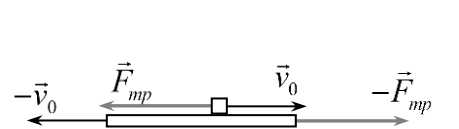
$$Q = 6\nu RT$$

**Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

- 1. Доказательство (на основе закона Клапейрона-Менделеева), что в рассматриваемом процессе давление газа пропорционально объему – 0,5 балла**
- 2. Правильное использование первого начала термодинамики – 0,5 балла**
- 3. Правильная работа газа и правильное изменение его внутренней энергии – 0,5 балла**
- 4. Правильный ответ – 0,5 балла**

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

**Задача 6.** В момент удара доска поменяет скорость на противоположную  $-\vec{v}_0$  а тело будет продолжать двигаться в направлении стенки с той же скоростью  $\vec{v}_0$ . Поэтому возникнет



проскальзывание тела относительно доски, и на тело и доску станет действовать тормозящая сила трения между доской и телом. В результате и доска, и тело будут замедляться (см. рисунок; векторы скоростей показаны тонкими черными стрелками, векторы сил – жирными серыми). Замедление движения тела и доски (с одинаковыми ускорениями, поскольку массы доски и тела равны) будут проходить до тех пор, пока тело не свалится с доски. После этого доска будет двигаться равномерно, поскольку поверхность, по которой она движется – гладкая. Следовательно, чтобы доска остановилась, тело должно остановиться на доске. А максимальному расстоянию между остановившейся доской и телом, очевидно, отвечает ситуация, когда тело остановится на самом правом краю доски.

Найдем время его движения до остановки в этом случае. В системе отсчета, связанной с доской тело имеет начальную скорость  $2v_0$  и ускорение  $2a$  (где  $a = \mu g$  - ускорение тела и доски под действием силы трения;  $\mu$  - коэффициент трения). Поэтому тело остановится относительно доски через время

$$t = \frac{v_0}{a},$$

пройдя расстояние

$$L = 2v_0t - \frac{2at^2}{2} = \frac{v_0^2}{a}$$

При максимальном удалении доски от стенки, это расстояние равно длине доски  $l$ . Отсюда находим коэффициент трения между телом и доской, при котором доска пройдет максимальное расстояние от стенки

$$\mu = \frac{v_0^2}{gl}$$

Само максимальное расстояние можно найти из следующих соображений. Доска и тело движутся одинаково, поэтому до остановки тела пройдут одинаковые расстояния, но в разные стороны. При этом тело относительно доски должно переместиться на всю ее длину. Поэтому перемещения тела и доски равны половине длины доски, и, следовательно, максимальное расстояние между остановившейся доской и телом равно половине ее длины -  $l/2$ .

- 1. Правильное качественное описание движения тела и доски после удара доски о стенку – 0,5 балла**
  - 2. Правильный вывод (с обоснованием), что доска остановится на максимальном расстоянии от стенки, когда тело остановится на ближайшем к стенке конце доски – 0,5 балла**
  - 3. Правильные законы равноускоренного движения для тела и доски (или правильное использование теоремы об изменении кинетической энергии для тела и доски) – 0,5 балла**
  - 4. Правильный ответ – 0,5 балла**
- Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

**Оценка работы участника**

**Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществляется согласно таблице:**